DETERMINANTE.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

2 de agosto de 2021

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de números reais. O número real $Det(A)$, determinante de A (também denotado $|A|$), pode ser definido recursivamente:

- se $n = 1$, $Det(A) = a_{11}$.
- Se $n > 1$ então $Det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$, para um i qualquer fixado, onde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}Det(A_{ij})$ e A_{ij} é a submatriz quadrada de ordem $n-1$ obtida de A suprimindo a lina i e a coluna j.

O número Δ_{ij} é chamado cofator de a_{ij}.

A independência do valor do determinante em função da linha escolhida nesta definição recursiva, e inclusive a possibilidade de obter o mesmo valor fixada uma coluna j, é conhecido como desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante e segue da definição formal (atribuída a Leibniz) de determinante:

$$det(A) = \sum_{\rho} (-1)^{J_\rho} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

em que $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ representa uma permutação dos n naturais $1, 2, \ldots, n$, indexada por ρ, J_ρ conta o número de inversões de ordens nessa permutação e o somatório percorre todas as $n!$ permutações possíveis[1].

[1] Para uma discussão histórica sobre o surgimento de tais definições, assim como as definições em si, pode-se consultar [1, Cap.3]

Partindo da definição recursiva e fixando a linha um tem-se, para ordem 2,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|[a_{22}]| + a_{12}(-1)^{1+2}|[a_{21}]| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Note que $Det(A_{2\times 2})$ é um somatório com dois termos, e que cada termo desse somatório é o produto de dois elementos da matriz: um de cada linha e um de cada coluna, sem repetição.

Fixada a escolha por linhas em ordem ascendente $(1\ 2)$, no primeiro termo encontramos a escolha coluna 1 e coluna 2 respectivamente, o que corresponde à ordem natural $\rho_1 = (1\ 2)$ e, no segundo termo, encontramos a escolha coluna 2 e coluna 1 respectivamente, que indica uma inversão da ordem natural $\rho_2 = (2\ 1)$. O sinal negativo desse segundo termo está associado a esta inversão de ordem.

Da decomposição de Laplace à fórmula de Leibniz

Definição 1

À disposição dos primeiro n naturais $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *em determinada ordem* $\rho = (j_1\ j_2\ \cdots j_n)$, $j_i \in \{1, 2, \ldots n\}$, $j_i \neq j_k\ \forall i \neq k$, *é chamada de permutação e o número* J_ρ *de inversões da ordem natural nessa permutação define a paridade da mesma: ou* $(-1)^{J_\rho} = 1$ *ou* $(-1)^{J_\rho} = -1$ *dependendo de* J_ρ *ser par ou ímpar respectivamente.*

Voltando ao caso $n = 2$, temos, obviamente, apenas duas permutações possíveis: $(1\ 2)$ que é par e $(2\ 1)$ que é ímpar e, na fórmula do determinante,

$$Det(A_{2\times 2}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)^{\overbrace{J_{\rho_1}}^{0}} a_{11}a_{22} + (-1)^{\overbrace{J_{\rho_2}}^{1}} a_{12}a_{21}.$$

Definição geral (Leibniz) no caso $n = 3$

Vejamos ainda o caso da matriz A ser de ordem 3. São $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,! = 6$ formas possíveis de ordenar os naturais $1,\ 2,\ 3$ com três permutações pares e três ímpares como mostra a tabela 1 a seguir:

ρ	J_ρ	$(-1)^{J_\rho}$
$(1\ 2\ 3)$	0	1
$(2\ 3\ 1)$	2	1
$(3\ 1\ 2)$	2	1
$(3\ 2\ 1)$	3	-1
$(1\ 3\ 2)$	1	-1
$(2\ 1\ 3)$	1	-1

Tabela: Permutações de $(1\ 2\ 3)$.

Logo, a definição formal (de Leibniz) do determinante nos leva à fórmula

$$Det(A_{3\times 3}) = \sum_{\rho} (-1)^{J_\rho} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Da fórmula de Leibniz à decomposição de Laplace

Se tiramos em evidência os elementos da linha um, por exemplo, obtemos a fórmula equivalente a seguir que corresponde à decomposição de Laplace para o cálculo do determinante pela linha um.

$$\begin{aligned} Det(A_{3\times 3}) &= a_{11}\underbrace{(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})}_{\Delta_{11}} - a_{12}\underbrace{(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})}_{-\Delta_{12}} + a_{13}\underbrace{(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})}_{\Delta_{13}} \\ &= a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+a_{13}\Delta_{13}. \end{aligned}$$

De fato,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12} & \cancel{a}_{13} \\ \cancel{a}_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a}_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \Delta_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32};$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12} & \cancel{a}_{13} \\ a_{21} & \cancel{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a}_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \Delta_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31});$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12} & \cancel{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \implies \Delta_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}.$$

De forma análoga, a decomposição de Laplace pode ser provada fixando qualquer outra linha ou coluna da matriz.

Teorema 1

Dada a matriz quadrada A, ordem n, de números reais tem-se

$$Det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

e também,

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Definição 2 (Adjunta)

A matriz $\overline{A} = [\Delta_{ij}]_{n\times n}$ *é chamada matriz de cofatores de A e sua transposta, adjunta de A, i.e.,*

$$Adj(A) = (\overline{A})^T.$$

Por exemplo: $Adj\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$

Proposition 1

$det(A) = det(A^T)$.

O essencial é percorrer todas as $n\,!$ permutações possíveis dos n primeiros naturais, levando em conta a paridade de cada, de modo a escolher um elemento de cada linha e de cada coluna para formar cada produto de n elementos de todas as formas possíveis. □

Proposition 2

Se A possui uma linha (ou coluna) nula então $det(A) = 0$.

Todo termo do somatório é uma produtória e em cada um deles aparece um elemento da tal lina (ou coluna); logo, cada produto é zero e, consequentemente, o somatório é igual a zero. □

Proposition 3

Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de A por uma constante, o determinante fica multiplicado por dita constante.

Em cada termo do somatório aparece a constante, que pode assim ser colocada em evidência. □

Proposition 4

A permutação de duas linhas (ou colunas) de A troca o sinal do determinante.

Suponha que $\tilde{A}$ foi obtida de A permutando as linhas i e i', então aplicando Laplace sobre a linha i' de $\tilde{A}$ obtém-se, assumindo $i' = i+1$ para simplificar,

$$\begin{aligned} Det(\tilde{A}) &= \sum_j \tilde{a}_{i'j}\tilde{\Delta}_{i'j} = \sum_j a_{ij}(-1)^{i'+j}|\tilde{A}_{i'j}|, \quad \text{com } |\tilde{A}_{i'j}| = |A_{ij}| \\ &= \sum_j a_{ij}(-1)^{i+1+j}|A_{ij}| = -1\sum_j a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}| = -Det(A). \end{aligned}$$

□

Proposition 5

O determinante de uma matriz com duas linhas iguais é zero.

Sejam i e i' as linhas idênticas de A. Então, se $\tilde{A}$ representa a matriz obtida de A pela permutação dessas duas linhas temos $Det(A) = Det(\tilde{A})$, pois $\tilde{A} = A$; e também $Det(\tilde{A}) = -Det(A)$, causa da permutação. Logo, $Det(A) = -Det(A)$ e, consequentemente, $Det(A) = 0$. □

Proposition 6

Sejam A, B e C matrizes quadradas idênticas, a menos a $i-$ésima linha; ou seja, se $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ então $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ e $C=[c_{ij}]_{n\times n}$ verificam $b_{kj}=c_{kj}=a_{kj}$ para todo k e j com $k\neq i$. Se a linha i de C for a soma da linha i de A com a linha i de B, i.e., $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $j=1,2,\ldots,n$, então $Det(C)=Det(A)+Det(B)$.

Ou seja

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_{i1}+b_{i1}) & (a_{i2}+b_{i2}) & \cdots & (a_{in}+b_{in}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} Det(C) &= \sum_{\rho}(-1)^{J_\rho} c_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots c_{nj_n} = \sum_{\rho}(-1)^{J_\rho} a_{1j_1}\cdots (a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \underbrace{\sum_{\rho}(-1)^{J_\rho} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}}_{Det(A)} + \underbrace{\sum_{\rho}(-1)^{J_\rho} a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}}_{Det(B)}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 7

O determinante não se altera se adicionarmos a uma linha um múltiplo de outra linha.

Suponha que a linha j de A foi modificada pela adição do múltiplo escalar c da linha i, $i \neq j$, obtendo-se a matriz modificada $\tilde{A}$. Então,

$$Det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{j()} + c \cdot a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{j()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ c \cdot a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} = Det(A) + c \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix}}_{0} = Det(A).$$

Aqui a primeira igualdade decorre da Proposição 6; a segunda, da Proposição 3; e a terceira, da Proposição 5. □

Proposition 8

Se B é uma matriz quadrada da mesma ordem de A então $det(AB) = det(A)det(B)$.

Pela generalização da propriedade anterior

$$\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+A(-I) & 0+AB \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Aqui a última igualdade decorre da própria definição formal pois nas permutações que incluem elementos de $-I$ sempre há elementos do bloco complementar nulo 0. □

Proposition 9

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

No somatório da definição formal apenas uma permutação poderá conter elementos diferentes de zero: $(1\ 2\ \cdots\ n)$. □

Proposition 10

$A\cdot\ adj(A) = det(A)\cdot\ I.$

Note que o elemento no posição *ii* da matriz produto coincide com

$$a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = Det(A), \qquad \text{Laplace}$$

Fixemos agora a posição *ij*, com $i \neq j$, na matriz produto:

$$a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

em que a igualdade acima decorre do desenvolvimento de Laplace pela linha j e o determinante é zero causa da linha j coincidir com a linha i. □

As operações elementares sobre uma matriz quadrada podem alterar o sinal do determinante, no caso uma permutação de duas linas, ou multiplicar a determinante por uma constante não nula, caso seja usada dita constante para multiplicar uma linha (somar a uma linha um múltiplo não nulo de uma outra linha não altera o determinante); com isto, o processo de eliminação poderia ser aproveitado para calcular o determinante da matriz desde que mantida a "memória"do processo.

Teorema 2

Se A é uma matriz quadrada de números reais, linha equivalente a B, então existe $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$Det(A) = k \cdot Det(B).$$

De fato, se e B resulta de A após p permutações de linhas, m multiplicações de linhas por constantes não nulas k_1, k_2, ..., k_m, e um certo número de adições de linhas a outras linhas obtém-se

$$Det(B) = \underbrace{(-1)^p k_1 \cdot k_2 \cdots k_m}_{k \neq 0} \cdot Det(A) = k \cdot Det(A).$$

. $\square$

Corolário 3

Se a matriz quadrada A, de números reais, possui B como matriz linha-reduzida à forma escada então existe $c \neq 0$ tal que $Det(A) = c \cdot Det(B)$.

Sendo B linha-reduzida à forma escada, de A, B é linha-equivalente a A e, pelo Teorema 2, existe $k \neq 0$ tal que $Det(B) = k \cdot Det(A)$; assim, basta escolher $c = 1/k$ para obter o resultado desejado. □

Corolário 4

Se a matriz quadrada A, de números reais e ordem n, possui $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ como matriz linha-reduzida à forma escada então existe $c \neq 0$ tal que

$$Det(A) = c \cdot \Pi_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

Aplique o Corolário anterior para obter uma constante $c \neq 0$ tal que $Det(A) = cDet(B)$ e observe então que o determinante de B é o produto dos elementos da diagonal principal posto que sendo reduzida à forma escada é uma matriz triangular superior (vide a Proposição 9). □

Posto máximo em matrizes quadradas

Corolário 5

A matriz $A_{n\times n}$ possui posto máximo, n, se e somente se $Det(A) \neq 0$.

Seja $B_{n\times n}$ a matriz escalonada, linha-equivalente, obtida de A pelo processo de Eliminação Gaussiana. Então, o posto de A é o número de linhas não nulas de B e, pelo Corolário 4, existe $c \neq 0$ tal que

$$Det(A) = c \cdot \Pi_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

Logo, $Det(A) \neq 0$ se e somente se $b_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots n$; ou seja, se e somente se todas as linhas de B são não nulas o que, por sua vez, significa que o posto de A é exatamente n. □

Definição 3

As matrizes quadradas com determinante diferente de zero são ditas não-singulares enquanto que as que possuem determinante igual a zero são chamadas matrizes singulares.

Posto=Maior ordem dentre as submatrizes não-singulares

Este resultado relacionando posto com determinante pode ser generalizado para matrizes de qualquer ordem da seguinte forma.

Teorema 6

O posto da matriz $A_{m\times n}$ é a maior ordem dentre as submatrizes de A com determinante não nulo.

Exemplo 1

Classifique o sistema de equações lineares a seguir, sem resolvê-lo

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -2x+y+z=0 \\ 6x-3y-3z=-1. \end{cases}$$

Classificando sem resolver

Neste caso, a matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ não é de posto máximo, 3, pois seu determinante é zero (note que a linha 3 é múltiplo da linha 2).

Por outro lado, A possui ao menos a submatriz quadrada de ordem 2, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, com determinante não nulo. Assim, o posto de A é igual a dois.

Obviamente, o posto de $[A|b]$ é igual ou maior do que dois. No caso,

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2-3+0+3-0+3 = 1 \neq 0.$$

Ou seja, admite ao menos uma submatriz quadrada não singular de ordem três. Consequentemente, o posto da matriz ampliada é três, diferente do posto de A, e o sistema é impossível.

Uma das aplicações do determinante se dá no cálculo de área de paralelogramos e no cálculo de volume de paralelepípedos.

Por exemplo, um retângulo de lados a e b, em $\mathbb{R}^2$, é um paralelogramo retângulo gerado pelos vetores $v_1 = (a,0)$ e $v_2 = (0,b)$; colocando estes vetores na sua ordem por linhas obtém-se uma matriz $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab;$$

ou seja, o determinante de A coincide com a área do retângulo em questão.

Obviamente, os vetores permutados v_2, v_1 geram o mesmo retângulo; porém o determinante da matriz correspondente é $-ab$; ou seja, o valor da área com sinal trocado; desse modo, é o valor absoluto do $Det(A)$ que coincide com a área do paralelogramo em questão.

E se o paralelogramo não for retângulo?

Definição 4 (Matriz de Gram)

Dados os vetores v_1, v_2, ..., v_n, em $\mathbb{R}^n$, a matriz de Gram associada é a matriz quadrada $G = G(v_1, \ldots, v_n) = [g_{ij}]_{n\times n}$ em que $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Por exemplo, para dois e três vetores respectivamente tem-se

$$G(v_1,v_2) = \begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(v_1,v_2,v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \langle v_1,v_3\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \langle v_2,v_3\rangle \\ \langle v_3,v_1\rangle & \langle v_3,v_2\rangle & \langle v_3,v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Proposition 11

A matriz de Gram é simétrica.

Note que $g_{ji} = \langle v_j, v_i \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = g_{ij}$, $\forall i,j$, pois o produto interno (real) é simétrico. □

Proposition 12

Se A é a matriz quadrada de ordem n que tem nas suas linhas os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, *respeitando a ordem, então a matriz de Gram associada, G, verifica*

$$G = A \cdot A^T.$$

De fato, o elemento na posição ij da matriz produto $A \cdot A^T$ é, por definição, o produto interno da linha i da A (no caso o vetor v_i) com a coluna j de A^T (no caso o vetor v_j). □

Corolário 7

Se A é a matriz quadrada de ordem n que tem nas suas linhas os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, *respeitando a ordem, então a matriz de Gram associada, G, verifica*

$$Det(G) = [Det(A)]^2.$$

Em particular,

$$Det(G) \geq 0; \quad Det(G) = 0 \Leftrightarrow Det(A) = 0; \quad \text{e} \quad \sqrt{Det(G)} = |Det(A)|.$$

Demonstração: Sabe-se, da Proposição 12, que $G = AA^T$. Então,

$$Det(G) = Det(AA^T) = Det(A)Det(A^T) = Det(A)Det(A) = Det^2(A) \geq 0.$$

□

Corolário 8

Seja G a matriz de Gram associada aos vetores $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^2$. Então, $Det(G) = 0$ se, e somente se, v_1 e v_2 são co-lineares.

Demonstração: Note que $v_2 = \alpha v_1$ se, e somente se,

$$0 = \alpha v_1 + (-1)v_2 = \underbrace{[v_1\ v_2]}_{A^T} \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

o sistema $A^T x = 0$ admite solução não nula; ou seja, $Det(A^T) = 0$. Lembrando que $Det(A) = Det(A^T)$ e que $Det(G) = 0$ se, e somente se, $Det(A) = 0$ conclui-se que v_1 e v_2 são co-lineares se, e somente se, $Det(G) = 0$. □

Corolário 9

Seja G a matriz de Gram associada aos vetores $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$. Então, $Det(G) = 0$ se, e somente se, v_1, v_2 e v_3 são co-planares.

Demonstração: Suponha que os vetores sejam co-planares de modo que um deles, digamos v_3, esteja no plano gerado pelos outros dois vetores: $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$, para certas escolhas de α e β em $\mathbb{R}$. Então,

$$0 = \alpha v_1 + \beta v_2 + (-1)v_3 = \underbrace{[v_1\ v_2\ v_3]}_{A^T} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siga então o mesmo raciocínio da demonstração anterior para concluir que $Det(A) = 0$ e, assim, $Det(G) = 0$. □

Área do paralelogramo

Teorema 10

Sejam v_1 e v_2, vetores não co-lineares em $\mathbb{R}^2$ e G, a matriz de Gram associada. Então, $\sqrt{Det(G)}$ é igual a área do paralelogramo de lados v_1 e v_2.

Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2. Então, $\langle v_1, v_2\rangle = ||v_1|| \cdot ||v_2|| cos(\theta)$ e

$$G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ||v_1||^2 & ||v_1|| \cdot ||v_2|| cos(\theta) \\ ||v_1|| \cdot ||v_2|| cos(\theta) & ||v_2||^2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Det(G) = ||v_1||^2 ||v_2||^2 - (||v_1|| \cdot ||v_2|| cos(\theta))^2 = ||v_1||^2 ||v_2||^2 (1 - cos^2(\theta)) = ||v_1||^2 ||v_2||^2 sen^2(\theta).$$

Assim,

$$\sqrt{Det(G)} = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \cdot |sen(\theta)| = ||v_1|| \left(\underbrace{||v_2|| sen(\theta)}_{h} \right)$$

é exatamente a área do retângulo da base $||v_1||$ e altura $h = ||v_2|| sen(\theta)$, que coincide com a área do paralelogramo de lados v_1 e v_2 (consulte a Figura 1).

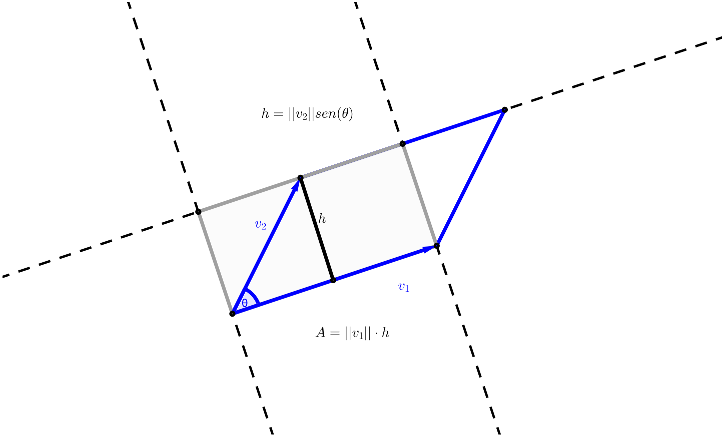

Figura: Área do paralelogramo.

Volume do paralelepípedo

Teorema 11

Sejam v_1, v_2 e v_3, vetores não co-planares em $\mathbb{R}^3$ e G, a matriz de Gram associada. Então, $\sqrt{Det(G)}$ é igual ao volume do paralelepípedo P gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3, $P = \{t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3;\ 0 \leq t_i \leq 1,\ i = 1,2,3\}$.

Observação 1

Para $n \geq 4$ ainda pode-se falar de $\sqrt{Det(G)}$ como volume n-dimensional do paralelepípedo

$$P = \{t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_nv_n;\ 0 \leq t_i \leq 1,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Basta aceitar que para um bloco n-dimensional $B = \times_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, formado pelo produto cartesiano dos intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1,\ldots,n$, o volume n-dimensional é o produto do comprimento dos seus lados: $\Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

Exemplo 2

Determine a área do paralelogramo gerado pelos vetores $(1,2)$ *e* $(3,4)$*.*

Solução: Seja A a matriz que possui ditos vetores por linha. Então

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2.$$

Logo,

$$\sqrt{Det(G)} = |Det(A)| = |-2| = 2.$$

Exemplo 3

Determine o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $(4,1,2)$, $(0,3,2)$ *e* $(2,4,0)$ *(Fig. 2).*

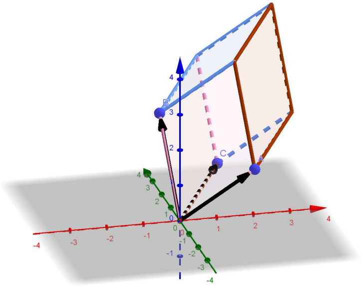

Figura: Paralelepípedo

$$P = \{tA + sB + rC;\ 0 \leq t,\ s,\ r \leq 1\}$$

$$A = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= 0+4+0-12-32-0=-40 \\ &\Rightarrow \\ Vol &= \sqrt{Det(G)} = |Det(A)| \\ &= |-40| = 40\ u^3. \end{aligned}$$

Diz-se que uma matriz quadrada A é <u>inversível</u> quando existe uma matriz B quadrada, da mesma ordem, tal que $AB = I = BA$. No caso afirmativo, B é chamada matriz inversa de A e denotada A^{-1}.

Obviamente, a matriz identidade é inversível e coincide com a sua inversa: $I \cdot I = I$. Por outro lado, a matriz nula não é inversível: $0 \cdot B = 0 \neq I$, $\forall\, B$.

Proposition 13

Seja A uma matriz quadrada de números reais. Então, A é inversível se e somente se $det(A) \neq 0$. No caso afirmativo,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) \qquad \text{e} \quad Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}.$$

Demonstração

Suponha, inicialmente, que A é inversível com inversa A^{-1}. Então,

$$AA^{-1} = I \implies Det(A)Det(A^{-1}) = Det(AA^{-1}) = Det(I) = 1 \implies$$

$$Det(A) \neq 0 \quad \text{e} \quad Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}.$$

Suponha agora que $Det(A) \neq 0$ e aplique a Proposição 10 para obter

$$A \cdot \, Adj(A) = det(A) \cdot \, I \implies \quad A \cdot \left(\frac{1}{Det(A)} Adj(A) \right) = I;$$

e, analogamente,

$$\left(\frac{1}{Det(A)} Adj(A) \right) \cdot A = I.$$

Ou seja, A é inversível e a inversa de A é a matriz, unicamente determinada,

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A).$$

$\square$

Proposition 14

Se $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ são inversíveis então AB é inversível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração

Note que $Det(AB) = Det(A)Det(B)$; assim, se A e B são inversíveis então seus determinantes não nulos implicam $Det(AB)$ também diferente de zero e, consequentemente, AB é inversível. Quanto a sua inversa, as igualdades

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

comprovam que $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB. $\square$

Proposition 15

Se A é inversível então A^T é inversível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração

De fato, $Det(A^T) = Det(A) \neq 0$ e

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I \quad \wedge \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I.$$

$\square$

Exemplo 4

Determine se $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ *é inversível ou não, e calcule sua inversa no caso afirmativo.*

Calculando o determinante de A obtemos

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 22 = 2 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \frac{1}{2} Adj(A).$$

Basta então calcular a matriz adjunta de $A_{2\times 2}$:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|[a_{22}]| = a_{22},\ \Delta_{12} = (-1)^{1+2}|[a_{21}]| = -a_{21},$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|[a_{12}]| = -a_{12},\ \Delta_{22} = (-1)^{2+2}|[a_{11}]| = a_{11},$$

$$\bar{A} = [\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, neste caso particular,

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

O cálculo da inversa de A também pode ser efetuado resolvendo a equação matricial $AX = I$; ou seja, resolvendo n sistemas de equações lineares simultâneos, um para cada coluna de X. A saber,

$$Ax_{()1} = e_1^T, \quad Ax_{()2} = e_2^T, \quad \cdots \quad Ax_{()n} = e_n^T,$$

em que $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

A hipótese $Det(A) \neq 0$ garante que todos eles são possíveis determinados e, como em todos eles a matriz de coeficientes é a mesma, pode-se aplicar Eliminação Gaussiana na matriz n-ampliada

$$[A|\, e_1^T\ e_2^T\ \cdots\ e_n^T] = [A|\, I]$$

para resolver simultaneamente todos os sistemas; processo este mais eficiente do ponto de vista numérico do que o cálculo via matriz adjunta.

Voltando ao exemplo anterior, a matriz 2-ampliada correspondente é

$$[A|\, I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & -11/6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1/3 & -11/6 & 1 \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11/2 & 3 \end{array}\right] = [I|\, A^{-1}].$$

Confirmando que

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{array}\right].$$

Dedicaremos esta seção à solução de sistemas de equações lineares possíveis e determinados que possuem exatamente o mesmo número de equações e de variáveis; ainda que o método de Eliminação Gaussiana seja aplicável de forma eficiente, a Regra de Cramer permite obter diretamente o valor de uma variável qualquer sem precisar efetuar o cálculo de nenhuma outra das incógnitas o que pode ser útil principalmente no caso de sistema muito grandes.

Teorema 12

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ em que $A_{n\times n}$ e $Det(A) \neq 0$. Então, o sistema é possível e determinado e, se x representa o vetor solução,

$$x_j = \frac{Det(A_j)}{Det(A)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

em que A_j é a matriz obtida de A substituindo a sua coluna j pelo termo independente b.

Demostração da Regra de Cramer

A hipótese $Det(A) \neq 0$ garante que A possui posto máximo e também $[A|b]$, no caso n, e que a nulidade de A seja zero; ou seja, o sistema é possível e determinado; além disso, A é inversível e $A^{-1} = \dfrac{1}{Det(A)} Adj(A)$.

Logo, se x é o vetor solução,

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{Det(A)} Adj(A)b.$$

Ou seja,

$$x = \frac{1}{Det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \begin{bmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots + b_n\Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Basta agora observar que o desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante de A_j, pela coluna j, coincide com

$$b_1\Delta_{1j} + b_2\Delta_{2j} + \cdots + b_n\Delta_{nj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$\square$

Exemplo 5

Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ *pela Regra de Cramer.*

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow Det(A_1) = 49 \Longrightarrow x = \frac{49}{-1} = -49;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow Det(A_2) = -9 \Longrightarrow y = \frac{-9}{-1} = 9;$$

e

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow Det(A_3) = -18 \Longrightarrow z = \frac{-18}{-1} = 18.$$

Sabemos que o modelo simples de renda nacional

$$Y = C + I + G \qquad \text{e} \qquad C = a + bY$$

em que Y é a renda (agregada) ou produto nacional, C é o consumo (agregado), I representa o investimento e G os gastos do governo; o parâmetro a é a parte autônoma do consumo (parcela que não depende da renda) e o parâmetro b é a fração da renda que é gasta no consumo (ou a propensão marginal a consumir, $0 < b < 1$), pode ser descrito na forma matricial $Ax = d$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = \begin{bmatrix} I+G \\ a \end{bmatrix}.$$

Observe que é um sistema com o mesmo número de variáveis e de equações (2) e que

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b \neq 0 \quad \Rightarrow$$

Pode-se aplicar a Regra de Cramer para obter Y e C em função dos dados do problema.

Solução do modelo de renda nacional via Cramer

A primeira variável $x_1 = Y$ e A_1 é a matriz obtida de A trocando a primeira coluna pelo vetor coluna d; ou seja,

$$A_1 = \begin{bmatrix} I+G & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A_1) = I+G+a$$

Logo,

$$Y = x_1 = \frac{Det(A_1)}{Det(A)} = \frac{I+G+a}{1-b}.$$

Analogamente, a segunda variável $x_2 = C$ e A_2 é a matriz obtida de A trocando a segunda coluna pelo vetor coluna d; ou seja,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & I+G \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Det(A_2) = a+b(I+G)$$

Logo,

$$C = x_2 = \frac{Det(A_2)}{Det(A)} = \frac{a+b(I+G)}{1-b}.$$

Questão 1

Determine o preço da terceira mercadoria, sem precisar achar todos os outros preços, no problema de equilíbrio de mercado com as seguintes funções de oferta e demanda:

$$Q_{d_1} = 10 - 2P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_1} = -2 + 3P_1 - P_3; \qquad Q_{d_2} = 14 + P_1 - P_2 - P_3, \quad Q_{s_2} = -1 + 2P_2$$

e

$$Q_{d_3} = 20 - P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_3} = -4 - P_1 - P_2 + 3P_3.$$

Das condições de equilíbrio

$$Q_{d_1} = Q_{s_1} \Leftrightarrow 10 - 2P_1 + P_2 - P_3 = -2 + 3P_1 - P_3 \Leftrightarrow \qquad 5P_1 - P_2 = 12$$

$$Q_{d_2} = Q_{s_2} \Leftrightarrow 14 + P_1 - P_2 - P_3 = -1 + 2P_2 \Leftrightarrow \qquad P_1 - 3P_2 - P_3 = -15$$

$$Q_{d_3} = Q_{s_3} \Leftrightarrow 20 - P_1 + P_2 - P_3 = -4 - P_1 - P_2 + 3P_3 \Leftrightarrow 2P_2 - 4P_3 = -24 \Leftrightarrow P_2 - 2P_3 = -12$$

Que corresponde ao sistema linear 3×3: $\begin{cases} 5P_1 - P_2 = 12 \\ P_1 - 3P_2 - P_3 = -15 \\ P_2 - 2P_3 = -12. \end{cases}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Termos independentes $b = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \\ -12 \end{bmatrix}$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 + 0 + 0 - 0 + 5 - 2 = 33.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow Det(A_3) = 180 + 0 + 12 - 0 + 75 - 12 = 255.$$

Pela Regra de Cramer

$$P_3 = \frac{Det(A_3)}{Det(A)} = \frac{255}{33} = \frac{85}{11} \approx 7.72\ u.m.$$

Teorema 13 (Mudança de Variáveis)

Suponha que $h: U \longrightarrow V$ é uma mudança de variáveis de classe $\mathscr{C}^1$ entre os abertos U e V de $\mathbb{R}^2$ e que $S \subseteq U$ é uma região compacta J-medível. Se f é contínua em $h(S)$ então

$$\int\int_{h(S)} f(x,y)\, dA = \int\int_S (f \circ h)(u,v)|Det(Jh(u,v))|\, dudv.$$

Exemplo 6 (Coordenadas Polares)

$h: \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(r,\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$; i.e., $x = rcos(\theta)$, $y = rsen(\theta)$.

Matriz Jacobiana de h: $Jh(r,\theta) = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{bmatrix}$

$$Det(Jh(r,\theta)) = rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta) = r \neq 0, \quad \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}.$$

Esta mudança de variáveis é particularmente útil para passarmos de regiões tipo discos ou “fatias de bolo"para retângulos no plano.

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Lages Lima, E. *Curso de Análise. V2.* Terceira edição, IMPA (1989).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).