AULA 11 - Valor esperado e suas propriedades

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

O valor esperado de uma variável aleatória

- Como forma de resumir o comportamento de uma variável aleatória (v.a.) vamos estudar uma medida que calcula a tendência central da v.a., chamada de esperança ou valor esperado de uma v.a.

Example

Em um restaurante quando pedimos nossa comida e perguntamos para o garçom quanto tempo leva para ficar pronto, ele vai nos fornecer um valor esperado, ou seja, o tempo médio em que a comida deve demorar a ficar pronta.

- Nesta aula iremos estudar como se obter o valor esperado de uma v.a. discreta e contínua e estudaremos as suas propriedades.

O valor esperado de uma variável aleatória discreta

Definition

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$ e seja $p(x)$ a função de probabilidade de X, isto é, $p(x_i) = P(X = x_i)$. Então, o valor esperado de X, também chamado de esperança de X e denotado por $E(X)$ ou μ_X, é definido por

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i).$$

Este número também é denominado valor médio ou expectância de X. Observamos que o valor esperado $E(X)$ só está definido se a série acima for absolutamente convergente, ou seja, se

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) < \infty.$$

O valor esperado de uma variável aleatória discreta

- Se X tomar apenas um número finito de valores, a expressão acima se torna $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.
- Neste caso, o valor esperado pode ser considerado como uma média ponderada dos possíveis valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Se todos esses valores possíveis forem equiprováveis, $E(X) = \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, que representa a média aritmética simples dos n possíveis valores.

O valor esperado de uma variável aleatória discreta

Example

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado.
Consideremos a v.a. $X =$ "número da face voltada para cima".
Calcular o valor esperado de X.
Sabemos que os valores possíveis de X são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e que esses valores são equiprováveis. Assim,

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

Este exemplo ilustra claramente que $E(X)$ não é o resultado que podemos esperar quando X for observado uma única vez. De fato, temos que $E(X) = 7/2$ nem é um possível valor de X. Esse valor na verdade significa que se jogássemos o dado um grande número de vezes e depois calculássemos a média aritmética dos vários resultados, esperaríamos que essa média ficasse próxima de $7/2$ e quanto maior fosse o número de vezes que o dado fosse lançado, mais a média aritmética se aproximaria de $7/2$.

Expectância de uma função de variável aleatória discreta

- Dado X uma v.a. discreta assumindo valores em $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ e com função de distribuição p_X. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real. A variável aleatória $Y = H(X)$ tem função de distribuição dada por

$$P[Y = y] = \sum_{\{x \in R_x : H(x) = y\}} P[X = x].$$

  Assim, obtemos o seguinte resultado.

- Seja X uma v.a. discreta que assume valores em $\mathcal{R}_X$ com função de probabilidade $p(x)$ e $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Temos então que

$$E[H(X)] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} H(x_i)p(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{R}_X} H(x_i)P(X = x_i).$$

Expectância de uma função de variável aleatória discreta

Example

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo:

X	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

e seja $H(X) = X^2$. Vamos calcular o valor esperado de X e de $H(X)$.
O valor esperado de X é dado por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X = x_i) = -2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} = 0.$$

através do resultado acima temos que:

$$E[H(X)] = \sum_{i=1}^{5} H(x_i) P(X = x_i) = (-2)^2\frac{1}{5}(-1)^2\frac{1}{5}+0^2\frac{1}{5}+1^2\frac{1}{5}+2^2\frac{1}{5} = 2.$$

Expectância de uma função de variável aleatória discreta

Example

Uma indústria alimentícia está participando de três licitações públicas, com lucros possíveis de 30, 50 e 60 mil reais, respectivamente. Se a probabilidade dessa indústria vencer as licitações são de $0,3; 0,7$ e $0,2$ respectivamente, qual o valor esperado do lucro desta indústria?
Neste caso basta aplicarmos diretamente a definição de valor esperado, ou seja:

$$E(X) = 0,3 \cdot 30 + 0,7 \cdot 50 + 0,2 \cdot 60 = 56.$$

Assim, o valor esperado do lucro desta indústria nas licitações é de 56 mil reais.

Expectância de variável aleatória discreta bidimensional

- Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional e façamos $Z = H(X, Y)$. Temos:

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

Definition

Seja $Z = (X, Y)$ um vetor aleatório bidimensional discreto, $p(x, y)$ a função de probabilidade conjunta de Z e $p(x)$ e $q(y)$ as funções de probabilidade marginais das variáveis X e Y respectivamente. Então, temos que o valor esperado das variáveis X e Y são dados por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad \text{e} \quad E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j).$$

Além disso, temos que o valor esperado do vetor aleatório Z é dado por

$$E(Z) = (E(X), E(Y))$$

Expectância de variável aleatória discreta bidimensional

Exemplo: Suponha que uma máquina seja utilizada para determinada tarefa de manhã e para outra tarefa à tarde. Suponha que o número de vezes que a máquina apresenta problema de manhã e à tarde sejam representados, respectivamente, por variáveis aleatórias X e Y com função de probabilidade conjunta.

X/Y	0	1	2	$p(x)$
0	0,1	0,2	0,2	0,5
1	0,04	0,08	0,08	0,2
2	0,06	0,12	0,12	0,3
$q(y)$	0,2	0,4	0,4	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 = 0,8.$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,4 = 1,2.$$

De onde segue que $E(Z) = (E(X), E(Y)) = (0,8; 1,2)$.
Seja $H(X,Y) = XY$. Então o valor esperado de $H(X,Y)$ é dado por

$$E(H(X,Y)) = 0 \cdot 0 \cdot p(0,0) + 0 \cdot 1 \cdot p(0,1) + \ldots + 2 \cdot 2 \cdot p(2,2) = 0,96.$$

Expectância de variável aleatória contínua

- Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$. Definimos o valor esperado ou média de X por
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$
desde que a integral esteja bem definida.
- Se a variável é limitada, a existência do valor esperado está assegurada.
- A interpretação de $E(X)$ para o caso contínuo é similar ao mencionado para v.a. discretas.
- Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$.

Expectância de variável aleatória contínua

Example

Seja a função de densidade de uma variável aleatória de X dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{se } 0 \leq \ x \ \leq 2; \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O valor esperado de X será:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{2} xf(x) = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^2 = \frac{4}{3}.$$

Expectância de variável aleatória contínua bidimensional

- Seja $Z = (X, Y)$ um vetor aleatório bidimensional contínuo, $f(x, y)$ a função densidade de probabilidade conjunta de Z e $g(x)$ e $h(y)$ as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y respectivamente. Então, temos que o valor esperado das variáveis aleatórias X e Y são dados por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx \quad \text{e} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy.$$

  O valor esperado do vetor aleatório bidimensional Z é dado por

$$E(Z) = (E(X), E(Y)).$$

Expectância de variável aleatória contínua bidimensional

Example

Duas características do desempenho do motor de um foguete são o empuxo (X) e a taxa de mistura (Y). Suponha que (X, Y) seja uma v.a. bidimensional contínua com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy), & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já haviamos calculado as marginais na aula passada send $f(x) = 1$ e $f(y) = 1$ Portanto, temos que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}.$$

Se $Z = (X, Y)$ segue então que $E(Z) = (E(X), E(Y)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Propriedades de valor esperado

P1 Se $X = c$ com c uma constante real, então $E(X) = c$.
De fato, se X é uma v.a. discreta, temos que

$$E(X) = \sum_{R_X} xP(X = x) = cP(X = c) = c \cdot 1 = c$$

P2 Seja c uma constante real e X uma v.a. então,

$$E(cX) = cE(X)$$

De fato, no caso discreto temos que

$$E(cX) = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} cxP(X = x) = c \sum_{x \in \mathcal{R}_X} xP(X = x) = cE(X).$$

De modo análogo, temos no caso contínuo, que

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx = c \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = cE(X)$$

Propriedades de valor esperado

P3 Sejam X e Y duas v.a. quaisquer. Então,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

No caso discreto, considere $p(x,y)$ a função de probabilidade conjunta e $p(x)$ e $q(y)$ as funções de probabilidade marginais:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{y\in\mathcal{R}_Y}\sum_{x\in\mathcal{R}_X}(x+y)p(x,y) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{R}_X}\sum_{y\in\mathcal{R}_Y} xp(x,y) + \sum_{y\in\mathcal{R}_Y}\sum_{x\in\mathcal{R}_X} yf(x,y) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$E(X+Y) = \sum_{x\in\mathcal{R}_X} xp(x) + \sum_{y\in\mathcal{R}_Y} yq(y).$$

Portanto, concluímos que

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

O mesmo vale para o caso contínuo.

Propriedades de valor esperado

- Combinando-se as propriedades anteriores, temos que se $Y = aX + b$, em que a e b são constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$. Isso só vale se é uma função linear.

P4 Sejam n v.a. $X_1, \ldots, X_n$. Então,

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n).$$

P5 Sejam X e Y v.a. independentes. Então,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$