Transformações Lineares: Diagonalização.

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

15 de setembro de 2021

Considere, hipoteticamente, que s_k seja o salário de cada funcionário de uma certa empresa (igualmente pagos) e f_k, o número de funcionários dessa empresa no ano k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Suponha ainda que o número de empregados cairia pela metade (na ausência de pagamento e num período) no fosse (uma parcela/índice/porcentagem de) seu salário, isto é,

$$f_{k+1} = \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{100} s_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Suponha, por outro lado, que o empregador ofereceria uma reposição salarial de 25% não fosse o número de empregados (que desconta 12.5 $u.m.$ cada), ou seja,

$$s_{k+1} = -\frac{50}{4} f_k + \frac{5}{4} s_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Surge então a questão de determinar o salário e o número de funcionários no longo prazo sabendo que a empresa inicia (em $k = 0$) com 50 funcionários sendo pagos a 1600 unidades monetárias cada.

Como proceder?

Pode-se observar que a informação é gerada iterativamente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix}}_{Y_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/100 \\ -50/4 & 5/4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} f_k \\ s_k \end{bmatrix}}_{Y_k} \Longrightarrow Y_1 = AY_0, \quad Y_2 = AY_1 = AAY_0 = A^2 Y_0, \quad \ldots$$

Ou seja,

$$Y_k = A^k Y_0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

assim, determinar a tendência de longo prazo depende do estudo das potências sucessivas da matriz A; o que pode ser difícil ou custoso numericamente.

Há suas exceções, no entanto, como quando

- A é uma matriz diagonal, que não é o caso; ou
- A é semelhante a uma matriz diagonal D, ou seja, existe P inversível tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

A semelhante a D: $P^{-1}AP = D$

Neste caso,

$$D^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

$$D^3 = D^2(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^3P \ \ldots$$

Lema

Se $P^{-1}AP = D$ então $D^k = P^{-1}A^kP$.

Desse modo, o difícil cálculo de A^k pode ser substituído pelo cálculo trivial de D^k

$$D^k = P^{-1}A^kP \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} A^k = PD^{\infty}P^{-1},$$

em que D^{∞} é a matriz com os limites correspondentes das sequências potenciais $\{d_{ii}^k\}_{k \geq 0}$, $i = 1, \ldots, n$, caso existam.

Observação

A pergunta que fica é: e quando existe P inversível tal que $P^{-1}AP = D$ seja diagonal?

Quando A é semelhante a uma matriz diagonal D?

$$P^{-1}AP = D \qquad \Leftrightarrow \qquad AP = PD$$

e, representando as colunas de P por vetores $v_1, \ldots v_n$ (necessariamente l.i.)

$$P = [v_1 \; v_2 \cdots v_n]_{n\times n}, \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

tem-se $AP = PD$ se, e somente se,

$$[Av_1 \; Av_2 \; \cdots \; Av_n] = [d_{11}v_1 \; d_{22}v_2 \; \cdots \; d_{nn}v_n] \Leftrightarrow \quad Av_i = d_{ii}v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se, e somente se, $v_1, \ldots v_n$ são autovetores de A linearmente independentes (em $\mathbb{R}^n$); e $d_{11}, \ldots, d_{nn}$, autovalores correspondentes.

Se, e somente se, existe base de autovetores de A em $\mathbb{R}^n$.

Observação

A matriz P é chamada matriz diagonalizante; e corresponde à matriz de mudança de base da base de autovetores para a base canônica. E a matriz diagonal, semelhante, D é formada pelos autovalores de A na ordem da base.

Definição

Uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ é dita diagonalizável se existe um base em V cujos elementos são autovetores de T.

Observe que em dito caso, denotando os autovalores por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e a respectiva base por $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, em que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, obtemos

$$[T(v_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots \quad [T(v_n)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad [T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, nesse caso T possui uma matriz de representação diagonal.

Proposition

Se $T : V \longrightarrow V$ é linear, $\dim(V) = n$ e T possui n autovalores distintos então T é diagonalizável.

A demostração dessa proposição é consequência direta do lema a seguir.

Lema

Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

A proposição acima não esgota, obviamente, as possibilidades para um operador linear ser diagonalizável. Por exemplo, a identidade em dimensão $n \geq 2$ é obviamente diagonalizável e possui apenas um autovalor, $\lambda = 1$; o detalhe é que esse único autovalor fornece todos os n autovetores l.i. necessários. Logo, o essencial, para T ser diagonalizável conhecida a dimensão n do espaço V, é que a soma total das dimensões de seus autoespaços seja n.

Proposition

Se $T: V \longrightarrow V$ é linear, $dim(V) = n$ e T possui k autovalores distintos λ_i, $i = 1, \ldots, k$, $k \leq n$, então T é diagonalizável se e somente se

$$\sum_{i=1}^{k} Dim(V_{\lambda_i}) = n.$$

Definição

A dimensão do autoespaço V_λ é conhecida como dimensão geométrica (d.g.) do autovalor λ.

O resultado acima poderia ser descrito como:

“T é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões geométricas dos seus autovalores coincidir com a dimensão do espaço vetorial V em que T está definido".

Fixado um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ e um operador linear $T : V \longrightarrow V$ define-se $p(T)$ como sendo a função

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots a_n T^n$$

em que T^k representa a composta $T \circ T \circ \cdots \circ T$ k-vezes; em particular, fixada uma matriz quadrada A, $p(A)$ é a matriz da mesma ordem definida por

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_n A^n.$$

Assim como $p(A)$ ainda é uma matriz, $p(T)$ é um um operador linear.

Lema

Se λ é autovalor de T e v é um autovetor associado a λ então $\mu = p(\lambda)$ é autovalor de $p(T)$ e v é autovetor $p(T)$ associado a μ.

Demonstração

Suponha que $T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} p(T)v &= [a_0 I + a_1 T + \cdots a_n T^n]v = a_0 v + a_1 T(v) + \cdots a_n T^n(v) \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + a_2 \lambda^2 v + \cdots a_n \lambda^n v = [a_0 + a_1 \lambda + \cdots a_n \lambda^n]v \\ &= p(\lambda)v = \mu v \end{aligned}$$

O polinômio p anula A (respectivamente, T) quando $p(A)$ for a matriz nula (respectivamente, $p(T)$ for o operador nulo).

Teorema (Cayley-Hamilton)

O polinômio característico do operador linear $T : V \longrightarrow V$, em que V é uma espaço vetorial de dimensão finita, anula T.

Demonstração

Caso $T = T_A$, $A = [a_{ij}]$ de ordem 2: $p_A(x) = x^2 - tr(A)x + Det(A)$; logo,

$$
\begin{aligned}
p_A(A) &= A^2 - tr(A)\cdot A + Det(A)\cdot I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&\quad -(a_{11}+a_{22})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{22}a_{11} & a_{12}a_{11} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Definição

O polinômio minimal da matriz $A_{n\times n}$ é um polinômio $m(x)$ que anula A, é mônico (o coeficiente do termo que define o grau do polinômio é um) e tem grau mínimo (entre todos os outros mônicos que anulam A).

A existência de tal polinômio decorre do Teorema de Cayley-Hamilton pois

- o polinômio característico anula A;
- deste poderemos via fatoração retirar os fatores redutíveis até obtermos o de grau mínimo que anule A.
- Claro que qualquer múltiplo de um polinômio que anule A continua anulando A; causa disso, coloca-se a condição de ser mônico para estabelecer a unicidade do minimal.

Exemplo

O polinômio minimal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é* $m(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$*; ou seja, o próprio característico. Note que nem* $x-1$ *nem* $x-3$ *anulam* A*.*

Exemplo

O polinômio minimal de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *também é polinômio característico* $m(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *posto que* $x-1$ *não anula* A*.*

Exemplo

O polinômio minimal de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ *é* $m(x) = x - 1$*. De fato,* $x-1$ *anula* I*, é mônico e não tem como reduzir o grau. Note que o polinômio característico de* I *é* $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *e pode-se eliminar um fator* $x-1$ *que ainda o restante* $x-1$ *anula* I*.*

Proposition

Se A e B são matrizes semelhantes então possuem os mesmo polinômio minimal.

Proposition

Seja $T : V \longrightarrow V$ linear, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita e suponha que A e B sejam matrizes de representação de T nas bases β e γ respectivamente. Então, o polinômio minimal de A coincide com o polinômio minimal de B; ou seja, o polinômio minimal de T é invariante por representação matricial de T.

Demonstração

Como A e B representam T, A e B são semelhantes; logo, pela proposição anterior 3, o polinômio minimal é o mesmo. $\square$

Proposition

O polinômio minimal e o polinômio característico de uma transformação linear (ou matriz) possuem as mesmas raízes.

Teorema

A transformação linear $T : V \longrightarrow V$, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K, é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal de T for produto de fatores lineares diferentes, i.e.,

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ escalares diferentes.

Operadores diagonalizáveis conhecidos seus autovalores

Teorema

Seja $T : V \longrightarrow V$ linear e V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K. Suponha ainda que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K$ são os autovalores distintos de T. Então, T é diagonalizável se e somente se o polinômio $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$ anula T, ou seja, $p(T) = 0$.

Demonstração

Aplique o Teorema 2 lembrando que as raízes (diferentes) do polinômio minimal e do característico são as mesmas (Proposição 5). □

Exemplo

Nos exemplos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ os polinômios minimais são $m_A(x) = (x - 3)(x - 1)$, $m_B(x) = (x - 1)^2$ e $m_C(x) = x - 1$, respectivamente; logo, A e C são diagonalizáveis e B não é diagonalizável.

- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).