GEOMETRIA NO $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$: ESPAÇOS EUCLIDEANOS.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

12 de julho de 2021

Plano Cartesiano

Se $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais então $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais que identificamos geometricamente como o plano Cartesiano.

De forma análoga, $\mathbb{R}^3$ representa o conjunto das ternas de números reais e assim sucessivamente para $n \in \mathbb{N}$ fixado

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Cada $n-$upla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais pode ser associada ao segmento de reta que liga a origem $O = (0, \ldots, 0)$ ao ponto x com uma zeta sobre x para especificar o sentido do movimento nessa direção linear da origem até x.

Dita direção orientada é também chamada de vetor e representada por $\vec{x}$, ou OX ou simplesmente x.

Plano Cartesiano: representação geométrica

Por exemplo, $P = (1,2)$ e $Q = (3,1)$ são elementos de $\mathbb{R}^2$ (pares ordenados de números reais) e, por sua vez, representam vetores no plano (Vide Figura 1). Para movimentarmos de P até Q ao longo do caminho mais curto deveremos escolher o segmento de reta que liga esses dois pontos e no sentido de Q, ou seja, teremos de escolher direção, sentido e comprimento de um movimento linear: um vetor, que chamamos de $\vec{PQ}$. Observe então que dito movimento é de duas unidades positivas na horizontal e, uma negativa na vertical. De modo que poderíamos identificar $\vec{PQ}$ com $(2,-1)$ ou também $(3-1, 1-2)$ =“Q-P", embora sejam segmentos de reta diferentes; diz-se que são vetores equipolentes: mesmo comprimento, sentido e direção.

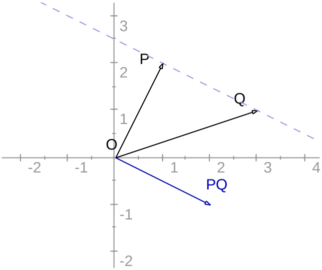

Figura: Vetores P, Q e PQ

Soma vetorial em $\mathbb{R}^n$:

Dados $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ definimos a soma de x e y, denotada $x + y$, como sendo o vetor (ou $n-$upla)

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{1}$$

Exemplo 1

Voltando ao caso de $\mathbb{R}^2$ e aos vetores $P = (1,2)$ e $Q = (3,1)$, temos

$$P + Q = (1+3, 2+1) = (4,3), \qquad P + O = (1+0, 2+0) = P, \qquad P + (-1,-2) = O.$$

Propriedades básicas da soma:

Identificação geométrica do vetor soma como a diagonal principal do paralelogramo gerado pelos vetores (Vide Figura 2).

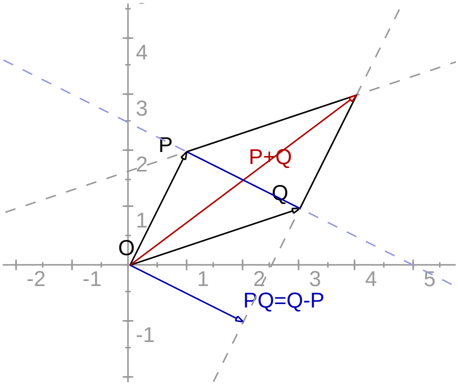

Figura: Soma e diferença dos vetores P e Q

Propriedades básicas da soma: continuação

Proposição 1

Dados os vetores $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$ *temos*

1. $x+y=y+x$ *(Comutativa).*
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ *(Associativa).*
3. $x+O=O+x=x$ *onde* $O=(0,\ldots,0)$ *(*$\exists$ *neutro).*
4. *Existe inverso aditivo de* x*, denotado* $-x=(-x_1,\ldots,-x_n)$*, tal que* $x+(-x)=O$*.*

Definição 1

Dados os vetores u *e* v *em* $\mathbb{R}^n$ *o vetor diferença (ou substração)* $u-v$*, é definido como o vetor soma de* u *com o inverso aditivo de* v*,* $-v$*. Geometricamente corresponde à outra diagonal do paralelogramo trasladada até a origem (Vide Figura 2).*

Multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^n$:

Dados o vetor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e o número real α, a multiplicação do escalar α pelo vetor x é o vetor definido e denotado por

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Exemplo 2

Considere $x = (2,1) \in \mathbb{R}^2$ então (Vide Figura 3)

$$2 \cdot x = (4,2), \qquad 1 \cdot x = x, \qquad (-1) \cdot x = (-2,-1) = -x.$$

Desse modo, dados o vetor $x \neq O$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot x$ preserva a direção de x a menos que $\alpha = 0$ (fala-se em vetores paralelos ou co-lineares); preserva o sentido quando $\alpha > 0$; troca o sentido quando $\alpha < 0$; preserva o comprimento de x quando $\alpha = \pm 1$, em particular $(-1) \cdot x$ é o inverso aditivo de x; e, amplia ou contrai o vetor x dependendo de $|\alpha| > 1$ ou $|\alpha| < 1$ respectivamente.

A geometria da multiplicação por escalar.

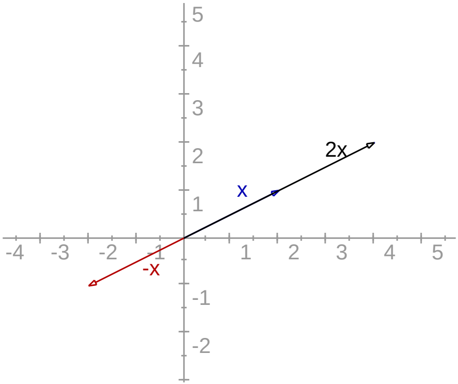

Figura: Multiplicação por escalar

Propriedades da multiplicação por escalar

Proposição 2

Dados os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e os escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *temos*

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
2. $1 \cdot x = x$.
3. $0 \cdot x = O$ *onde* $O = (0, \ldots, 0)$.
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *e* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(propriedades distributivas).*

A estrutura algébrica gerada em $\mathbb{R}^n$ com estas operações $+, \cdot$ é um caso particular do tipo de estrutura algébrica conhecida como espaço vetorial.

Produto interno

Vejamos a seguir um outro tipo de produto em $\mathbb{R}^n$ chamado de produto interno (ou produto escalar).

Definição 2

Dados os vetores x, $y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno entre x e y como sendo o número real $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Este número será denotado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Notações: dentre $\langle x,y\rangle$, (x,y), $x \cdot y$, $x'y$ etc, damos preferência à $\langle x,y\rangle$ para não confundir dito produto com um par ordenado ou produto numérico etc.

Exemplo 3

Considere os vetores $x = (4,-1,2)$ e $y = (6,3,-4)$ em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\langle x,y\rangle = 4\cdot 6 + (-1)3 + 2(-4) = 24 - 3 - 8 = 13.$$

Propriedades do produto interno

A relação $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associa o valor $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ é uma função que verifica as seguintes propriedades:

1. Bilinear. Ou seja, fixado $u \in \mathbb{R}^n$ a função $\langle u,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e, fixado $v \in \mathbb{R}^n$, a função $\langle\cdot,v\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ também é linear.

   Entenda-se que

   $$\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\quad \langle u,\alpha x+\beta y\rangle = \alpha\langle u,x\rangle + \beta\langle u,y\rangle \quad \text{e} \quad \langle \alpha x+\beta y,v\rangle = \alpha\langle x,v\rangle + \beta\langle y,v\rangle.$$

2. Simétrica: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

3. Se $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ então $\langle x,x\rangle = x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$.

   Consequentemente,

   $$\langle x,x\rangle \geq 0, \qquad \text{e} \qquad (\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = O).$$

Sobre a linearidade de $\langle u, \cdot \rangle$

Suponha $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, fixado; e, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, qualquer. Então

$$\langle u, x \rangle = ax_1 + bx_2$$

Exemplo 4

A modo de ilustração, fixemos $a = 2$ *e* $b = 3$. *Então,*

$$\langle u, x \rangle = 2x_1 + 3x_2 \qquad \textit{linear em } \ x_1,\ x_2.$$

Em geral, se $y = (y_1, y_2)$ então $\langle u, y \rangle = ay_1 + by_2$. E se α e β são números reais então

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2);$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle u, \alpha x + \beta y \rangle &= a(\alpha x_1 + \beta y_1) + b(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(ax_1 + bx_2) + \beta(ay_1 + by_2) = \alpha\langle u, x \rangle + \beta\langle u, y \rangle. \end{aligned}$$

Norma Euclideana: definição e propriedades.

A partir da propriedade descrita no item 3 da proposição acima podemos definir a função conhecida como norma Euclideana.

Definição 3

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, em $\mathbb{R}^2$, se $x = (x_1, x_2)$ então, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; que, pelo Teorema de Pitágoras, corresponde ao comprimento de segmento de reta que liga a origem ao ponto x, ou seja, o comprimento de vetor x. Logo, da definição decorrem as seguintes propriedades:

Proposição 3

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

1. $||x|| \geq 0$ *e* $||x|| = 0$ *se e somente se* $x = O$.
2. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Norma Euclideana: demonstração das propriedades.

Da definição de norma Euclideana tem-se

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \ldots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = O.$$

Além disso,

$$||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot ||x||.$$

A propriedade (3) da norma Euclideana, devida a Minkowsky, é conhecida como desigualdade triangular posto que num triângulo qualquer de lados $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\overrightarrow{x+y}$ o comprimento de um dos seus lados, digamos o do lado $\overrightarrow{x+y}$, $||x+y||$, não ultrapassa a soma dos comprimentos dos outros dois lados, $||x|| + ||y||$ (consulte a Figura 4).

Desigualdade Triangular.

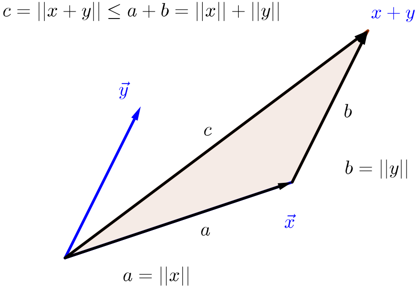

Figura: Desigualdade Triangular.

Ângulo e produto interno

Definindo o ângulo entre dois vetores como o menor ângulo entre eles; lembre que ângulo é comprimento de arco encima do círculo trigonométrico orientado positivamente no sentido anti-horário (vide Figura 5), podemos estabelecer a seguinte propriedade geométrica do p.i.

Teorema 4

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e θ o ângulo entre eles. Então

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot cos(\theta).$$

Exemplo 5

Sejam $u = (1,0)$ e $v = (0,1)$ em $\mathbb{R}^2$. Então

$$\langle u, v\rangle = 1(0) + 0(1) = 0, \quad ||u|| = \sqrt{1+0} = 1, \quad ||v|| = \sqrt{0+1} = 1 \Rightarrow$$

$$0 = 1 \cdot 1 \cdot cos(\theta) = cos(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Quando $\theta = \angle(u, v) = \pi/2$ diz-se que u e v são ortogonais: $u \perp v$.

Ângulo e produto interno: continuação.

Exemplo 6

Sejam $u = (1,0)$ *e* $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Então*

$$\langle u, v\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|u\| = 1 = \|v\| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = cos(\theta) \Rightarrow \theta = \pi/4.$$

Quando a norma do vetor é igual a um diz-se que é um vetor <u>unitário</u>.

Observação 1

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ ou $\|x\| = 0$ ou $\dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$ é unitário.

De fato, supondo que $x \neq O$, tem-se

$$\left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

Demonstração do Teorema 4

Observação 2

Supondo $x,y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e θ o ângulo entre eles. Então

$$\langle x,y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| cos(\theta) \Leftrightarrow cos(\theta) = \frac{1}{||x|| \cdot ||y||} \langle x,y\rangle = \left\langle \frac{1}{||x||} x, \frac{1}{||y||} y \right\rangle,$$

onde a última igualdade decorre da bilinearidade do produto interno.

Assim, o Teorema 4 pode ser enunciado, equivalentemente, da seguinte forma: se u e v são vetores unitários então $\langle u,v\rangle = cos(\theta)$ (consulte a Figura 5).

Ora, rotacionando o sistema de coordenadas se necessário pode-se supor que $u = (1,0)$ e, consequentemente, v é o vetor sobre o círculo trigonométrico de coordenadas $(cos(\theta), sen(\theta))$ (consulte a Figura 6); assim,

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = \langle (cos(\theta), sen(\theta)), (1,0)\rangle = cos(\theta) \cdot 1 + sen(\theta) \cdot 0 = cos\theta$$

o que fecha a demonstração do Teorema 4.

Ângulo e produto interno: geometria.

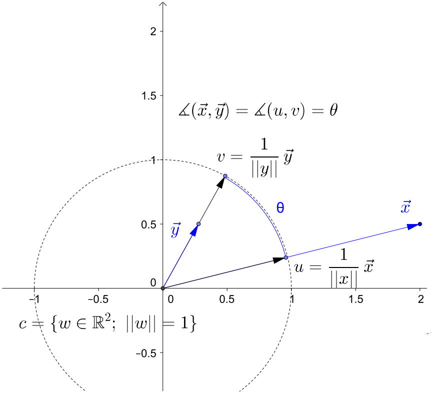

Figura: Ângulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

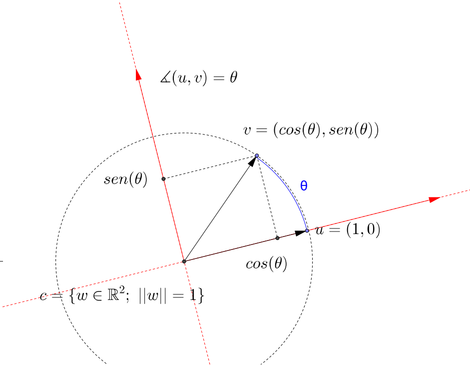

Figura: Ângulo entre u e v.

Desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Note que qualquer que seja θ, $|cos(\theta)| \leq 1$. Então, a partir de Teorema 4 obtémos a desigualdade

$$\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| = ||x|| \cdot ||y|| \cdot |cos(\theta)| \leq ||x|| \cdot ||y||, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwartz (em $\mathbb{R}^2$).

Observe que a igualdade se verifica apenas no caso em que $|cos(\theta)| = 1$; ou seja, quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, correspondendo ao caso dos vetores serem co-lineares.

Observação 3

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a bilinearidade e simetria do produto interno e a definição de norma Euclideana obtém-se

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

e tirando a raiz quadrada obtém-se a desigualdade triangular. □

Distância Euclideana

Um vez definida a norma Euclideana podemos estabelecer a distância entre dois pontos $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ como sendo o comprimento (ou norma) do vetor diferença, ou seja, o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \tag{3}$$

Exemplo 7 (n=1)

Dados $x,y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{se } x \geq y \\ y-x, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

Distância Euclideana: continuação.

Exemplo 8 (n=2)

Dados $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ *é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo de lados de comprimento* $|x_1 - y_1|$ *e* $|x_2 - y_2|$*. Vide Figura 7.*

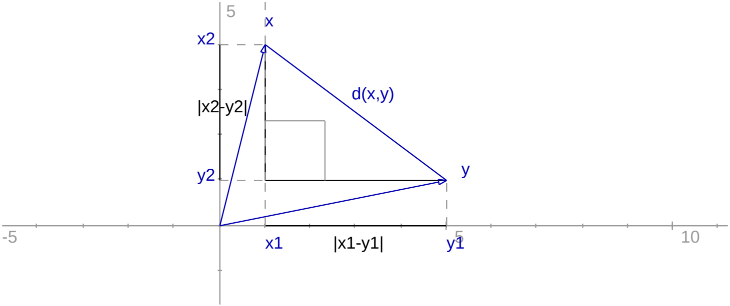

Figura: Distância Euclideana.

Distância Euclideana: propriedades.

Exemplo 9

$$d((1,2),(3,4)) = \|(1,2)-(3,4)\| = \sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{2\cdot 4} = 2\sqrt{2}.$$

$$d((1,2,0),(-1,2,0)) = \sqrt{(1-(-1))^2+(2-2)^2+(0-0)^2} = \sqrt{2^2+0+0} = 2.$$

$$d((1,2),O) = \|(1,2)-(0,0)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

Decorrem da definição (3) as seguintes propriedades.

Proposição 5

A distância Euclideana $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ verifica:

1. $d(x,y)\geq 0$ *e* ($d(x,y)=0$ *se e somente se* $x=y$).
2. $d(x,y)=d(y,x)$, *(simétrica).*
3. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$, *(desigualdade triangular).*

Equação vetorial da reta

Dado um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ e uma direção $V \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ temos uma única reta definida pela equação (Vide Figura 8). O vetor V é chamado vetor diretor da reta.

$$X = A + tV, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

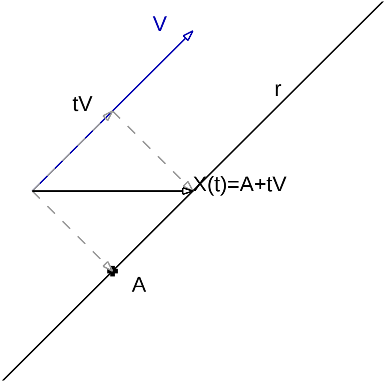

Figura: Equação vetorial da reta.

Equações paramétrica e simétrica da reta

Fazendo $V=(v_1,v_2)$, $A=(a_1,a_2)$ e $X=(x,y)$ temos

$$X\in r=\{A+tV \mid t\in\mathbb{R}\}\Leftrightarrow (x,y)=(a_1,a_2)+t(v_1,v_2)=(a_1+tv_1,a_2+tv_2)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=a_1+tv_1 \\ y=a_2+tv_2, \qquad t\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

conhecida como <u>equação paramétrica</u> da reta que passa pelo ponto A com vetor diretor V.

Observe ainda que no caso em que $v_1\neq 0$ e $v_2\neq 0$, dita equação pode ser re-escrita na forma

$$t=\frac{x-a_1}{v_1} \quad \text{e} \quad t=\frac{y-a_2}{v_2}, \quad t\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \qquad \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2},$$

que a equação da reta na forma <u>simétrica</u> ou simplificada.

A reta como gráfico de $y = m(x - a_1) + a_2$

Note que $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ equivale a

$$y = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)(x - a_1) + a_2. \tag{5}$$

Ou seja, identificamos a reta r com o gráfico da função afim (5) que possui coeficiente angular (ou inclinação) $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ e passa pelo ponto $A = (a_1, a_2)$ (Figura 9).

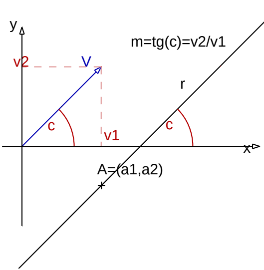

Figura: A reta r é o gráfico $y = m(x - a_1) + a_2$.

Posição relativa entre retas no plano

Considere as retas r e s passando pelos pontos A e B respectivamente e com vetores diretores V e U respectivamente, descritas pelas suas equações vetoriais

$$\begin{array}{cccc} r: & X = & A + tV, & t \in \mathbb{R} \\ s: & Y = & B + \mu U, & \mu \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Então temos as seguintes situações (excludentes) possíveis:

1. Concorrentes: retas não paralelas que se cruzam num único ponto. Ou seja, os vetores diretores não são co-lineares. Entenda-se:

$$\nexists \alpha \in \mathbb{R}; V = \alpha U.$$

2. Paralelas: $\exists \alpha \in \mathbb{R}; V = \alpha U$.
    1. Iguais (ou coincidentes) : $A \in s$.
    2. Diferentes: $A \notin s$.

Definição da projeção ortogonal

Seja $r = \{t \cdot v;\ t \in \mathbb{R}\}$, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, uma reta contendo a origem com vetor diretor v, e suponha que $u \in \mathbb{R}^2$ é um vetor qualquer do plano. Considere então o problema de achar aquele ponto w da reta r que esteja à distância mínima do ponto u (consulte a Figura 10).

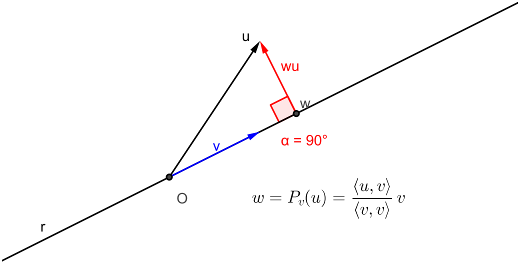

Figura: Projeção ortogonal.

Cálculo da projeção ortogonal

A condição da distância mínima implica que o vetor $wu = u - w$ seja ortogonal ao vetor v:

$$0 = \langle u - w, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle w, v \rangle \Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Por outro lado, $w \in \mathbb{R}$ implica $w = t^* v$ para algum $t^* \in \mathbb{R}$; assim,

$$\langle u, v \rangle = \langle t^* v, v \rangle = t^* \langle v, v \rangle \Rightarrow t^* = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \quad w = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v.$$

A notação usual para o vetor obtido, w, é $P_v(u)$.

Exemplo 10

Determine a projeção ortogonal de $u = (2,3)$ sobre a reta suporte do vetor $v = (2,1)$.

Note que

$$\langle v, v \rangle = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \quad \wedge \quad \langle u, v \rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow P_v(u) = \frac{7}{5} \cdot (2,1).$$

Equação vetorial do plano

Sejam U e V vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ não co-lineares. O plano gerado por U e V e que passa pela origem O é o conjunto dos pontos:

$$X = tU + sV, \qquad t,\ s \in \mathbb{R}.$$

No caso geral, ou seja quando o plano passa por um ponto A fixado e possui vetores diretores U e V (vide Figura 11), a sua equação vetorial é

$$\pi : \qquad X = A + tU + sV, \qquad t,\ s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

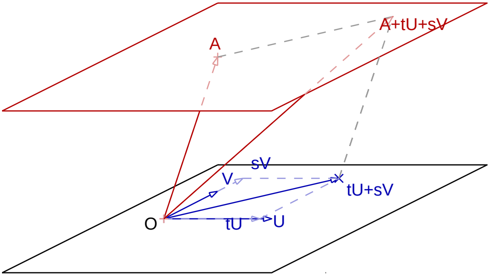

Figura: Planos gerados por U e V passando por O e por A.

Equação paramétrica do plano

Observe que fazendo $X = (x,y,z)$, $A = (a_1,a_2,a_3)$, $U = (u_1,u_2,u_3)$ e $V = (v_1,v_2,v_3)$ obtemos $X \in \pi$ (onde π representa o plano definido em (6)) se, e somente se, X é descrito pelo sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3, \qquad t,\ s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observação 4

Além da informação de um ponto contido no plano e dois vetores diretores (não nulos) e não colineares existem outras formas de identificar, de forma única, um plano. Por exemplo:

1. Três pontos não co-lineares A, B e C: basta definirmos $U = \vec{AB}$, $V = \vec{AC}$ e utilizar a equação (6).
2. Uma reta e um ponto não contido nela. Digamos

$$r: \quad X = A + tV, \qquad \text{e} \qquad B \notin r.$$

Basta fazer $U = \vec{AB}$ e montar a equação (6) com a informação fornecida do ponto A e do vetor V.

Vetor normal a um plano

Um vetor N (ou reta r de vetor diretor N) é dito normal a um plano π, escreve-se $N \perp \pi$ (ou $r \perp \pi$), quando for ortogonal a esse plano; ou seja,

$$\langle N, X - A \rangle = 0, \qquad \forall X \in \pi, \tag{7}$$

em que $A \in \pi$ é um elemento qualquer do plano fixado a priori (consulte a Figura 12).

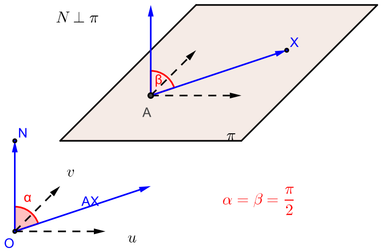

Figura: Vetor normal a um plano.

Cálculo do vetor normal.

Em princípio, a condição $N \perp \pi$ está associada a um conjunto infinito de equações, uma para cada elemento $X \in \pi$, segundo a equação (7); contudo, conhecidos os vetores diretores de π o problema de identificar se N é ou não normal a π reduz-se a checar se N é ou não normal aos vetores diretores de π como descrito na proposição a seguir.

Proposição 6

Considere o plano π que passa pelo ponto $A \in \mathbb{R}^3$ e que possui os vetores diretores U e V (não nulos e não co-lineares). O vetor $N \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ é normal a π se, e somente se, N é normal a U e a V simultaneamente.

Demonstração da Proposição 6.

Da equação vetorial do plano temos $X \in \pi$ se, e somente se, existirem $t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$X = A + t \cdot U + s \cdot V \quad \Leftrightarrow \quad X - A = t \cdot U + s \cdot V.$$

Por outro lado, da equação (7), $N \perp \pi$ se e somente se $\langle N, X - A \rangle = 0$, $\forall X \in \pi$; ou seja,

$$0 = \langle N, X - A \rangle = \langle N, t \cdot U + s \cdot V \rangle = t \langle N, U \rangle + s \langle N, V \rangle, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, quando $N \perp \pi$, fazendo $t = 1$ e $s = 0$ obtém-se $0 = \langle N, U \rangle$, i.e., $N \perp U$; e para $t = 0$ e $s = 1$, $N \perp V$.

Reciprocamente, na hipótese $N \perp U$ e $N \perp V$ tem-se $\langle N, U \rangle = 0 = \langle N, V \rangle$ e, consequentemente

$$\langle N, X - A \rangle = t \langle N, U \rangle + s \langle N, V \rangle = t \cdot 0 + s \cdot 0 = 0, \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\langle N, X - A \rangle = 0, \quad \forall X \in \pi \Leftrightarrow N \perp \pi.$$

□

Equação geral do plano

A equação (7) é conhecida como equação geral do plano que passa por A com vetor normal N.

Teorema 7

Considere o vetor $N = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

a) *O plano π que passa por $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e tem N como vetor normal é o conjunto solução da equação $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$.*

b) *O conjunto solução da equação linear $ax+by+cz = d$ é um plano perpendicular ao vetor N*

$a)$: $N \perp \pi$ sse $\langle N, X-A\rangle = 0$, $\forall X \in \pi$; o que, supondo $X = (x,y,z)$, $N = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ e $A = (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, equivale a

$$\underbrace{\langle (a,b,c),(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\rangle = 0}_{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}, \quad \text{para} \quad (x,y,z) \in \pi.$$

$b)$: seja x_0, y_0, z_0 uma solução qualquer da equação linear em questão. Então,

$ax_0+by_0+cz_0 = d$ assim como $ax+by+cz = d$, $\forall X = (x,y,z)$ solução. Subtraindo

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0) = d-d \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0.$$

Produto exterior (ou vetorial)

A partir da equação geral do plano, $ax+by+cz=d$, pode-se obter facilmente a equação vetorial do mesmo, basta determinar três soluções da equação; ou seja, identificar 3 pontos não co-lineares do plano. A recíproca, i.e., como obter a equação geral a partir da equação vetorial $X=A+tU+sV$, merece uma análise mais detalhada. Precisamos, apenas, identificar um vetor normal N ao plano, pois o ponto A é dado; pra isto basta achar, segundo a Proposição 6, um vetor não nulo N que seja normal a U e a V simultaneamente. Digamos, então, que $U=(u_1,u_2,u_3)$ e $V=(v_1,v_2,v_3)$ são conhecidos e $N=(x,y,z)$ é um vetor não nulo tal que

$$\langle N,U\rangle=0=\langle N,V\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} u_1x+u_2y+u_3z=0 \\ v_1x+v_2y+v_3z=0. \end{cases}$$

Ou seja, o vetor N pode ser escolhido ao longo da reta interseção entre os planos de vetores normais U e V respectivamente (lembre que U e V não são co-lineares) que contem a origem; ou, equivalentemente, $N=(x,y,z)$ é uma solução não trivial de um sistemas com duas equações lineares homogêneo e três variáveis (necessariamente de posto 2 e nulidade 1 -vide o próximo capítulo). Uma dessas soluções é o produto vetorial de U e V, $U\times V$, definido a seguir:

$$U\times V:=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1) \tag{8}$$

Propriedades do produto exterior.

Proposição 8

Dados U e V vetores não co-lineares de $\mathbb{R}^3$ tem-se

1. $U \perp (U \times V)$ e $V \perp (U \times V)$,
2. $V \times U = -(U \times V)$,
3. $\alpha(U \times V) = (\alpha U) \times V = U \times (\alpha V)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $U \times (\alpha U) = O$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
5. $U \times (V + W) = (U \times V) + (U \times W)$, $\forall W \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 11

Determine a equação geral do plano

$$\pi : \qquad X = (0,1,0) + t(1,-1,1) + s(0,-1,1), \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

$$N = (1,-1,1) \times (0,-1,1) = ((-1)1 - 1(-1), 1(0) - 1(1), 1(-1) - (-1)0) = (0,-1,-1).$$

Logo, $(x,y,z) \in \pi$ se, e somente se,

$$0(x-0) + (-1)(y-1) + (-1)(z-0) = 0 \Leftrightarrow -y + 1 - z = 0 \Leftrightarrow y + z = 1.$$

Posição relativa entre planos no $\mathbb{R}^3$.

Considere os planos π_1 e π_2 com equações gerais

$$\langle N_1, X - A\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle N_2, Y - B\rangle = 0,$$

respectivamente, em que $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e $A, B \in \mathbb{R}^3$. Então

- ou os vetores normais são co-lineares, $N_2 = \alpha N_1$ para alguma $\alpha \in \mathbb{R}$,
- ou não são co-lineares.

Se for o caso não co-linear temos planos que se intersectam numa reta; caso contrário, são planos paralelos podendo ainda serem coincidentes ou não dependendo de um dos pontos de π_1, digamos A, ser ou não um elemento do plano π_2; i.e., dependendo de $\langle N_2, A - B\rangle$ ser ou não igual a zero.

Retas no $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

O tratamento vetorial da equação de uma reta, trabalhado na seção 1, independe da dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Basta um ponto em $A \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $V \in \mathbb{R}^n \backslash \{O\}$ para identificarmos a reta r, que passa por A na direção de V, com o conjunto formado de todos os vetores ou $n-$uplas $X \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$X = A + t \cdot V, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, fazendo $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X \in r$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tv_n, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou ainda, pro caso em que $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, $X \in r$ se, e somente se,

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}.$$

Planos no $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

No caso de planos, o tratamento natural em dimensões maiores a três se da via a equação geral; ou seja, usando uma direção normal $N = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ e um ponto $A = (a_1, \ldots, a_n)$ do plano π. Deste modo $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \pi$ se, e somente se,

$$\langle N, X - A \rangle = 0 \Leftrightarrow \nu_1(x_1 - a_1) + \cdots \nu_n(x_n - a_n) = 0.$$

Claro, que para $n = 4$ não bastariam dois vetores diretores para gerar o plano via as operações algébricas de soma e multiplicação (como é caso de um plano em $\mathbb{R}^3$); na verdade seriam necessários três vetores pois uma das variáveis, digamos x_4 passaria a depender de outras três variáveis livres (e não apenas duas como é caso de um plano em $\mathbb{R}^3$): supondo $\nu_4 \neq 0$,

$$\nu_1(x_1 - a_1) + \nu_2(x_2 - a_2) + \nu_3(x_3 - a_3) + \nu_4(x_4 - a_4) = 0 \Leftrightarrow x_4 = d + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i,$$

para certas constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e d. De forma análoga, para $n = 5$ seriam necessários 4 vetores e assim sucessivamente. Voltaremos a este assunto com a teoria de subespaços vetoriais gerados.

Observação 5

Note que um plano em $\mathbb{R}^n$ é o gráfico de uma função (afim) com $n-1$ variáveis; logo, uma hiperfície ($n \geq 4$) (consulte, por exemplo, [4, Cap.V,Sec.13]). Em particular, “os planos"$H_{N,d} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle N, x \rangle = d\}$, em $n \geq 4$, costumam ser chamados de <u>hiperplanos</u>.

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Lages Lima, E. *Curso de Análise. V2.* Terceira edição, IMPA (1989).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).