Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

28 de julho de 2021

Matriz: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Os elementos de uma matriz podem ser números, funções ou ainda outras matrizes. A notação usual para a matriz A de ordem $m \times n$, relativo a m linhas e n colunas, que possui na posição descrita pela linha i e coluna j o elemento a_{ij} é

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo

$B = [3\ 0\ 1]$ representa a matriz chamada B de uma linha e três colunas (ordem 1×3) que possui os elementos $b_{11} = 3$, $b_{12} = 0$ e $b_{13} = 1$.

Exemplo

$C = [0]_{1 \times 1}$ é uma matriz de uma única linha e uma única coluna, com um único elemento: $c_{11} = 0$.

Exemplo

O valor da passagem aérea Rio-São Paulo varia conforme a data e empresa, tempo de antecedência da compra, etc. Foi observado, por exemplo, que o preço médio da passagem em 9 de junho e 2017, para viajar na mesma data, cobrado pelas empresas GOL, Avianca e LATAM foi de R$ 971, R$ 1084 e R$ 1339 respectivamente enquanto que para viajar dois dias depois, no 11 de junho, o valor médio da passagem era de R$ 629, R$ 586 e R$ 1184 respectivamente. Podemos então organizar o preço das passagens numa tabela com duas linhas, uma por data, e três colunas, uma por empresa; ou, equivalentemente, arranjar apenas a informação numérica relevante numa matriz P*:*

Data/Empresa	*GOL*	*Avianca*	*LATAM*
Mesma Data	*R$ 971*	*R$ 1084*	*R$ 1339*
+2 Dias	*R$ 629*	*R$ 586*	*R$ 1184*

$$\longleftrightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 971 & 1084 & 1339 \\ 629 & 586 & 1184 \end{bmatrix}.$$

Assim, por exemplo, o elemento $p_{23} = 1184$ *da matriz* P *representa o preço médio operado pela empresa LATAM, numa passagem Rio-São Paulo para 11 de junho de 2017, a ser negociada com dois dias de antecedência.*

Definição

Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ *são iguais quando* $m = p$, $n = q$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$. *Nesse caso escrevemos* $A = B$.

A matrizes $B = [3\ 0\ 1]$, anterior, é diferente da matriz D do exemplo a seguir

Exemplo

$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *representa uma matriz de ordem* 3×1 *de elementos* $d_{11} = 3$, $d_{21} = 0$ *e* $d_{31} = 1$.

$[3\ 0\ 1] \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pois $1 \times 3 \neq 3 \times 1$ (ordens diferentes).

As matrizes a seguir são iguais:

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 5 & 1 & e^0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & cos(0) & 1 \\ 2 & -3 & sen(0) \end{bmatrix}.$$

Tipos especiais de matrizes:

1. A matriz nula de ordem $m \times n$: $O_{m\times n} = [0]_{m\times n}$.
2. Matriz coluna: aquela que possui uma única coluna (Vide Exemplo 4). Também identificada como um vetor coluna.
3. Matriz linha: aquela que possui uma única linha (Vide Exemplo 1). Também identificada como um vetor linha.
4. Matriz Quadrada: aquela cujo de número de linhas é igual ao número de colunas. Se dito número for n dizemos que possui ordem n no lugar de ordem $n \times n$.Entre as matrizes quadradas podemos identificar as
   - Triangulares superiores: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tais que $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, etc.

Tipos especiais de matrizes (Cont.)

- Triangulares inferiores: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tais que $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, etc.
- Diagonais: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tais que $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Note que toda matriz diagonal é triangular superior e inferior simultaneamente.
- Identidade: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tais que $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ e $a_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Ou seja, a matriz identidade é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal são iguais a um. Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \cdots$$

- Simétricas: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tais que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$. Exemplos: $0_{n\times n}$, I_n, qualquer matriz diagonal, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, etc.

A matriz como um arranjo de vetores

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ arranja em linhas m vetores em $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1(\cdot)} \\ a_{2(\cdot)} \\ \vdots \\ a_{m(\cdot)} \end{bmatrix},$$

em que $a_{1(\cdot)} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $a_{2(\cdot)} = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\cdots$, $a_{m(\cdot)} = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$; assim, A pode ser identificada com um elemento em $\mathbb{R}^{m \cdot n}$.

De forma análoga, A arranja n vetores coluna em $\mathbb{R}^m$: $A = [a_{(\cdot)1}\ a_{(\cdot)2}\ \cdots a_{(\cdot)n}]$, em que

$$a_{(\cdot)1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_{(\cdot)2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad a_{(\cdot)n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

No universo das matrizes, pode-se operar a soma e a multiplicação por escalar de forma razoável gerando uma estrutura algébrica tão bem comportada quanto $\mathbb{R}^n, +, \cdot$. Para tal, seja $M(m,n) := \{A = [a_{ij}]_{m\times n};\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as matrizes com entradas reais e ordem $m \times n$ prefixada. Estabeleceremos uma operação de soma, $+ : M(m,n) \times M(m,n) \longrightarrow M(m,n)$, e uma operação de multiplicação por escalares reais, $\cdot : \mathbb{R} \times M(m,n) \longrightarrow M(m,n)$, que coincide exatamente com as operações correspondentes em $\mathbb{R}^n$ para o caso $M(1,n)$.

Dadas as matrizes de números reais e da mesma ordem $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ define-se a matriz soma como sendo

$$A + B = [c_{ij}]_{m\times n}; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i,j.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1+0 \\ 3+0 & 0+0 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Também no universo das matrizes reais de ordem fixada $m \times n$ define-se a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo

$$2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad -1\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades de $M(m,n),+,\cdot$:

Proposition

Dadas as matrizes de números reais e da mesma ordem $m \times n$ e os números reais α e β valem as seguintes propriedades

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. $A+0=A$
4. $A+(-1)A=0$
5. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
6. $1\cdot A=A$
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$

Observação

A proposição acima diz que o conjunto $M(m,n)$ munido das operações soma $(+)$ e multiplicação por escalar $(\cdot)$ é um espaço vetorial (real).

Transposição de matrizes

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ podemos obter outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}\ \forall i,j$. A^T, assim definida, é chamada transposta de A (também denotada A').

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition

Dados $A_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha B)^T = \alpha B^T$
4. *A é simétrica se, e somente se, $A^T = A$.*

Produto de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{st}]_{n\times q}$ matrizes de números reais. Define-se o produto AB como sendo a matriz $C = [c_{it}]_{m\times q}$ em que para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ e cada $t \in \{1,\ldots,q\}$, c_{it} é o produto interno dos vetores representados na linha i de A e na coluna t de B:

$$c_{it} = \left\langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)t})^T \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kt}.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) & 1\cdot 3 - 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 0\cdot 3 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Note que o número de colunas da matriz à esquerda do produto precisa coincidir com o número de linhas da matriz à direita do produto para que a multiplicação faça sentido.

Propriedades da multiplicação de matrizes.

Proposition

Sejam A, B e C matrizes de números reais. Então (desde que executável cada multiplicação descrita)

1. $AI = A = IA$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $(A+B)C = AC + BC$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $OA = O$ e $AO = O$

Observação

A operação de multiplicação de matrizes não é comutativa.

Exemplo relativo ao preço de passagens aéreas

Seja P a matriz do Exemplo 3 relativo ao preço de passagens aéreas e $Q = \frac{1}{3}(1,1,1)^T$. Então,

$$PQ = \begin{bmatrix} 971 & 1084 & 1339 \\ 629 & 586 & 1184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (971+1084+1339)/3 \\ (629+586+1184)/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1131.33 \\ 799,66 \end{bmatrix},$$

ou seja, o produto PQ calcula a média do preço das passagens da GOL, Avianca e LATAM:

- comprando na mesma data do voo (R$ 1131.33 na primeira linha de PQ)
- ou comprando com dois dias de antecedência (R$ 799,66 na segunda linha de PQ).

Traço

Dada a matriz quadrada de números reais (ou complexos) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ define-se Traço$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + c_{nn}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz. O traço também é denotado por tr.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *então* $tr(A) = 1 + 0 = 1$.

Proposition

Dadas as matrizes quadradas A e B e o escalar α *(real ou complexo)*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
3. $tr(A^T) = tr(A)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$ *quando* A *e* B^T *possuem a mesma ordem.*

Exemplo

Considere o problema de achar dois números reais x e y para os quais

$$x+2y=0 \qquad \text{e} \qquad 2x+y=0,$$

isto é, achar um par ordenado $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que satisfaz simultaneamente as equações acima.

Dito problema é um caso particular de sistema de equações lineares:

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}$$

Aqui, $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, são chamados <u>coeficientes</u>; b_j, <u>termos independentes</u>; x_i, <u>variáveis</u> ou incógnitas; m, número total de equações; e n, número total de variáveis.

Substituição e eliminação

Voltando ao caso particular do sistema descrito em 10, da primeira equação $x = -2y$ e substituindo na segunda equação obtemos

$$2(-2y) + y = 0 \Leftrightarrow -4y + y = 0 \Leftrightarrow -3y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Consequentemente, $x = -2y = -2(0) = 0$. Obtendo $x = 0$ e $y = 0$ como as únicas soluções possíveis do problema.

Observação

O método empregado é chamado substituição e pressupõe a possibilidade de obter uma variável em função das outras para substituí-la nas equações restantes diminuindo a dimensão do problema.

Uma ideia similar e passível de ser aplicada é a eliminação de variáveis. Por exemplo, no problema em questão (10) podemos multiplicar a primeira equação por 2 e subtrair-la da segunda:

$$\begin{cases} x + 2y = 0, & (\times 2) \\ 2x + y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x + 4y = 0, \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 2x - 2x + y - 4y = -3y.$$

Assim, ficamos com o sistema de solução trivial

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ \quad -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 0 \quad (\Rightarrow x = 0).$$

Exemplo

Suponhamos agora que o sistema seja

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ 2x+6y=2. \end{cases}$$

Solução (Eliminação)

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ 2x+6y=2 \end{cases} \overbrace{\equiv}^{l_2:=l_2-2l_1} \begin{cases} x+3y=1, \\ 0x+0y=0 \end{cases} \equiv x+3y=1.$$

Logo, todos o pares ordenados da forma $(1-3y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, são soluções.

Neste caso temos um número infinito de pares de números reais que satisfazem o sistema de equações lineares: dizemos que é compatível (ou <u>possível</u>) <u>indeterminado</u>. No caso anterior, ou seja quando o sistema possui uma única solução dizemos tratar-se de um sistema de equações lineares compatível (ou <u>possível</u>) <u>determinado</u>.

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=3. \end{cases}$$

Solução (Eliminação)

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=3 \end{cases} \overbrace{\equiv}^{l_2:=l_2-2l_1} \begin{cases} x+y=1, \\ 0x+0y=1 \end{cases} \Longrightarrow 0=1.$$

Logo, não possui solução.

Observação

O sistema é classificado como <u>incompatível</u> ou impossível quando não tem solução, que é o caso deste exemplo.

Questões essenciais sobre SEL

Assim, dado um sistema de equações lineares estaremos interessados nas seguintes questões:

1. Possui solução?
2. Quantas soluções possui?
3. Existe algoritmo eficiente para calcular as soluções?

A resposta a estas questões pode ser achada no Método de Eliminação Gaussiana.

Note que se arranjamos os coeficientes dos sistemas de equações lineares 10, 11 e 12 como equações matriciais obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

No caso geral, o sistema pode ser descrito na forma

$$Ax = b,$$

onde

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou seja, A é a matriz de coeficientes com m linhas, uma para cada equação, e n colunas, uma para cada variável; x é o vetor (coluna) de variáveis e b é o vetor de termos independentes.

Matriz ampliada

Note ainda que adicionando o vetor de termos independente à matriz de coeficientes obtemos uma matriz ampliada que carateriza o sistema de equações lineares $Ax = b$:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Nos exemplos anteriores temos as matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

respectivamente.

Observe agora o efeito da eliminação, efetuada para resolver cada um dos sistemas, sobre a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{3}$$

As matrizes “reduzidas"ficam triangulares superiores.

O processo de eliminação Gaussiana é um algoritmo para reduzir a matriz via operações elementares em matrizes linha-equivalentes (em que os sistemas resultantes possuem as mesmas soluções).

Operações elementares e forma escada

As operações consideradas elementares (e que não alteram a solução do sistema) são:

(i) permutação de duas linhas,

(ii) modificação de uma linha pela adição de um múltiplo não nulo de outra linha; e

(iii) multiplicação de uma linha por um real não nulo.

O processo de eliminação termina quando a matriz está na forma escalonada (ou escada):

(S_1) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos seus outros elementos abaixo desse iguais a zero.

(S_2) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(S_3) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ (forma escada).

Variações da forma escada

Observação

Dependendo da bibliografia, a definição de matriz reduzida à forma escada (vide, por exemplo, [1, 2.4.1]) pode incluir a condição:
(a) o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

E também pode incluir a seguinte alteração de (S_1):
(b) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos seus outros elementos iguais a zero.

Estas alterações são perfeitamente admissíveis com o uso de ferramentas computacionais; porém, podem ser inconvenientes quando o cálculo é feito manualmente. Da mesma forma, o relaxamento das condições exclui a unicidade da linha-equivalência de uma matriz qualquer à uma matriz linha-reduzida à forma escada (Vide [1, 2.4.3]).

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *não está na forma escada pois não verifica* (S_3).

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *está na forma escada.*

Observação

Como a matriz escada é uma matriz triangular superior se o sistema tiver solução única ela será obtida trivialmente a partir do sistema equivalente escalonado.

Definição (Posto e nulidade)

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ uma matriz linha-equivalente a A e reduzida à forma escada. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n-p$.

O posto de uma matriz coincide com o total de vetores linha da matriz que não resultam dos outros vetores linha via operações de soma e multiplicação por escalar (operações lineares); em particular, se o posto for máximo (m, em que m é o número de linhas da matriz) nenhuma linha decorre linearmente das outras e, se não for máximo então alguma linha decorre linearmente das outras. Estes conceitos são conhecido como <u>independência</u> e <u>dependência linear</u>.

No caso particular da matriz ampliada $[A|b]$ associada ao sistema de equações lineares $A_{m\times n}x = b$, o posto de $[A|b]$ corresponde ao número de equações essenciais (não redundantes) do sistema enquanto que a nulidade fornece a diferença entre o número de variáveis do sistema e o número de equações essenciais do mesmo.

Voltando aos exemplos temos, das equações (1)-(3), que

$$Exp.10: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \qquad posto(A) = 2, \quad posto[A \mid b] = 2, \quad nulidade(A) = 0.$$

$$Exp.11: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad posto(A) = 1, \quad posto[A \mid b] = 1, \quad nulidade(A) = 1.$$

$$Exp.12: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad posto(A) = 1, \quad posto[A \mid b] = 2.$$

Observação

Nos exemplos 10 e 11 o posto de A coincide com o posto de $[A \mid b]$ e, como já observamos, são sistemas compatíveis. No exemplo (12) o posto de A é diferente do posto de $[A \mid b]$ e estamos no caso de um sistema incompatível.

Observação

Nos sistemas compatíveis 10 e 11 também observamos outra coincidência. No exemplo 10 a nulidade é zero coincidindo com unicidade da solução e no exemplo 11 a nulidade é positiva sendo um sistema indeterminado.

Classificação de SEL via posto e nulidade

Teorema

O sistema de equações lineares $Ax = b$ é compatível se e somente se $posto(A) = posto[A \mid b]$. Mais ainda, no caso compatível há uma única solução se e somente se $nulidade(A) = 0$.

Demonstração

Caso $posto(A) \neq posto[A \mid b]$, o sistema equivalente possui (ao menos) uma equação do tipo $0 = \tilde{b}_j \neq 0$; o que corresponde à incompatibilidade de sistema; caso contrário, a nulidade descreve o número de variáveis necessárias (e suficientes) para descrever (linearmente) o conjunto solução do sistema e, obviamente, mesmo que seja apenas uma, o conjunto solução seria infinito (uma solução para cada número real). □

Exemplo

Resolva

$$\begin{cases} x-3y+6z=-1 \\ 2x-5y+10z=0 \\ 3x-8y+17z=1. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} l_2 := l_2 - 2l_1 \\ l_3 := l_3 - 3l_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$l_3 := l_3 - l_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Então o posto de A é igual ao posto de $[A \mid b]$ e igual a 3 e o sistema é compatível. Além disso, a nulidade de A é zero garantindo que o sistema é determinado.

Para obtermos a solução: de l_3, $z=2$; substituindo em l_2 obtemos $y-2(2)=2$, logo, $y=2+4=6$; e, de l_1,

$$x-3y+6z=-1 \Rightarrow x-3(6)+6(2)=-1 \Rightarrow x=-1+6=5.$$

Exemplo

Resolva

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad l_2 := l_2 - l_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad posto(A) = 2 = posto[A \mid b] \qquad nulidade(A) = 3-2 = 1.$$

Então o sistema é compatível indeterminado. Para obtermos a solução note que de l_2 na matriz linha-equivalente reduzida concluímos $z=0$. Substituindo em l_1 obtemos $x+y=0$, i.e., $y=-x$. Logo, o conjunto solução é

$$\{(x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$Ax = 0$

Considere o caso em que o termo independente b é uma matriz coluna nula: $Ax = 0$. Então, a primeira observação imediata a ser feita é que a escolha trivial $x_i = 0, \forall i$, é sempre solução do sistema; ou seja, os sistemas lineares homogêneos sempre são possíveis.

Isto também decorre do Teorema acima, que carateriza os sistemas lineares, posto que a matriz ampliada $[A|0]$ não permite alterações na última coluna (nula) via operações elementares e, consequentemente, $posto[A|b] = posto(A)$.

Quanto ao conjunto solução ser indeterminado ao não, dependerá da nulidade da matriz A.

No caso do Exemplo 10 temos um sistema homogêneo com a solução trivial $x = 0 = y$ (determinado).

Influência de $Ax = 0$ em $Ax = b$.

Se considerarmos a parte homogênea do sistema no Exemplo 11

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 2x + 6y = 0; \end{cases}$$

obtém-se a matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right]$ que, via operação elementar $l_2 := l_2 - 2l_1$, reduz-se à matriz linha equivalente escalonada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$posto(A) = 1 = posto[A|0]$ e $nulidade(A) = 1$; assim, o sistema é possível e indeterminado e com uma variável, digamos y, descreve-se todo o conjunto solução:

$$S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -3y,\ y \in \mathbb{R}\} = \{(-3y, y);\ y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot (-3, 1);\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que o conjunto solução, S_b, do Exemplo 11, não-homogêneo, mas do qual tiramos a parte homogênea para ilustrar, verifica

$$S_b = \{(1 - 3y, y);\ y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0) + y(-3, 1)\} = (1, 0) + S_0.$$

Influência de $Ax = 0$ em $Ax = b$ (Cont.)

Ou seja, a solução do sistema não homogêneo é a translação da solução do homogêneo por uma solução particular (específica qualquer) do não homogêneo, no caso escolhemos $(\overline{x}, \overline{y}) = (1, 0)$.

Teorema

Suponha que o sistema $Ax = b$ possui solução, que $\overline{x}$ é uma das soluções e que S_b representa o conjunto solução desse sistema. Então, $S_b = \overline{x} + S_0$ em que S_0 é o conjunto solução da parte homogênea $Ax = 0$.

Demonstração

Temos $A\overline{x} = b$ e, supondo que $x \in S_b$, também $Ax = b$; logo,

$$Ax - A\overline{x} = b - b \Leftrightarrow A(x - \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow x - \overline{x} \in S_0 \Leftrightarrow x \in \overline{x} + S_0.$$

$\square$

Considere o modelo simples de renda nacional:

$$Y = C + I + G \qquad \text{e} \qquad C = a + bY$$

em que Y é a renda (agregada) ou produto nacional, C é o consumo (agregado), I representa o investimento e G os gastos do governo; o parâmetro a é a parte autônoma do consumo (parcela que não depende da renda) e o parâmetro b é a fração da renda que é gasta no consumo (ou a propensão marginal a consumir, $0 < b < 1$).

Questão

Supondo I, G, a e b dados, mostre que o modelo pode ser descrito na forma matricial $Ax = d$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = \begin{bmatrix} I+G \\ a \end{bmatrix}.$$

Mostre que o sistema possui solução única e resolva o modelo para obter Y e C em função dos dados do problema.

Solução do modelo simples de renda nacional

Para checar a representação matricial basta efetuar o produto Ax e comparar e igualar a d:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - C \\ -bY + C \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} d = \begin{bmatrix} I + G \\ a \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = I + G \\ -bY + C = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} Y = C + I + G \\ C = a + bY. \end{cases}$$

Note agora que a matriz ampliada possui posto máximo 2, assim como A:

$$[A|d] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & I+G \\ -b & 1 & a \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & I+G \\ 0 & 1-b & a + b(I+G) \end{array}\right], \quad 1 - b \neq 0.$$

Logo, a nulidade é zero e o sistema possui solução única:

$$C^* = \frac{a + b(I+G)}{1-b} \quad \text{e} \quad Y^* = C^* + (I+G) = \frac{a + I + G}{1-b}.$$

Variações do modelo

Questão

Considere a seguinte variante do modelo simples de renda nacional que inclui imposto sobre a renda:

$$Y = C + I_0 + G_0, \qquad C = a + b(Y - T) \qquad \text{e} \qquad T = d + tY$$

em que C é o consumo (agregado) como função da renda descontado o imposto T, I_0 representa o investimento e G_0 os gastos do governo; o parâmetro $d > 0$ é o imposto fixo (independente da renda) e t é a taxa de imposto sobre a renda, $0 < t < 1$. Descreva o modelo no formato matricial e determine, se possível, as variáveis endógenas Y, C e T em função das exógenas I_0, G_0 e dos parâmetros a, b, d e t do modelo.

Questão

Considere a variante do modelo Keynesiano simples de renda nacional em que o governo gasta uma fração da renda:

$$Y = C + I_0 + G, \qquad C = a + b(Y - T_0) \qquad \text{e} \qquad G = gY$$

em que T_0 é um imposto sobre a renda (exógeno) e g é a fração da renda gasta pelo governo $(0 < g < 1)$. Descreva o modelo no formato matricial e determine, se possível, as variáveis endógenas Y, C e G em função das exógenas I_0, T_0 e dos parâmetros a, b e g do modelo.

Considere um mercado com três mercadorias em que a demanda de cada uma delas leve em conta não apenas o efeito do seu próprio preço mas também os preços das outras duas mercadorias relacionadas: $Q_{d_i} = Q_{d_i}(P_1, P_2, P_3)$, $i = 1, 2, 3$.

Suponha, analogamente, que as funções de oferta $Q_{s_i} = Q_{s_i}(P_1, P_2, P_3)$, $i = 1, 2, 3$, também possam levar em conta o preço de outras mercadorias.

A questão então é sobre a existência ou não de um vetor de preços $P = (P_1, P_2, P_3)$ que deixe o mercado em equilíbrio; ou seja, que iguale oferta e demanda por cada mercadoria: $Q_{d_i} = Q_{s_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Quando ditas funções são afins, o problema pode ser reduzido ao estudo de um sistema de equações lineares

Questão

Determine se há ou não equilíbrio de mercado e o vetor de preços no caso a seguir:

$$Q_{d_1} = 10 - 2P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_1} = -2 + 3P_1 - P_3; \qquad Q_{d_2} = 14 + P_1 - P_2 - P_3, \quad Q_{s_2} = -1 + 2P_2$$

e

$$Q_{d_3} = 20 - P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_3} = -4 - P_1 - P_2 + 3P_3.$$

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Lages Lima, E. *Curso de Análise. V2.* Terceira edição, IMPA (1989).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).