TRANSFORMAÇÕES LINEARES (CONTINUAÇÃO).

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

Janeiro, 2022

Sabe-se que toda matriz A gera uma transformação linear via a operação de multiplicação $T_A(x) = Ax$. Mostraremos, nesta seção que a volta é válida em dimensão finita; ou seja, se T é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita então T pode ser representada como um operador de multiplicação por uma certa matriz.

Lema 1

Seja $T : V \longrightarrow W$ linear, e $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base em V. Então, os vetores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ definem unicamente T.

De fato, qualquer $v \in V$ possui únicas coordenadas $[v]_\delta = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ na base δ; ou seja, existem únicos escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

Então, pela linearidade de T,

$$T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \cdots + x_n T(v_n).$$

Se fixarmos ainda uma base $\delta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ em W, cada $T(v_i)$ terá únicas coordenadas nessa base e, consequentemente,

$$[T(v)]_\delta = x_1[T(v_1)]_\delta + x_2[T(v_2)]_\delta + \cdots + x_n[T(v_n)]_\delta = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot [v]_\gamma, \qquad \forall v \in V,$$

em que

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_\delta & [T(v_2)]_\delta & \cdots & [T(v_n)]_\delta \end{bmatrix}$$

Dita matriz A é chamada matriz de representação de T nas bases γ de V e δ de W e denotada $A = [T]_\delta^\gamma$. Resumindo,

Teorema 1

Seja $T : V \longrightarrow W$ linear; γ, uma base em V; e δ, uma base de W. Então

$$[T(v)]_\delta = [T]_\delta^\gamma \cdot [v]_\gamma, \qquad \forall v \in V.$$

Em particular,

$$dim(N(T)) = nulidade([T]_\delta^\gamma) \quad \text{e} \quad dim(Im(T)) = posto([T]_\delta^\gamma).$$

Rotação de 90°

Construa uma transformação linear que rotacione os vetores de $\mathbb{R}^2$ em $+\pi/2$.

Solução

Considere a base natural $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e rotacione apenas esses dois vetores; ou seja, defina

$$R(1,0) = (0,1) \quad \text{e} \quad R(0,1) = (-1,0).$$

Então, para qualquer outro vetor (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tem-se

$$R(x,y) = R(x(1,0)+y(0,1)) = x\,\underbrace{R(1,0)}_{(0,1)} + y\,\underbrace{R(0,1)}_{(-1,0)} = x(0,1)+y(-1,0) = (-y,x).$$

No caso, a matriz que representa R da base canônica de $\mathbb{R}^2$ pra própria base canônica é

$$A = [R]_{\alpha}^{\alpha} = [[R(1,0)]_{\alpha}\ [R(0,1)]_{\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Transposta

Determine a matriz que representa $T : M(2,2) \longrightarrow M(2,2)$, definida por $T(A) = A^T$, na base $\beta = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ em que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Note que

$$T(M_1) = M_1, \quad T(M_2) = M_3, \quad T(M_3) = M_2 \quad \text{e} \quad T(M_4) = M_4 \quad \Rightarrow$$

$$[T(M_1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(M_2)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(M_3)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(M_4)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Derivando polinômios

Determine a matriz que representa $D : \mathscr{P}_{\leq 2} \longrightarrow \mathscr{P}_{\leq 1}$, que a cada polinômio de grau menor ou igual a dois associa a sua derivada, $D(p(x)) = p'(x)$, e da base $\gamma = \{x^2,\ x,\ 1\}$ para a base $\delta = \{x,\ 1\}$.

Solução

$D(x^2) = 2x$, $D(x) = 1$, $D(1) = 0$.Então

$$[D(x^2)]_\delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x)]_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [D(1)]_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D]_\delta^\gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Em particular, pode-se calcular a derivada de $p(x) = ax^2 + bx + c$, multiplicando suas coordenas $(a,b,c)^T$, na base γ, pela matriz $[D]_\delta^\gamma$:

$$[p'(x)]_\delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow p'(x) = 2a \cdot x + b \cdot 1 = 2ax + b.$$

Nesta seção trataremos transformações lineares com domínio igual a contradomínio, ou seja, $T : V \longrightarrow V$ linear do espaço vetorial $V = V(\mathbb{K}), +, \cdot$ nele próprio de modo que para cada $v \in V$, $T(v)$ pertence ao mesmo universo V; caso em que a transformação linear é usualmente chamada de operador linear.

Definição 1

Diz-se que o escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é autovalor de T se existe $v \in V$, $v \neq O_V$, tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Nesse caso, v é chamado autovetor associado a λ e define-se o auto-espaço associado a λ como sendo conjunto

$$V_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}.$$

Observação 1

A definição de autovalor poderia ser tratada em corpos de escalares, $\mathbb{K}$, mais gerais que os reais, como os complexos, desde que V seja um espaço vetorial sobre esse mesmo corpo escalar.

Observação 2

Quando $v \neq O_v$ é autovetor de T tem-se que v e $T(v)$ são vetores co-lineares; ou seja, $T(v)$ é um elemento da reta $\{tv;\ t \in \mathbb{K}\}$.

Observação 3

Se $T : V \longrightarrow V$ é um operado linear com núcleo não trivial, i.e., T não é injetora, então $N(T)$ é um auto-espaço e está associado ao autovalor $\lambda = 0$.

Exemplo 1 (Operador Nulo)

Considere $T : V \longrightarrow V;\ T(v) = O_v,\ \forall v \in V$*, em que* V *é um espaço vetorial de dimensão positiva (não trivial). Então,*

$$O_v = T(v) = \lambda \cdot v, \quad v \neq O_v \quad \Leftrightarrow \lambda = 0;$$

logo, $\lambda = 0$ *é seu único autovalor e o autoespaço associado é todo o espaço vetorial* V*:*

$$V_0 = \{v \in V;\ T(v) = 0 \cdot v = O_v\} = V.$$

Exemplo 2 (Operador Identidade)

Considere $T : V \longrightarrow V;\ T(v) = v,\ \forall v \in V$*, em que* V *é um espaço vetorial não trivial. Então,*

$$v = T(v) = \lambda \cdot v, \quad v \neq O_v \quad \Leftrightarrow \lambda = 1;$$

logo, $\lambda = 1$ *é seu único autovalor e o autoespaço associado é todo o espaço vetorial* V*:*

$$V_1 = \{v \in V;\ T(v) = 1 \cdot v = v\} = V.$$

Proposição 2

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor da transformação linear $T : V \longrightarrow V$ então V_λ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração

Da definição decorre que V_λ é um conjunto não vazio contido em V, supondo que λ seja autovalor.Por outro lado, se $v_1,\ v_2 \in V_\lambda$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ então

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{\lambda v_1} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{\lambda v_2} = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2);$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V_\lambda, \qquad \forall v_1,\ v_2 \in V_\lambda,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.$$

$\square$

Exemplo 3

Considere $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x,y)=(x,0)$ *para todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*.Então* $T(x,y)=\lambda(x,y)$ *se e somente se*

$$(x,0)=(\lambda x,\lambda y)\Leftrightarrow x=\lambda x \quad \wedge \quad 0=\lambda y \Leftrightarrow (x=0\vee\lambda=1) \quad \wedge \quad (\lambda=0\vee y=0)$$

Logo, $\lambda=0$ *e* $\lambda=1$ *são autovalores de* T*,* $V_0=\{0\}\times\mathbb{R}$ *e* $V_1=\mathbb{R}\times\{0\}$ *(Figura 1).*

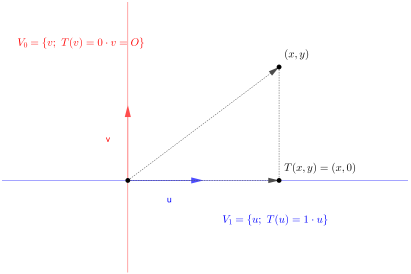

Figura: Autoespaços de $T(x,y)=(x,0)$.

Exemplo 4

Voltando ao operador de multiplicação por uma matriz A, $T_A(x) = Ax$, com $m = n$, $Ax = \lambda x$ se e somente se $[A - \lambda I]x = 0$.Assim, λ é autovalor se e somente se existir solução não trivial do sistema de equações lineares homogêneo com matriz de coeficientes $A - \lambda I$; ou seja, se e somente se $Det(A - \lambda I) = 0$.Nesse caso, $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n;\ [A - \lambda I]x = 0\}$.

Observação 4 ($Det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ)

Se $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ então

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A). \end{aligned}$$

Questão 1

E para $n = 3$?

Definição 2

Fixada a matriz quadrada A, de números reais, o polinômio característico de A é o polinômio obtido, na variável $\lambda \in \mathbb{R}$, calculando o determinante da matriz $A - \lambda I$:

$$p_A(\lambda) = Det(A - \lambda I).$$

Exemplo 5

Determine o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e use dele para calcular os autovalores de A.

Solução

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$; logo,

$$p_A(\lambda) = Det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

As raízes reais deste polinômio são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ e, consequentemente, esses são os autovalores de A.

Exemplo 6

Cálculo dos autoespaços de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solução

Para calcular os autoespaços associados precisamos resolver os sistemas lineares $[A-\lambda I]x = 0$ correspondentes:

V_1:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow V_1 = \{(x,0);\, x \in \mathbb{R}\}.$$

V_3:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2x+2y = 0 \Leftrightarrow y = x \Rightarrow V_1 = \{(x,x);\, x \in \mathbb{R}\}.$$

□

Lembrando que em dimensão finita uma transformação linear se identifica com sua matriz de representação (fixando as bases), a metodologia do exemplo acima pode ser estendida a qualquer $T : V \longrightarrow V$ linear com V finitamente gerado. Basta observar que fixada uma base γ em V o polinômio obtido $p(\lambda) = Det([T]_{\gamma}^{\gamma} - \lambda I)$ no muda se mudarmos a base γ a uma base δ; e logo, $A = [T]_{\gamma}^{\gamma}$ para $B = [T]_{\delta}^{\delta}$ (Exercício). O polinômio $p(\lambda)$ é chamado polinômio característico de T (e não apenas de A ou de B, etc.).Resumindo,

Teorema 3

Seja $T : V \longrightarrow V$ linear e V, finitamente gerado. Então, λ é autovalor de T se e somente se λ é raiz (no mesmo corpo escalar sobre o qual está definido V) do polinômio característico de T.

Demonstração

Fixe uma base γ qualquer em V e suponha que $A = [T]_{\gamma}^{\gamma}$ seja a matriz que representa T em dita base. Então, $[T(v)]_{\gamma} = A[v]_{\gamma}, \forall v \in V$. Assim, para um dado escalar λ,

$$T(v) = \lambda v, \quad v \neq O_v \Leftrightarrow \underbrace{[T(v)]_{\gamma}}_{A[v]_{\gamma}} = \underbrace{[\lambda v]_{\gamma}}_{\lambda[v]_{\gamma}}, \quad \underbrace{[v]_{\gamma}}_{x_{n\times 1}} \neq \underbrace{[O_v]_{\gamma}}_{0_{n\times 1}} \Leftrightarrow Ax = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

O resto da prova decorre da análise feita no Exemplo 4. $\square$

No é verdade, porém, que qualquer operador linear sempre tenha autovalores, como ilustra o exemplo do operador que rotaciona em ângulo de $+\pi/2$: $R:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $R(x,y)=(-y,x)$.

De fato, a matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que o representa na base canônica de $\mathbb{R}^2$ possui o polinômio característico

$$p(\lambda)=\lambda^2+1;$$

polinômio este que não possui raízes no corpo dos números reais.

Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).

Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.

Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).

Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).

Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).