Espaços vetoriais com produto interno.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

27 de setembro de 2021

Produto Interno: Definição

Seja $V, +, \cdot$ um espaço vetorial sobre os escalares reais. Uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada produto interno se verifica as seguintes propriedades:

1. Bilinear.
2. Simétrica: $\forall x, y \in V,\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
3. Para $x \in V$,
$$\langle x,x\rangle \geq 0, \qquad \text{e} \qquad (\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = O).$$

Observação 1

O postulado 1.) refere-se à linearidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em cada uma das suas variáveis vetoriais separadamente; ou seja, fixado $w \in V$,

$$\langle w, \alpha u + \beta v\rangle = \alpha\langle w,u\rangle + \beta\langle w,v\rangle, \quad \forall u,v \in V,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

e

$$\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle, \quad \forall u,v \in V,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Produto Interno (Cont. 1)

Exemplo 1 (Produto interno Euclideano em $\mathbb{R}^n$)

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n .$$

Observação 2

O postulado 2.) pode ser generalizado para atender espaços vetoriais complexos; ou seja, quando o corpo escalar K que define o espaço é $\mathbb{C}$ e não $\mathbb{R}$.

Nesse caso, $\langle x, y \rangle = a + bi \in \mathbb{C}$ e a simetria é reformulada:

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = a - bi$$

ou seja, $\langle y, x \rangle$ coincide com o complexo conjugado de $\langle x, y \rangle$.
Em particular,

$$\langle w, \alpha u \rangle = \overline{\alpha} \langle w, u \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda w, v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle, \qquad \alpha,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Produto Interno (Cont. 2): Norma

Observação 3

O postulado 3.) refere-se à não-negatividade do produto interno de um vetor com ele próprio;assim, fica bem definida a função

$$N(v) = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad \forall v \in V,$$

que é chamada norma induzida pelo produto interno.

Exemplo 2

No caso produto Euclideano em $\mathbb{R}^2$ obtém-se a norma dois (ou Euclideana).

$$N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|_2,$$

Proposition 1

A função $N : V \longrightarrow \mathbb{R}$; $N(v) = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, $\forall v \in V$, é uma norma; ou seja, verifica as seguintes propriedades:

i) $N(v) \geq 0, \quad \forall v \in V \qquad \text{e} \quad N(v) = 0 \Leftrightarrow v = O_V.$

ii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v), \quad \forall v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

iv) $N(u+v) \leq N(u) + N(v), \quad \forall u,\, v \in V.$

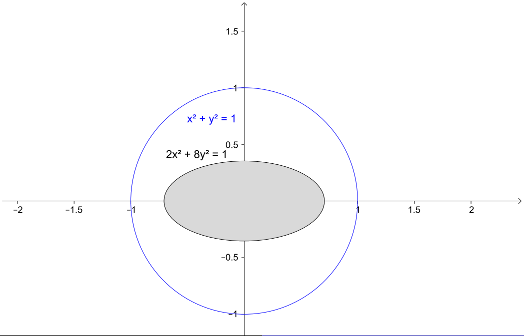
Produto Interno (Cont. 3)

Exemplo 3

Em $\mathbb{R}^2$, a função $\varphi(x,y) = ax_1y_1 + bx_2y_2$, a e b positivos, também é um produto interno (diferente do Euclideano para a ou b diferente de um).Neste caso, a "bola"fechada de centro a origem e raio um

$$B[(0,0),1] := \{x \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{ax_1^2 + bx_2^2} \leq 1\},$$

é uma elipse, e seu interior, de semi-eixos $\sqrt{1/a}$ e $\sqrt{1/b}$ respectivamente. Consulte a Figura 1 (para $a = 2$ e $b = 8$)



Desigualdade de Cauchy-Schwartz

Teorema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)

Seja V, $\varphi(\cdot,\cdot)$, *um espaço vetorial munido de produto interno e* N, *a norma induzida, então*

$$|\varphi(u,v)| \leq N(u)N(v), \qquad u,\ v \in V.$$

Demonstração

Um bom desafio (exercício).

Exemplo 4

No caso de de $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v) = \langle u,v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$, $u = (1,4)$ *e* $v = (3,-2)$ *tem-se*

- $\varphi(u,v) = 1 \cdot 3 + 4(-2) = 3 - 8 = -5,$
- $N(u) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17},$
- $N(v) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$
- $|\varphi(u,v)| = 5 < \sqrt{17}\sqrt{13} = N(u)N(v).$

Vetores ortogonais e vetores unitários

Definição 1

Num espaço vetorial munido de produto interno, $V,+,\cdot,\ \langle\cdot,\cdot\rangle$, diz-se que dois vetores são ortogonais quando o produto interno entre eles for igual a zero.

Exemplo 5

No caso de de $V=\mathbb{R}^2$, $\varphi(u,v)=\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2$, $u=(2,3)$ e $v=(3,-2)$ são ortogonais (perpendiculares). De fato, $\varphi(u,v)=2\cdot 3+3\cdot(-2)=6-6=0$.

Definição 2

Num espaço vetorial munido de produto interno, $V,+,\cdot,\ \langle\cdot,\cdot\rangle$, diz-se que um vetor é unitário quando sua norma induzida for um.Desse modo, um vetor não nulo que não for unitário pode ser normalizado ao multiplicar pelo recíproco da sua norma:

$$N\left(\frac{1}{N(u)}u\right)=\left|\frac{1}{N(u)}\right|N(u)=\frac{N(u)}{N(u)}=1.$$

Exemplo 6

No caso de de $V=\mathbb{R}^2$, $\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2$, $u=(2,3)$ não é unitário, pois $N(u)=\sqrt{13}$. Por outro lado, $\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$ é unitário.

Vetores ortogonais e vetores unitários (Cont.)

Exemplo 7

Em $\mathbb{R}^2$, $v=(1,0)$ *é unitário em relação ao p.i. Euclideano; porém, não é unitário em relação ao p.i.* $\varphi(x,y)=2x_1y_1+8x_2y_2$ *pois*

$$N_\varphi(1,0)=\sqrt{2(1)^2+8(0)^2}=\sqrt{2}\neq 1.$$

Nesse novo p.i., a normalização de $(1,0)$ *é o vetor* $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)=(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.

Exemplo 8

$(1,1)$ *e* $(1,-1)$ *são ortogonais em relação ao p.i. Euclideano:* $1\cdot 1+1\cdot(-1)=0$.

De fato, são perpendiculares. Porém, não são ortogonais em relação a $\varphi(x,y)=2x_1y_1+8x_2y_2$:

$$\varphi((1,1),(1,-1))=2\cdot 1\cdot 1+8\cdot 1\cdot(-1)=-6\neq 0.$$

Na verdade, os vetores $x=(x_1,x_2)$ *ortogonais a* $(1,1)$ *em relação ao p.i. Euclideano verificam a equação linear* $x_1+x_2=0$ *(i.e.,* $x_1=-x_2$*);e, em relação a* φ, $2x_1+8x_2=0$ *(i.e.,* $x_1=-4x_2$*).*

Sistemas ortonormais

Definição 3

Seja $V, +, \cdot$ um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um sistema de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ é dito ortogonal se seus elementos são dois a dois ortogonais, ou seja, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$.Se ainda todos os vetores são unitários, o sistema ortogonal passa a ser chamado ortonormal.

Nesse caso,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Observação 4

Num espaço vetorial finitamente gerado sempre é possível obter uma base ortonormal. Basta fixar um base qualquer, efetuar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e normalizar os vetores resultantes (Vide [1, 8.4]).

Ortogonalizando dois vetores

Se v_1 e v_2 formam uma base do espaço vetorial $\pi = Vet\{v_1, v_2\}$ (plano) e $v_1 \not\perp v_2$ então, pode-se projetar v_2 sobre a reta gerada por v_1:

$$P_{v_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

e, imediatamente, escolher o vetor diferença $w_2 = v_2 - P_{v_1}(v_2)$, que é ortogonal a v_1 (Consulte a Figura 2).

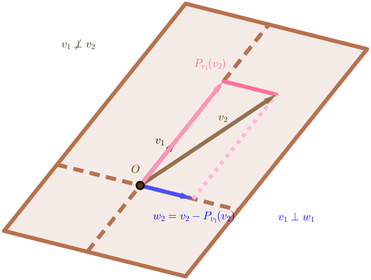


Figura: Ortogonalização de v_1 e v_2.

Ortogonalizando três vetores

Analogamente, se $V = Vet\{v_1, v_2, v_3\}$ então pode-se aplicar o esquema anterior para gerar o plano $\pi = Vet\{v_1, w_2\} = Vet\{v_1, v_2\}$ e projetar v_3 sobre dito plano:

$$P_\pi(v_3) = P_{v_1}(v_3) + P_{w_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

e escolher o vetor diferença $w_3 = v_3 - P_\pi(v_3)$ para compor a base ortogonal de V com $\{v_1, w_2, w_3\}$ (Consulte a Figura 3)[1].

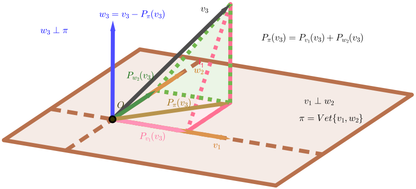


Figura: Ortogonalização de v_1, v_2, v_3.

[1] Finalmente, normalize os vetores para chegar numa base ortonormal. De forma indutiva, pode-se aplicar o processo de ortogonalização para qualquer quantidade finita $n \in \mathbb{N}$ de vetores l.i.

$\varphi(v,w) = \langle [v]_\delta, [w]_\delta \rangle$, δ base ortonormal

Não importa a origem do produto interno em V, fixada uma base ortonormal, ele se comporta via identificação com $\mathbb{R}^n$ como o produto interno Euclideano. Descrevemos esta propriedade na proposição a seguir.

Proposition 2

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial munido do produto interno $\varphi(\cdot,\cdot)$ e $\delta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal em V. Então, para cada v, $w \in V$,

$$\varphi(v,w) = \langle x^T, y^T \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

em que $[v]_\delta = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[w]_\delta = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ são as coordenadas na base δ de v e w respectivamente.

Demonstração da Proposição 2

Conhecidas as coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de v, na base δ, temos $v = x_1u_1 + \cdots x_nu_n$ e, pela linearidade de $\varphi(\cdot, w)$,

$$\varphi(v,w) = \varphi(x_1u_1 + \cdots x_nu_n, w) = x_1\varphi(u_1,w) + \cdots + x_n\varphi(u_n,w) = \sum_{j=1}^{n} x_j\varphi(u_j,w).$$

Analogamente, sendo $w = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n$ e $\varphi(u_j, \cdot)$ uma função linear, tem-se

$$\varphi(u_j,w) = \varphi(u_j, y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) = y_1\varphi(u_j,u_1) + \cdots + y_n\varphi(u_j,u_n) = y_j, \quad j = 1, \ldots, n;$$

pois a base é ortonormal; ou seja, $\varphi(u_j,u_i) = 0$, $\forall i \neq j$, e $\varphi(u_j,u_j) = 1$, $\forall j$.Logo,

$$\varphi(v,w) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\varphi(u_j,w)}_{y_j} = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j = \langle x^T, y^T \rangle.$$

$\square$

Observação 5

A identificação de qualquer produto interno com o Euclideano, quando fixada base ortonormal, faz com que a nomenclatura usual de um p.i. seja a do Euclideano: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição de operador autoadjunto

Considere o contexto de um espaço vetorial real (ou complexo) V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e de uma base ortonormal δ, em relação a esse produto interno.

Estudaremos, então, os operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ que possuem um comportamento simétrico em relação ao produto interno, o que poderá ser traduzido na simetria da matriz de representação.

Definição 4

O operador linear $T : V \longrightarrow V$ é dito autoadjunto quando

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle, \qquad \forall v, w \in V.$$

T é autoadjunto se, e somente se, $[T]_\delta^\delta$ é simétrica

Lembre que se A é a matriz que representa a T na base δ, $[T]_\delta^\delta$, então

$$[T(v)]_\delta = A\underbrace{[v]_\delta}_{x} = Ax \qquad \text{e} \qquad [T(w)]_\delta = A\underbrace{[w]_\delta}_{y} = Ay$$

em que x e y são as coordenadas de v e de w respectivamente. Então, pela Proposição 2,

$$\langle T(v), w\rangle = \langle [T(v)]_\delta^T, y^T\rangle = \langle (Ax)^T, y^T\rangle = x^T A^T y$$

e

$$\langle v, T(w)\rangle = \langle x^T, [T(w)]_\delta^T\rangle = \langle x^T, (Ay)^T\rangle = x^T Ay.$$

Logo, dizer que T é autoadjunto, equivale a dizer que

$$x^T Ay = x^T A^T y, \qquad \forall x, y \in M(n,1) \cong \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \quad A = A^T.$$

Resumindo,

Teorema 2

$\boxed{\textit{T é autoadjunto se, e somente se, } [T]_\delta^\delta \textit{ é simétrica.}}$

Teorema Espectral

O resultado a seguir, conhecido como Teorema Espectral, descreve as principais propriedades dos operadores autoadjuntos em relação aos seus autovalores e autovetores.

Teorema 3 (Espectral)

Seja T autoadjunto. Então

1. *As raízes características são reais.*
2. *Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*
3. *Existe base ortonormal de autovetores de T em V (em particular, T é diagonalizável).*

Demonstração do Teorema Espectral: 1)

Suponha que V seja um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos e que $\lambda = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$, seja um autovalor complexo;fixe então um autovetor unitário $v \in V$, associado a λ, i.e., $T(v) = \lambda v$ e $||v|| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} a+bi=\lambda &= \lambda\underbrace{||v||^2}_{1} = \lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \underbrace{\langle T(v),v\rangle = \langle v,T(v)\rangle}_{T \text{ autoadjunto}} = \langle v,\lambda v\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle v,v\rangle = \overline{\lambda}||v||^2 = \overline{\lambda} = a-bi \Rightarrow b=0 \quad \Rightarrow \lambda = a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema Espectral: 2)

Suponha agora, pro item 2., que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ com $v_1, v_2 \in V \backslash \{O_v\}$ e λ_1, λ_2 escalares (reais - vide item 1.) diferentes.Então,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \underbrace{\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle}_{T \ \textit{autoadjunto}} = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\
&= \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema Espectral: 3)

A demonstração do item 3. é de maior complexidade. Consideraremos aqui apenas o caso mais simples em que V é um espaço de dimensão dois, situação em que a matriz simétrica que representa T numa base ortonormal é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, com a, b e c reais quaisquer.O polinômio característico de A é

$$p(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+c)x + (ac-b^2),$$

cujo discriminante verifica

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2 = a^2-2ac+c^2+4b^2 = (a-c)^2+4b^2 \geq 0.$$

Assim, $\Delta = 0$ se, e somente se, $b = 0$ e $a = c$; ou seja $A = cI$, que é obviamente diagonal(e $T(v) = cv$ tem c como único autovalor; porém, seu autoespaço $V_c = V$ é todo o espaço e assim diagonalizável inclusive admitindo a própria base ortonormal δ como base de autovetores).

Em qualquer outro caso, $b \neq 0$ ou $a \neq c$, $\Delta > 0$ e, consequentemente, $p(x)$ possui duas raízes reais diferentes;dois autovalores diferentes em dimensão dois implicam a existência de dois autovetores linearmente independentes (e ortogonais pois T é autoadjunto);normalizando esses autovetores obtém-se a base ortonormal de auto-vetores desejada. $\square$

Um exemplo

Exemplo 9

O operador linear $T(x,y)=(x+2y,2x+3y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, *é autoadjunto (e diagonalizável).*

Solução

De fato, na base natural $\alpha=\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, que é ortonormal em relação ao produto interno Euclideano, a matriz que representa T é $A=[T]_\alpha^\alpha=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$,que é simétrica; logo, T é autoadjunto e assim, diagonalizável. $\square$

Para efetuar a diagonalização, de fato, calculemos seus autovalores e autovetores:

$$p_A(x)=x^2-(1+3)x+(1\cdot 3-2\cdot 2)=x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x=(4\mp\sqrt{16+4})/2=2\mp\sqrt{5}.$$

Fixando $\lambda_1=2-\sqrt{5}$ tem-se

$$\begin{bmatrix}1-(2-\sqrt{5}) & 2\\ 2 & 3-(2-\sqrt{5})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\Rightarrow \overbrace{v_1=(2,1-\sqrt{5})}^{por\ \ exemplo}.$$

Um exemplo (Cont.)

Para obter um autovetor associado a v_2 não é necessário re-fazer todas as contas pois, tratando-se de um operador autoadjunto, v_2 é ortogonal a v_1;ou seja, $v_2 = (x,y)$ verifica a equação linear

$$0 = \langle v_1, v_2 \rangle = 2x + (1-\sqrt{5})y \Rightarrow x = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}y \Rightarrow \overbrace{v_2 = (1-\sqrt{5}, -2)}^{por\ \ exemplo}.$$

A base $\{v_1, v_2\}$ obtida já é ortogonal e de autovetores porém, não é ortonormal posto que $||v_1|| = ||v_2|| = \sqrt{10-2\sqrt{5}} \neq 1$.

Basta então normalizar para obter a base ortonormal procurada:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2, 1-\sqrt{5}), \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(1-\sqrt{5}, -2).$$

T^*

Obviamente, assim como nem toda matriz é simétrica nem todo operador linear é auto-adjunto.

Definição 5

Define-se então, associado a T, o operador adjunto de T, T^*, cuja matriz de representação na base ortonormal seja, exatamente, a matriz transposta da matriz de representação de T nessa mesma base.

Logo, se $A = [T]_{\delta}^{\delta}$ então,

$$[T^*(v)]_{\delta} = A^T[v]_{\delta}, \qquad \text{e} \qquad \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle, \forall v, w \in V.$$

Em particular, T é auto-adjunto quando $T^* = T$.

Definição

Nesta seção, discutimos a classe de operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ cujos inversos podem ser obtidos pelo cálculo do adjunto; ou seja, $T^* = T^{-1}$; o que, em termos de matrizes, significa: A tais que $A^{-1} = A^T$.

Definição 6

Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear e δ uma base ortonormal no espaço vetorial V munido de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que T é ortogonal quando $A = [T]_{\delta}^{\delta}$ for ortogonal, ou seja,

$$A^T A = I = AA^T.$$

Observação 6

Note que se as linhas de A são representadas pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ então, AA^T coincide com a matriz de Gram associada a ditos vetores, $G = [\langle v_i, v_j \rangle]_{n \times n}$.

Linhas formam sistema ortonormal

Como $AA^T = G$, dizer que A é ortogonal equivale a dizer que

$$G = I \Leftrightarrow [\langle v_i, v_j \rangle]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j, \\ 1, & \forall i = j. \end{cases}$$

Ou seja, A é ortogonal se, e somente se, suas linhas formam um sistema ortonormal de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Colunas formam sistema ortonormal

Observe ainda que a condição $I = AA^T$ implica $(Det(A))^2 = 1$;ou seja, $Det(A) = \pm 1 \neq 0$ e, assim, A é inversível e $A^{-1} = A^T$,em particular, a condição $I = AA^T$ implica $A^T A = I$ e, vice-versa.

Desta forma, também é possível afirmar que A é ortogonal se, e somente se, suas colunas formam um sistema ortonormal de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Resumindo,

Teorema 4

$A_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal se, e somente se, $A^{-1} = A^T$ se, e somente se, suas linhas (colunas) formam um sistema ortonormal em relação ao produto interno Euclideano de $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, se A é ortogonal então, $Det(A) = -1$ ou $Det(A) = 1$.

Exemplos

São ortogonais

Exemplo 10

A matriz identidade (de qualquer ordem n, $n \geq 2$).

Exemplo 11

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Em geral, supondo que V seja munido de um produto interno, da norma induzida por esse produto e, de uma base ortonormal, podem-se enunciar as propriedades a seguir relativas a operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ ortogonais.

Teorema 5

As seguintes afirmações sobre a transformação linear $T : V \longrightarrow V$ são equivalentes:

(a) *T é ortogonal.*

(b) *T transforma base ortonormal em base ortonormal.*

(c) *T preserva o produto interno.*

(d) *T preserva a norma.*

Demonstração: $(a) \Leftrightarrow (b)$

Seja $\delta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal em relação ao p.i. $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ de V e A, a matriz que representa T nessa base. Então,

$$A = [T]_\delta^\delta = [[T(v_1)]_\delta \ [T(v_2)]_\delta \cdots [T(v_n)]_\delta]$$

e T é ortogonal se, e somente se, A é ortogonal (veja a definição);isto é,

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle_V = \langle [T(v_i)]_\delta, [T(v_j)]_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j, \\ 1, & \forall i = j; \end{cases}$$

ou seja, $\gamma = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ também é um sistema ortonormal com n elementos no espaço vetorial V de dimensão n;e assim, uma base ortonormal em V.

Logo, (a) e (b) são afirmações equivalentes $\square$

Demonstração: $(c) \Leftrightarrow (d)$

Se T preserva o produto interno e $v \in V$ então,

$$||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2 \implies ||T(v)|| = ||v||.$$

Por outro lado, lembrando que

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2 \quad \text{e} \qquad ||u-v||^2 = ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$$

podemos escrever

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle u, v\rangle \quad \text{e, analogamente,} \quad ||T(u)+T(v)||^2 - ||T(u)-T(v)||^2 = 4\langle T(u), T(v)\rangle$$

logo, se T preserva a norma e $u, v \in V$ então,

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v)\rangle &= \frac{1}{4}\left(||T(u)+T(v)||^2 - ||T(u)-T(v)||^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(||T(u+v)||^2 - ||T(u-v)||^2\right) \qquad \text{T linear} \\
&= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right) = \frac{1}{4}\left(4\langle u, v\rangle\right) \\
&= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração: $(a) \Leftrightarrow (c)$

$(a) \Rightarrow (c)$:

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v)\rangle_V &= \langle [T(u)]_\delta, [T(v)]_\delta\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle A[u]_\delta, A[v]_\delta\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= (A[u]_\delta)^T A[v]_\delta = [u]_\delta^T \underbrace{A^T A}_{I}[v]_\delta = [u]_\delta^T [v]_\delta \\
&= \langle [u]_\delta, [v]_\delta\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, v\rangle_V .
\end{aligned}$$

$\square$

Por último, $(c) \Longrightarrow (a)$:

Se $\delta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal então $\gamma = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ também é um sistema ortonormal dado que

$$||T(v_i)|| = ||v_i|| = 1 \quad \text{e} \quad \langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = 0, \quad j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

ou seja, T transforma base ortonormal em base ortonormal (item (b)) e, assim, também vale (a). $\square$

Exercícios

Questão 1

Verifique que $(1/3, -2/3, -2/3)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$ *e* $(2/3, 2/3, -1/3)$ *formam uma base ortonormal em* $\mathbb{R}^3$ *relativamente ao produto interno padrão.*

Questão 2

Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida para cada* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *como*

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

1. *Prove que* φ *é um produto interno em* $\mathbb{R}^2$*.*
2. *Mostre que* $(1, 0)$ *e* $(2, -1)$ *formam uma base ortonormal em* $\mathbb{R}^2$ *relativamente a* φ*.*
3. *Prove que* $u = (-2/5, 3/5)$ *é unitário em relação a* φ *e ache um vetor* $v \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\{u,\ v\}$ *seja uma base ortonormal em* $\mathbb{R}^2$ *relativa a* φ*.*

Exercícios (Cont.1)

Questão 3

Quais das seguintes funções definem produtos internos em $\mathbb{R}^2$ ($x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$):

a) $\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

b) $\psi(x,y) = x_1^2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + y_1^2$

c) $\xi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$

Questão 4

Dada a base $(2,0,1)$, $(3,-1,5)$ e $(0,4,2)$ de $\mathbb{R}^3$, construa, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal relativamente ao produto interno padrão. Calcule a fórmula da projeção sobre $V_2 = vet\{y_1, y_2\}$, com y_1 e y_2 ortogonais em $\mathbb{R}^2$.

Questão 5

Seja $V = M(n,m)$. Mostre que $\langle A,B \rangle =$Traço$(A^T B)$ define um produto interno em V.

Questão 6

Mostre que $T_{A^TA} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é auto-adjunto qualquer que seja a matriz real $A_{n\times n}$.

Exercícios (Cont.2)

Questão 7

Ache as matrizes ortogonais que diagonalizam cada uma das matrizes a seguir

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 8

Uma transformação ortogonal é dita própria se $Det\left([T]_\beta^\beta\right) = 1$, *em que* β *é uma base ortonormal em* V; *e, imprópria se* $Det\left([T]_\beta^\beta\right) = -1$. *Mostre que se* $T = T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *e*

$A = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ *então* T *é própria.*

a) *Mostre que* $\lambda = 1$ *é autovalor de* T.

b) *Mostre que se* v *é um autovetor unitário associado a* $\lambda = 1$ *então* $E = \{t\ v;\ t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante por* T *(*E *é dito eixo de rotação de* T*). Calculado* v, *determine um vetor* x *que seja ortogonal a* v *e unitário. Obtenha então os vetores:* $T(x)$, $T^2(x) = T(T(x))$, $T^3(x)$, $\ldots$. *O que observa?*

Exercícios (Cont.3)

Questão 9

Seja $\alpha = \{w_1, w_2, w_3\}$ *base de* V*, onde* V *é um espaço vetorial com produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Sejam*

$$[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\langle u, v \rangle = 2$*, a base é ortonormal ?*

Questão 10

Ache os valores para x *e* y *tais que a matriz, a seguir, seja ortogonal:*

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios (Cont.4)

Questão 11

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}.$$

1. *Mostre que os auto-valores são* a, $b+c$ *e* $b-c$.
2. *Ache uma base de auto-vetores.*

Questão 12

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um operador linear cuja matriz, em relação à base canônica, é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exiba uma base ortonormal de autovetores.

Exercícios (Cont.5) e bibliografia

Questão 13

Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, i.e.,

$$||Tu - Tv|| = ||u - v||, \qquad \forall u,\ v \in \mathbb{R}^2.$$

Bibliografia:

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).