Bases em espaços vetoriais de dimensão finita.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

Agosto, 2021

Seja $V(\mathbb{K}),+,\cdot$ um espaço vetorial e considere a família (ou conjunto) de vetores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ em V. Quando

- $vet\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=V$, e
- os vetores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ são linearmente independentes,

diz-se que os vetores $v_1,v_2,\ldots,v_n$ são (ou formam) uma base de (em) V (e que V é um espaço vetorial finitamente gerado[1]).

Observação 1

Uma base em V é, consequentemente, um sistema gerador do espaço com uma quantidade minimal de vetores (dentre eles nenhum é redundante do ponto de vista linear).

Exemplo 1 (Base canônica)

$v_1=(1,0)$, $v_2=(0,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$.

$$vet\{v_1,v_2\}=\{\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1);\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha_1,\alpha_2);\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2 \quad (gerador)$$

e

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)\Leftrightarrow\alpha_1=0=\alpha_2 \quad (LI).$$

[1] Há espaço vetoriais que não são finitamente gerados, por exemplo, o das funções reais definidas em todo $\mathbb{R}$ -prove!

Exemplo 2

Mostre que $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *formam uma base do espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem dois.*

- O espaço vetorial gerado por $M_1,\ M_2,\ M_3$ coincide com todo o espaço das matrizes simétricas de ordem dois:

  Sejam $a,\ b$ e c reais quaisquer. Então,

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

  Desse modo, quando $a,\ b$ e c percorrem todos os números reais, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ percorre todas as matrizes simétricas de ordem dois.

- Independência linear de $M_1,\ M_2,\ M_3$:

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0 = b = c.$$

□

Exemplo 3

O espaço vetorial das funções afins, $\mathscr{P}_{\leq 1}$, admite a base $\{f,\ g\} = \{1,\ x\}$ em que f é a função constante e igual a um, i.e., $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; e g é a função identidade de $\mathbb{R}$; ou seja, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- f e g formam um sistema gerador desse espaço:

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = c_1 + c_2 x \qquad \Rightarrow \quad Vet\{f,\ g\} = \mathscr{P}_{\leq 1}.$$

- Independência linear dessas funções:

  Suponha que $c_1 f + c_2 g = 0$, ou seja,

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow c_1 + c_2 x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$$

  então, o polinômio $c_1 + c_2 x$ coincide com o polinômio de grau zero $p(0) = 0$; o que, por sua vez, implica $c_2 = 0$ e $c_1 = 0$.

Trataremos a seguir a questão da construção de bases num espaço vetorial finitamente gerado seja extraindo um sistema linearmente independente de um sistema gerador, seja completando um sistema LI até obter um sistema gerador.

Proposition 1

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores não-nulos que geram o espaço vetorial V, $V = Vet\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.

Demo.: Se o sistema $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for LI não tem nada a fazer, pois sendo gerador já é uma base.

Caso contrário, com base na dependência linear, podemos-se garantir que algum deles é combinação linear dos restantes, i.e.,

$$\exists j \in \{1, \ldots, n\}; \quad v_j \in Vet\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}.$$

$$\Rightarrow \qquad V = Vet\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\};$$

voltando, assim, à hipótese inicial do sistema gerador, agora, com um elemento a menos.

Repetindo o argumento finitas vezes, se necessário, ficaremos com um sistema ainda gerador e linearmente independente: uma base. $\square$

Exemplo 4

$\{(-1,0),(1,2)\}$ *é uma base de* $Vet\{(-1,0),(1,2),(0,2)\}$.

$(0,2)=(-1,0)+(1,2)$; assim, pode-se eliminar $(0,2)$ do sistema gerador e ainda obter $Vet\{(-1,0),(1,2)\}=\mathbb{R}^2$; sendo $(1,0)$ e $(1,2)$ LI, $\{(-1,0),(1,2)\}$ é uma base (de $\mathbb{R}^2$).

Proposition 2

Seja $V=Vet\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *um espaço vetorial finitamente gerado por uma quantidade* n *de vetores. Então, qualquer conjunto de vetores em* V *com mais de* n *elementos é necessariamente LD.*

Demo.: Consulte o material [3].

Corolário 1

Seja V *um espaço vetorial finitamente gerado. Então todas as bases de* V *possuem a mesma quantidade de elementos.*

Demo.: Sejam $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ e $\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ bases em V. Sabe-se que $Vet\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=V$ e que $\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ é um sistema LI então, pela Proposição 2, $m\leq n$. Analogamente, $V=Vet\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ e $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ LI implicam $n\leq m$. Assim, $m=n$. $\square$

Definição 1

A dimensão de um espaço vetorial é o número de elementos de uma base qualquer dele.

Exemplo 5

A dimensão de $\mathbb{R}^2$ é dois (vide Exemplo 1).

Em geral, $Dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemplo 6

A dimensão do espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem dois é três (Vide Exemplo 2).

Exemplo 7

A dimensão de $\mathscr{P}_{\leq 1}$ é dois (2) (Exemplo das funções afins).

Em geral, $Dim(\mathscr{P}_{\leq n}) = n + 1$.

Proposition 3

Qualquer conjunto LI num espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado até formar uma base.

Demo.: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ um sistema LI no espaço vetorial V de dimensão $n \geq m$.

- Se $Vet\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = V$ então já temos uma sistema gerador e LI: uma base.
- Caso contrário, existe $v \in V$ tal que $v \notin Vet\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Inclua, então, dito vetor no sistema; ou seja, defina $v_{m+1} = v$ e considere os sistema $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$, que ainda é LI, pois o vetor incluído não é combinação linear dos restantes, e que gera um espaço de dimensão $m + 1$.
- Repita o argumento finitas vezes se necessário até completar um sistema gerador e LI. $\square$

Corolário 2

Num espaço vetorial de dimensão n, qualquer conjunto LI com exatamente n vetores formará uma base.

Demo.: Se o sistema LI não fosse base poderia ser completado até formar uma; obtendo-se, assim, uma base com mais do que n vetores no espaço de dimensão n: uma contradição. $\square$

Teorema 3

Seja $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Então, para cada $v \in V$ existem únicos escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$ tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

Demo.: A existência de $x_1, x_2, \dots x_n$ tais que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, uma vez fixado $v \in V$, é obvia posto que $V = Vet\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Quanto à unicidade, suponha que $y_1, y_2, \dots, y_n$ também sejam escalares que permitam escrever v na forma $v = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n$. Então,

$$O_V = v - v = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n - (x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n)$$

$$= (y_1 - x_1)v_1 + (y_2 - x_2)v_2 + \cdots + (y_n - x_n)v_n$$

e, pela independência linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$, pode-se afirmar que $y_i - x_i = 0$, $\forall i$. □

Definição 2

Os escalares $x_1, x_2, \dots x_n$, associados a v no Teorema 3, são chamados <u>coordenadas</u> de v na base γ e representados como matriz coluna na notação: $[v]_\gamma = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

O Teorema 3 acima diz que um espaço vetorial finitamente gerado pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$, onde n é sua dimensão; basta para tal fixar uma base em V.

A identificação pode ser formalizada pela função $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $\psi(v) = [v]_\gamma^T$, em que γ representa a base fixada: ψ é uma bijeção linear contínua com inversa contínua (um isomorfismo).

V e $\mathbb{R}^n$ são ditos <u>isomorfos</u>. Notação $V \cong \mathbb{R}^n$.

Exemplo 8

As coordenadas de $(2,3)$ na base natural $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ são 2 e 3 respectivamente (Figura 1); ou seja,

$$[(2,3)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$(2,3) = 2\cdot(1,0) + 3\cdot(0,1).$$

Exemplo 9

As coordenadas de $(2,3)$ *na base* $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *são* -1 *e* 3 *respectivamente (Figura 2):*

$$[(2,3)]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$(2,3) = a\cdot(1,0) + b\cdot(1,1) = (a+b,b) \Leftrightarrow b = 3 \quad \wedge \quad a+b = 2 \Leftrightarrow b = 3 \quad \wedge \quad a = -1.$$

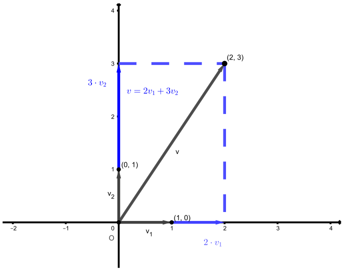

Figura: Coordenadas: $[v]_\alpha$.

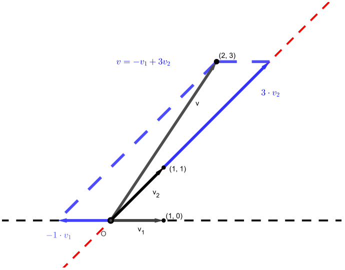

Figura: Coordenadas: $[v]_\beta$.

Exemplo 10

As coordenadas de $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *na base* $\gamma = \{M_1, M_2, M3\}$ *do Exemplo 2 são* 0, 1 *e* 2, *respectivamente.*

$$[M]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{pois} \quad M = 0 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} + 1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} + 2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3}.$$

$$S_{2\times 2} \cong \mathbb{R}^3.$$

Exemplo 11

As coordenadas da função afim $f(x) = 3x + 5$ *na base* $\beta = \{x, 1\}$ *são* 3 *e* 5 *respectivamente, i.e.,*

$$[3x+5]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathscr{P} \leq 1 \cong \mathbb{R}^2.$$

Suponha que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ sejam bases do espaço vetorial V então, cada elemento v_j da base β possui únicas coordenadas na base γ, digamos $[v_j]_\gamma$ (assim como cada w_j possui únicas coordenadas na base β). Assim, podemos definir as matrizes quadradas de ordem n:

$$I_\gamma^\beta = [[v_1]_\gamma\ [v_2]_\gamma \cdots\ [v_n]_\gamma] \quad \text{e} \quad I_\beta^\gamma = \left[[w_1]_\beta\ [w_2]_\beta \cdots\ [w_n]_\beta\right].$$

Ditas matrizes são chamadas de mudança de base de β para γ e de γ para β, respectivamente; o que se justifica pela seguinte propriedade.

Teorema 4

Nas condições acima,

$$[v]_\gamma = I_\gamma^\beta [v]_\beta, \qquad \forall v \in V \qquad \text{e} \qquad [v]_\beta = I_\beta^\gamma [v]_\gamma, \qquad \forall v \in V.$$

Demostração do Teorema

Suponha que $[v_j]_\gamma = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, n$; $[v]_\beta = x$; e, $[v]_\gamma = y$. Então,

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{y_i} w_i;$$

ou seja,

$$y = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [[v_1]_\gamma \; [v_2]_\gamma \cdots [v_n]_\gamma] x = I_\gamma^\beta x.$$

$\square$

Exemplo 12

Considere as bases $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $\gamma = \{(1,0),(1,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^2$. *Calcule* I_γ^α.

- $[(1,0)]_\gamma$:

$$(1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(1,1) \qquad \Rightarrow \quad [(1,0)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- $[(0,1)]_\gamma$:

$$(0,1) = a(1,0) + b(1,1) = (a+b,b) \Leftrightarrow b=1 \quad a=-1 \Rightarrow [(0,1)]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \qquad I_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Em particular, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_\gamma^\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{[(2,3)]_\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [(2,3)]_\gamma.$

No exemplo acima, $I_{\alpha}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $[(1,0)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[(1,1)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{[v]_{\gamma}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [v]_{\alpha}, \quad \text{em que} \quad v = (2,3).$

Observação 2

As matrizes de mudança de base são inversíveis (posto máximo - sistema LI por colunas) e

$$\left[I_{\gamma}^{\beta}\right]^{-1} = I_{\beta}^{\gamma}.$$

No caso, como ilustração,

$$I_{\gamma}^{\alpha} \cdot I_{\alpha}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

- Boyce, W.E. e DiPrima, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC (2006).
- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Lages Lima, E. *Curso de Análise. V2.* Terceira edição, IMPA (1989).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).