Transformações Lineares.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

30 de agosto de 2021

Definição de Transformação Linear

Definição 1

A função $F : V \longrightarrow W$ definida entre o domínio V e o contradomínio W, em que $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ e $W(\mathbb{K}), \hat{+}, \hat{\cdot}$ são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo escalar $\mathbb{K}$, é chamada de <u>transformação linear</u> quando satisfaz a seguinte propriedade

$$F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \,\hat{\cdot}\, F(u) \,\hat{+}\, \beta \,\hat{\cdot}\, F(v), \quad \forall u, v \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

Destacamos que as operações que definem a estrutura de espaço vetorial em V e W não precisam ser as mesmas; ou seja, a soma ou a multiplicação por escalar de $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ pode ser diferente da operação correspondente do espaço $W(\mathbb{K}), \hat{+}, \hat{\cdot}$; contudo, é usual na literatura tratar as operações com as mesma simbologia; assim, (1) torna-se, simplesmente,

$$F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot F(u) + \beta \cdot F(v), \quad \forall u, v \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Exemplo

A função que calcula o traço das matrizes quadradas de números reais é uma transformação linear entre o espaço vetorial $V = M(n,n)$ (i.e., $M(n,n)(\mathbb{R}),+,\cdot)$ e o espaço vetorial $W = \mathbb{R}$ (i.e., $\mathbb{R}(\mathbb{R}),+,\cdot$) e, obviamente, a soma no universo das matrizes é diferente da soma em $\mathbb{R}$; assim como a multiplicação por escalar:

$Tr : M(n,n) \longrightarrow \mathbb{R}$, em que

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \qquad \forall A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M(n,n).$$

Logo, quaisquer que sejam as matrizes $A,\ B \in M(n,n)$ e as constantes reais α e β tem-se

$$Tr(\alpha A + \beta B) = Tr(\alpha A) + Tr(\beta B) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B).$$

Aditividade e homogeneidade de grau um

Destacamos, a seguir, que conceito de linearidade pode ser desmembrado em duas propriedades elementares (uma para cada operação da estrutura dos espaços vetoriais): aditividade e homogeneidade de grau um.

Proposição 1

$F : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear se e somente se

$$F(u+v) = F(u) + F(v), \qquad \forall u,\ v \in V \qquad (\textit{aditiva}) \quad \text{e}$$

$$F(\alpha u) = \alpha F(u), \qquad \forall u \in V,\ \alpha \in \mathbb{K} \qquad (\textit{homogênea grau um}).$$

Demonstração

Suponha que F é linear. Então, aplicando (1) com $\alpha = 1 = \beta$ obtém-se a aditividade; e com $\beta = 0$, a homogeneidade de grau um. Por outro lado, se F é aditiva e homogênea de grau um então, para qualquer combinação linear $\alpha u + \beta v$ tem-se

$$F(\underbrace{\alpha u}_{\hat{u}} + \underbrace{\beta v}_{\hat{v}}) = F(\hat{u}) + F(\hat{v}) = \underbrace{F(\alpha u)}_{\alpha F(u)} + \underbrace{F(\beta v)}_{\beta F(v)} = \alpha F(u) + \beta F(v).$$

□

Exemplos

Exemplo 1

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *é uma função linear. De fato,*

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x+2y = f(x)+f(y) \quad \text{e} \quad f(cx) = 2(cx) = c(2x) = cf(x).$$

Exemplo 2

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *não é uma função linear (é não-linear). Note que* f *não é homogênea de grau um, por exemplo,*

$$f(3x) = (3x)^2 = 9x^2 \neq 3x^2 = 3f(x).$$

Exemplo 3

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = 2x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *não é uma função linear. Note que* g *não é aditiva:*

$$g(x+y) = 2(x+y)+1 = 2x+1+2y = g(x)+g(y)-1 \neq g(x)+g(y).$$

Condição necessária de linearidade

Observe que a função $g(x) = 2x + 1$ do exemplo acima é uma translação da função linear $2x$; ou seja, g é uma função afim e não atende à definição de linearidade.

Detalhe: $g(0) = 1 \neq 0$.

Mostraremos a seguir, que a condição $F(O_V) = O_W$ é necessária para a linearidade (não é, obviamente, uma condição suficiente como mostra o exemplo da função x^2).

Proposição 2

Se $F : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear então $F(O_V) = O_W$.

Demonstração

Da homogeneidade da grau um e fixando o escalar $\alpha = 0$ temos, para um vetor qualquer fixado em V,

$$F(O_V) = F(0 \cdot u) = 0 \cdot F(u) = O_W.$$

$\square$

Mais exemplos

Exemplo 4 (A aplicação nula)

$F : V \longrightarrow W$ tal que $F(v) = O_W$, $\forall v \in V$, é obviamente linear. De fato,

$$O_W = F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot O_W + \beta \cdot O_w = \alpha \cdot F(u) + \beta \cdot F(v).$$

Exemplo 5 (Operador de multiplicação por uma matriz)

Seja $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz de números reais. Defina $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como sendo a função que a cada x de $\mathbb{R}^n$, identificado com uma matriz coluna, associa o vetor $F(x) = Ax$. Usando as propriedades do produto matricial obtém-se a linearidade de F. Este operador costuma ser denotado por T_A ou, simplesmente, A.

Exemplo 6 (Rotação em ângulo θ)

É o operador linear $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associado à matriz $A = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Definições: N(T), Im(T)

Dedicamos esta seção às questões relativas à injetividade e sobrejetividade de funções lineares, que permitem um tratamento relativamente simples se comparado à contraparte não-linear.

Definição 2

O núcleo (kernel) de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ *é o conjunto* $N(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0_W\}$ *e a imagem de* T *é o conjunto* $Im(T) = \{T(v);\ v \in V\}$.

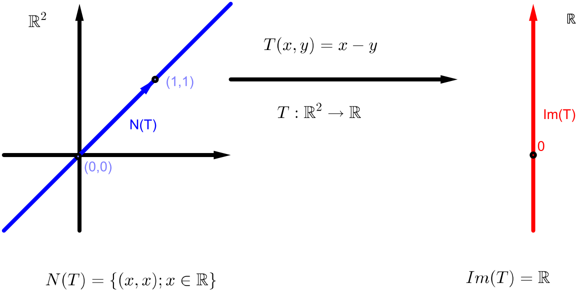
Exemplo 7

No caso do operador de multiplicação pela matriz A (Exemplo 5), $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ *é o conjunto solução do sistema de equações lineares homogêneo* $Ax = 0$ *e* $Im(A) = \{Ax;\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *corresponde ao espaço vetorial gerado pelos vetores-coluna de A.*

N(T) e Im(T), geometricamente

Exemplo 8

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $T(x,y) = x - y$. *Então* T *é obviamente linear,* $N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$ *e* $Im(T) = \mathbb{R}$. *Para mais detalhes consulte a Figura 1.*



Propriedades

Proposição 3

Seja $T : V \longrightarrow W$ linear. Então $N(T)$ é subespaço vetorial de V e $Im(T)$, de W.

Demonstração

$N(T) \subseteq V$ e $Im(T) \subseteq W$, por definição; além disso, $O_v \in N(T)$ e $O_w \in Im(T)$ pois $T(O_v) = O_w$ sendo linear. Suponha então que $u, v \in N(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; vamos provar que $\alpha u + \beta v \in N(T)$:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha O_w + \beta O_w = O_w \implies \alpha u + \beta v \in N(T).$$

De forma análoga, se $w_1, w_2 \in Im(T)$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $w_1 = T(v_1)$ e $w_2 = T(v_2)$; logo,

$$\underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_{w} = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{v \in V}) = T(v) \Rightarrow w \in Im(T).$$

$\square$

Propriedades (cont.)

Proposição 4

Seja $T : V \longrightarrow W$ linear. Então T é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$.

Demonstração

Suponha que T é injetora e que $v \in N(T)$. Então

$$T(v) = O_w = T(O_v) \Rightarrow v = O_v;$$

ou seja, $N(T) \subseteq \{O_v\}$ e assim, $N(T) = \{O_v\}$ (pois sempre vale $\{O_v\} \subseteq N(T)$).
Para a volta, suponha que $N(T) = \{O_v\}$ e que $x, y \in V$ sejam tais que $T(x) = T(y)$. Então,

$$T(x) - T(y) = O_w \Rightarrow T(x - y) = O_w \Rightarrow x - y \in N(T) \Rightarrow x - y = O_v \Rightarrow x = y;$$

o que prova a injetividade de T. $\square$

Propriedades (cont. 2)

Teorema 5 (Núcleo e imagem)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \longrightarrow W$, uma transformação linear. Então

$$dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim(V).$$

Demonstração

[2]. $\square$

Corolário 6

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $T : V \longrightarrow W$, uma transformação linear. Se $dim(V) = dim(W)$ então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

Demonstração

Pelo Teorema 5, do núcleo e imagem, e pela hipótese $dim(V) = dim(W)$ temos

$$dim(W) = dim(V) = dim(N(T)) + dim(Im(T)) \quad \text{e} \quad dim(N(T)) = 0 \Leftrightarrow T \text{ injetora}$$

$\square$

Propriedades (cont. 3)

Corolário 7

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $T : V \longrightarrow W$, uma transformação linear injetora. Se $dim(V) = dim(W)$ então T transforma base de V em base de W.

Demonstração

Do Corolário acima, T é uma bijeção linear; logo, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é base de V então

$$\begin{aligned} W &= Im(T) = \{T(u); u \in V\} = \left\{ T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right); a_i \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i); a_i \in \mathbb{K} \right\} \\ &= Vet\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i) = O_w \Leftrightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = O_w \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in N(T) = \{O_v\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = O_v;$$

e, da independência linear do vetores $u_1, \ldots, u_n$ decorre $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$ e, assim, a independência linear de $T(u_1), \ldots, T(u_n)$. □

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).