# AULA 12 - Variância e suas propriedades

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

# A variância de uma variável aleatória

- Não devemos atribuir a $E(X)$ mais significado do que autorizado, isto é, $E(X)$ significa apenas que se considerarmos um grande número de determinações de $X$, digamos, $x_1, ...x_n$ , e calcularmos sua média, esta média estaria próximo de $E(X)$.
- Assim, se temos $E(X) = 1.000$ horas, como valor esperado de uma v.a. $X$ que representa a duração de uma lâmpada, então tanto podemos ter que
  - a maioria das lâmpadas dure um período compreendido entre 900 e 1.100 horas
  - a população é compreendida por dois tipos de lâmpadas, aproximadamente a metade delas com duração de 1.300 horas e a outra metade, de 700.
- Medidas de variância serão úteis para distinguir as duas situações acima.

# A variância de uma variável aleatória

## Definition

Seja $X$ uma v.a.. Definimos a variância de $X$, denotada por $\text{Var}(X)$ ou $\sigma_X^2$ por

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

A raiz quadrada positiva da variância $\text{Var}(X)$ é denominada de desvio-padrão de $X$ e denotado por $\sigma_X$.

- O número $\text{Var}(X)$ é expresso por unidades quadradas de $X$. Isto é, se $X$ for medido em horas, então $\text{Var}(X)$ é expressa em $(\text{horas})^2$.
- $\text{Var}(X)$, tal como definida anteriormente, é um caso especial da seguinte noção mais geral. O $k$-ésimo momento da variável aleatória $X$, em relação à sua expectância, é definida com sendo $\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\}$.Para $k = 2$, obteremos a variância.

## A variância de uma variável aleatória

- O cálculo de $\mathrm{Var}(X)$ pode ser simplificado com o auxílio do seguinte resultado.

### Theorem

*A variância de uma v.a. $X$ pode ser calculada da seguinte forma*

$$\mathit{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

**Demonstração**: De fato, desenvolvendo $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$ e empregando as propriedades já estabelecidas de valor esperado, obtemos

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left\{X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2\right\}$$

ou seja

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

# A variância de uma variável aleatória

## Example

Suponhamos que $X$ seja uma v.a. contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Temos que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} = 0$$

e

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

portanto, temos que

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{6}.$$

# Propriedades da variância de uma variável aleatória

P1 Se $c$ for uma constante, então

$$\mathsf{Var}(X + c) = \mathsf{Var}(X).$$

De fato, temos que

$$\mathsf{Var}(X+c) = \mathbb{E}[(X+c)^2] - [\mathbb{E}(X+c)]^2 = \mathbb{E}[X^2+2cX+c^2] - [\mathbb{E}(X)+c]^2$$

portanto

$$\mathsf{Var}(X + c) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathsf{Var}(X).$$

Esta propriedade é intuitivamente evidente, porque somar uma constante a um resultado $X$ não altera sua variabilidade.

# Propriedades da variância de uma variável aleatória

P2 Se $c$ for uma constante, então

$$\text{Var}(cX) = c^2\text{Var}(X)$$

De fato, temos que

$$\text{Var}(cX) = c^2\mathbb{E}(X^2) - c^2[\mathbb{E}(X)]^2 = c^2\text{Var}(X).$$

P3 Se $X$ e $Y$ forem v.a. independentes, então

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

De fato, temos que

$$\text{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - [\mathbb{E}(X+Y)]^2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X+Y) = {} & \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ & - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).\end{aligned}$$

# Propriedades da variância de uma variável aleatória

- É importante compreender que a variância não é, em geral, aditiva, como o valor esperado. Com a hipótese complementar de independênncia, a P3 fica válida.

P4 Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independentes, então

$$\text{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \ldots + \text{Var}(X_n).$$

Esta propriedade segue direto da anterior. Basta fazer uma indução sobre $n$.