AULA 10 - Variável aleatória bidimensional contínua

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Variável aleatória contínua bidimensional

- (X, Y) será uma variável aleatória contínua bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não-numerável do plano euclidiano.
- Exemplo: se (X, Y) tomar todos os valores no retângulo $\{(x, y) | a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}$.
- Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua que toma todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A **função densidade de probabilidade conjunta** f é uma função que satisfaz as seguintes condições:
  1. $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$,
  2. $\int \int_R f(x, y) dxdy = 1$
- Agora temos que o volume total sob a superfície dada pela equação $z = f(x, y)$ é igual a 1.

Variável aleatória contínua bidimensional

- Como no caso unidimensional, $f(x, y)$ não representa a probabilidade.
- A distribuição de probabilidades de (X, Y) é realmente induzida pela probabilidade dos eventos associados ao espaço amostral original S. Ou seja, se B estiver no contradomínio de (X, Y), teremos

$$P(B) = P\{[X(s), Y(s)] \in B\} = P\{s|[X(s), Y(s)] \in B\}$$

Esta probabilidade se refere a um evento em S e, consequentemente, determina a probabilidade de B. De acordo com nossa terminologia anterior, B e $\{s|[X(s), Y(s)] \in B\}$ são eventos equivalentes (ver figura).

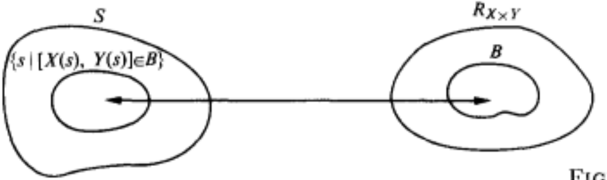


FIGURA 6.2

Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- Seja f a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional contínua (X, Y). Definiremos g e h, respectivamente as funções de densidade de probabilidade marginal de X e de Y, assim

  $$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy; \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

  Essas fdp correspondem às fdp básicas das variáveis aleatórias unidimensionais X e Y, respectivamente. Por exemplo

  $$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= P[c \leq X \leq d, \, -\infty < Y < +\infty] \\ &= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx \\ &= \int_c^d g(x)dx \end{aligned}$$

Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

Example

Dois característicos do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional com fdp conjunta:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x+y-2xy), && 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1, \\ &= 0 && \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

A fdp marginal de X é dada por:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 2(x+y-2xy)dy \\ &= 2(xy + y^2/2 - xy^2)|_0^1 = 1, \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

A fdp marginal de Y é dada por:

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 2(x+y-2xy)dx \\ &= 2(xy + x^2/2 - x^2y)|_0^1 = 1, \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

Definition

Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com fdp conjunta f. Sejam g e h as fdp marginais de X e Y, respectivamente. A fdp marginal de X condicionada a um dado $Y = y$ é definida por:

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad \text{se } h(y) > 0$$

A fdp marginal de Y condicionada a um dado $X = x$ é definida por:

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad \text{se } g(x) > 0$$

Variáveis Aleatórias Independentes

Definition

Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional. Diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $f(x, y) = g(x)h(y)$ para todo (x, y), em que f é a fdp conjunta, e g e h são as fdp marginais de X e Y, respectivamente.

- Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente se, $g(x|y) = g(x)$, ou equivalentemente, se e somente se, $h(y|x) = h(y)$, para todo (x, y).

Variáveis Aleatórias Independentes

Example

Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua fdp conjunta seja dada por

$$f(x,y) = e^{-(x+y)},\ x \geq 0, y \geq 0.$$

Desde que podemos fatorar

$$f(x,y) = g(x)h(y) = e^{-x}e^{-y}$$

a independência de X e Y fica estabelecida.

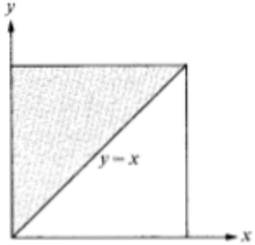
Variáveis Aleatórias Independentes

Example

Suponha-se que

$$f(x,y) = 8xy,\ 0 \le x \le y \le 1 \text{ vide domínio na figura}$$

Muito embora f seja escrita na forma fatorada, X e Y não são independentes, já que o campo de definição $\{(x,y)|0 \le x \le y \le 1\}$ é tal que para dado x, y pode tomar somente valores maiores do que aquele dado x e menores que 1. Por isso, X e Y não são independentes.



Variáveis Aleatórias Independentes

- Teorema: Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Sejam A e B eventos cuja ocorrência dependa apenas de X e Y, respectivamente (isto é, A é um subconjunto de R_X , o contradomínio de X, enquanto B é um subconjunto de R_Y , o contradomínio de Y). Então, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, teremos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Demonstração:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \int\int_{A \cap B} f(x, y)dxdy = \int\int_{A \cap B} g(x)h(y)dxdy \\
&= \int_A g(x)dx \int_B h(y)dy = P(A)P(B)
\end{aligned}
$$