Formas Quadráticas.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

4 de outubro de 2021

Forma bilinear simétrica

Seja V um espaço vetorial real munido de produto interno e $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função real.

Definição 1

Diz-se que b é uma forma bilinear se for linear em cada variável (fixada a outra) e simétrica, se $b(u,v) = b(v,u)$, $\forall u,\ v \in V$.

Exemplo 1

Em $\mathbb{R}^n$ *o produto interno Euclideano é uma forma bilinear simétrica:*

$$b(x,y) = \langle x,y \rangle = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n.$$

Matriz de representação

Fixada uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V defina $b_{ij} = b(v_i, v_j)$, $\forall i,\ j$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, $x = [u]_\beta$ e $y = [v]_\beta$. Então, $v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ e

$$b(u,v) = b(u, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) = y_1 b(u, v_1) + \cdots + y_n b(u, v_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j b(u, v_j).$$

Substituindo $u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ tem-se

$$b(u,v) = \sum_{j=1}^{n} y_j b(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, v_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left[\sum_{i=1}^{n} x_i b(v_i, v_j)\right] = \langle y, B^T x\rangle = \langle x, By\rangle.$$

Ou seja,

$$b(u,v) = [u]_\beta^T B [v]_\beta, \qquad \forall u,\ v \in V.$$

Definição 2

A matriz B é chamada de Matriz de representação da forma bilinear b na base β e, representada por $[b]_\beta^\beta$.

Matriz de representação (cont.)

Mais ainda,b é simétrica se, e somente se

$$b(u,v) = b(v,u) \Leftrightarrow x^T By = \underbrace{y^T Bx}_{(y^T Bx)^T} = x^T B^T y \qquad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow B = B^T,$$

ou seja, no caso, e apenas no caso de B ser uma matriz simétrica.

Exemplo 2

No exemplo do produto interno Euclideano em $\mathbb{R}^n$

$$b(x,y) = \langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots x_ny_n.$$

Fixada a base canônica $\alpha = \{e_1,\ldots,e_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, a matriz de representação é a matriz de Gram associada a* $e_1,\ldots,$ e_n*:* $[\langle e_i,e_j\rangle]_{n\times n} = I_n$*, que é simétrica.*

Forma Quadrática

Definição 3

Associada a uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *define-se a Forma Quadrática* $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *pela regra*

$$Q(u) = b(u,u), \quad \forall u \in V, \quad \equiv \quad Q(u) = x^T Bx = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$$

em que $x = [u]_\beta$, $B = [b]_\beta^\beta$ *é a matriz simétrica que representa* b *e* β *é uma base ortonormal em* V.

Note que, necessariamente, $b_{ij} = b_{ji}$, pois B é simétrica; assim,

$$Q(u) = x^T Bx = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j = b_{11} x_1^2 + \cdots + b_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{j>i,\ i=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .$$

Forma Quadrática (cont. 1)

Exemplo 3

No caso da forma bilinear simétrica do produto interno Euclideano em $\mathbb{R}^n$, a forma quadrática associada é a função $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, em que

$$Q(x) = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Exemplo 4

$Q(x) = x_1^2 - 18x_1x_2 + 5x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *é uma forma quadrática com matriz de representação, na base canônica,* $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$.

Forma Quadrática (cont. 2)

Proposição 1

Se $Q(u) = b(u,u)$ é a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ então

$$b(u,v) = \frac{1}{4}\left[Q(u+v) - Q(u-v)\right], \qquad \forall u,v \in V.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= b(u+v,u+v) = b(u+v,u) + b(u+v,v) \\ &= b(u,u) + b(v,u) + b(u,v) + b(v,v) \\ &= Q(u) + 2b(u,v) + Q(v). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$Q(u-v) = Q(u) - 2b(u,v) + Q(v).$$

Logo,

$$Q(u+v) - Q(u-v) = 4b(u,v).$$

□

Forma Quadrática (cont. 3)

Observação 1

A proposição acima garante a possibilidade de recuperar a forma bilinear a partir da forma quadrática e, em particular, permite determinar $B = [b]_\beta^\beta$ pois

$$b_{ij} = b(v_i, v_j) = \frac{1}{4}\left[Q(v_i + v_j) - Q(v_i - v_j)\right], \qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Eixos principais

A seguir mostramos que os termos com os produtos cruzados $x_i x_j$, $i \neq j$, na Definição 3 de uma forma quadrática, podem ser eliminados com uma mudança de variáveis apropriada e, consequentemente, nessa nova variável y, a representação da forma quadrática só possui termos do tipo quadrático $\lambda_i y_i y_i = \lambda_i y_i^2$.

Teorema 1 (Eixos principais)

Seja $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática com matriz de representação $B = [Q]_\beta$ na base ortonormal β do espaço vetorial V munido de produto interno. Então, existe uma base ortonormal γ de autovetores de B em V tal que, para cada $u \in V$,

$$Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \text{em que} \quad y = [u]_\gamma$$

e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de B.

Demonstração do Teorema dos eixos principais

Sabe-se que $Q(u) = x^T Bx$ em que $x = [u]_\beta$ e que B representa um operador auto-adjunto, pois B é simétrica, e, assim, B é ortogonalmente diagonalizável;isto é, existe uma base ortonormal γ de autovetores de B em V tal que a matriz de mudança de base $P = [I]_\beta^\gamma$ é ortogonal e $P^{-1}BP = D$ é a matriz diagonal com os autovalores de B, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Logo,

$$y = [u]_\gamma = [I]_\gamma^\beta [u]_\beta = P^{-1}x = P^T x, \quad B = PDP^T$$

e

$$Q(u) = x^T Bx = x^T(PDP^T)x = (P^T x)^T D(P^T x) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

$\square$

$V = \mathbb{R}^n$

Fixemos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$, munido do produto interno Euclideano e da base canônica $\alpha = \{e^1, \ldots, e^n\}$ em que $e^1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e^n = (0, \ldots, 0, 1)$, que é uma base ortonormal.

Uma função $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $Q(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, onde b_{ij} são reais fixados e os índices i e j percorrem os números $1, 2, \ldots n$, é, então, uma Forma Quadrática desde que $b_{ij} = b_{ji}$, $\forall i, j$.

Obviamente, definindo $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ e identificando $x = [x]_\alpha$ (vetor coluna) obtemos

$$Q(x) = x^T B x = \langle x, Bx \rangle = \langle Bx, x \rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

pois B é simétrica (representando um operador autoadjunto).

Classificação de Q e de $A = [Q]$

Definição 4

A forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita não negativa definida quando $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Se ainda, $Q(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, diz-se que é positiva definida. De forma análoga, trocando as desigualdades, define-se não positiva e negativa definida respectivamente. Se existirem $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $Q(x) < 0$ e $Q(y) > 0$ então a forma quadrática é dita indefinida.

Observação 2

Observe que fixada uma matriz quadrada A, ordem n, de números reais e simétrica temos uma forma quadrática associada: $\langle Ax, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ (identificados com vetores colunas). Assim, classifica-se uma matriz simétrica em semidefinida positiva, definida positiva, semidefinida negativa, definida negativa ou indefinida quando a forma quadrática associada for não negativa definida, negativa definida, não positiva definida, negativa definida ou indefinida respectivamente.

Exemplo de classificação (via definição)

Exemplo 5

Classifique a forma quadrática $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Solução

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0, \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Logo, Q é não-negativa definida.

Note ainda que $Q(x) = 0$ se e somente se $(x_1 - 2x_2) = 0 = x_2 \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 \Leftrightarrow x = (0,0)$. Então, Q é positiva definida.

Observe agora que

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

Ou seja, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa Q na base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Assim, A é definida positiva.

Classificação via autovalores

Teorema 2

Sejam A, a matriz simétrica que representa a forma quadrática Q e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, os autovalores de A. Então Q (e A) é

1. *não-negativa definida se e somente se $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$;*
2. *positiva definida se e somente se $\lambda_i > 0 \ \forall i$;*
3. *não-positiva definida se e somente se $\lambda_i \leq 0 \ \forall i$;*
4. *negativa definida se e somente se $\lambda_i < 0 \ \forall i$;*
5. *indefinida se e somente se existem i e j tais que $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$.*

Demonstração

Aplique o Teorema dos eixos principais para escrever

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

em que $y = [x]_\gamma$ e γ é a base ortonormal de autovetores de A $\square$

Classificação via autovalores (Cont.)

Exemplo 6

Voltando ao exemplo acima em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, *calculemos seus autovalores:*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda)-4 = 5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-6\lambda+1 \\ \Longrightarrow & \quad p_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = 3\pm\sqrt{8} = 3\pm 2\sqrt{2} \\ \Longrightarrow & \quad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0. \end{aligned}$$

Confirmando que A é definida positiva.

Submatrizes e menores principais (líderes ou não)

Definição 5 (Menores principais -[1] 16.2)

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ a $k \times k$ submatriz quadrada obtida de A eliminando $n-k$ linhas de A e as mesmas $n-k$ colunas de A é chamada de submatriz principal de ordem k e seu determinante, menor principal de ordem k.Quando as linhas (e colunas) eliminadas são exatamente as $n-k$ últimas a submatriz é chamada de <u>submatriz principal líder de ordem k</u> e seu determinante é chamado <u>menor principal líder de ordem k</u> e denotado Δ_k.

Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Possui uma única submatriz principal de ordem 3, a própria A; que é também a submatriz líder de ordem 3. Neste caso o menor principal líder de ordem 3 é o próprio determinante de A: $\Delta_3 = Det(A)$.De ordem 2 há três submatrizes principais A_{11}, A_{22} e A_{33} que são as obtidas de A eliminando a linha e coluna 1, 2 e 3 respectivamente. Consequentemente há três menores principais de ordem dois; porém, só um deles é líder: $\Delta_2 = Det(A_{33}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.Também há três submatrizes principais de ordem 1, relativas aos elementos da diagonal e apenas uma submatriz principal líder de ordem um: $[a_{11}]$. Neste caso o menor principal líder de ordem um é $\Delta_1 = a_{11}$.

Definidas e indefinidas

Teorema 3

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz simétrica e Δ_k seu menor principal líder de ordem k, $k = 1,\dots,n$. Então,

a) *A é definida positiva se e somente se $\Delta_k > 0$, $\forall k$.*
b) *A é definida negativa se e somente se $(-1)^k\Delta_k > 0$, $\forall k$ (i.e., pares positivos e ímpares negativos).*
c) *Se existe $k_0 \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\Delta_{k_0} \neq 0$, mas não encaixa em nenhum dos dois padrões de sinais anteriores $a)$ ou $b)$ então A é indefinida.*

Exemplo 7

Voltemos mais uma vez ao exemplo acima em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, *e calculemos seus menores principais líderes:*

$$\Delta_1 = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5-4 = 1 > 0$$

re-confirmando que A é definida positiva.

Semi-definidas

Note que se algum $\Delta_k = 0$ então a matriz não pode ser (positiva ou negativa) definida, mas ainda poderia ser semidefinida. Neste caso os menores principais não líderes completam a análise.

Teorema 4

Seja $A_{n\times n}$ uma matriz simétrica. Então,

d) *A é semidefinida positiva se e somente se todos os menores principais (líderes ou não) são não negativos (≥ 0).*

e) *A é semidefinida negativa se e somente se todo menor principal (líder ou não) de ordem par é não negativo (≥ 0) e todo menor principal (líder ou não) de ordem ímpar é não positivo (≤ 0).*

Variância

Exemplo 8

Considere a possibilidade de investir em três títulos (ações): $X_1,\ X_2,\ X_3$.Seja σ_i^2 a variância do retorno, e x_i o peso no portfólio (ou cesta) do título X_i, $i = 1,2,3$. De modo que $x_i \geq 0$, $i = 1,2,3$, e $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Suponha ainda que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ representa a covariância do retorno entre X_i e X_j, $i \neq j$, $i,\ j \in \{1,2,3\}$. Então a variância do portfólio com x_1 de X_1, x_2 de X_2 e x_3 de X_3, $v(x) = \sigma_p^2$, admite representação na forma

$$v(x) = x^T Ax, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^T = (x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Logo, v é uma forma quadrática.

Diferencial de segunda ordem

Exemplo 9 (Diferencial de segunda ordem e Hessiana)

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2(U)$ no aberto U de $\mathbb{R}^n$ e a, um elemento de U. A Matriz Hessiana de f no ponto a, $Hf(a)$ ou também $\nabla^2 f(a)$, é a matriz quadrada, de ordem n, que possui na linha i, coluna j, a derivada parcial de segunda ordem de f, primeiro na variável i e depois na variável j:

$$Hf(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right].$$

Pelo Teorema de Schwartz, $A = Hf(a)$ é uma matriz simétrica e, assim, representa a forma quadrática:

$$Q(v) = \langle Av, v\rangle = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) v_i v_j$$

que é o diferencial de segunda ordem de f no ponto a.

Diferencial de segunda ordem (Extremos)

A Fórmula de Taylor de segunda ordem, com resto infinitesimal, em torno de a diz que

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \frac{1}{2}Q(v) + r(v), \quad \text{com} \quad \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||^2} = 0.$$

Logo, se a for um ponto crítico ($\nabla f(a) = 0$) e v estiver numa bola de centro a e raio pequeno o suficiente então

$$f(a+v) - f(a) \approx \frac{1}{2}Q(v)$$

e conhecer o sinal da forma quadrática Q permite identificar se o ponto crítico é ou não um extremo local de f:

- se Q for definida positiva, a é minimizador local;
- se for definida negativa é maximizador local;
- e se for indefinida é um ponto de sela.

Questão 1

Escreva a matriz que representa, na base canônica, cada uma das seguintes formas bilineares

a) $x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 - 5x_2y_3$,

b) $2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_1y_3 - 2x_2y_2 + 7x_3y_1 + 4x_3y_3$,

c) $x_1y_1 - 5x_2y_3 + 2x_3y_3$.

Alguma delas é simétrica?

Questão 2

Uma forma bilinear é dita anti-simétrica se $b(u,v) = -b(v,u)$, $\forall u,\ v \in V$

a) *Cheque se alguma das formas bilineares da questão acima é ati-simétrica.*

b) *Mostre que a única forma bilinear simétrica e anti-simétrica simultaneamente é a nula, i.e.,* $b(u,v) = 0$, $\forall u,\ v \in V$.

c) *Sejam* B_s *e* B_a *os conjuntos das formas simétricas e anti-simétricas respectivamente. Prove que eles são subespaços vetoriais do conjunto de todas as formas bilineares* B.

d) *Prove que* $B = B_s \oplus B_a$.

Questão 3

Escreva a matriz simétrica que representa na base canônica cada uma das seguintes formas quadráticas. Verifique que podem ser escritas como produtos matriciais $x^T Ax$:

a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2$,

b) $2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$,

c) $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3 - 3x_3x_1$.

Identifique, em cada caso, uma base ortonormal de autovetores na qual possam ser escritas na forma

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Classifique-as (em positivas/não-negativas/negativas/não-positivas/indefinidas).

Questão 4

Determine e classifique a forma quadrática associada a matriz Hessiana de f no ponto dado:

1. $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, *no ponto* $(x_0, y_0) = (0,0)$.
2. $f(x,y) = x^2y^3 + x^2 - y^2$, *no ponto* $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).