AULA 13 - Variância de distribuições conjuntas, covarância e correlação

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Covariância

- Em probabilidade, a covariância de duas variáveis X e Y é uma medida da variabilidade conjunta destas variáveis aleatórias.
- Se as variáveis tem covariância positiva tendem a mostrar um comportamento semelhante, ou seja, os menores (maiores) valores da variável X corresponde aos menores (maiores) da variável Y .
- Se a covariância é negativa então as variáveis tendem a mostrar um comportamento oposto, ou seja, os menores (maiores) valores da variável X corresponde aos maiores (menores) da variável Y.
- Assim, podemos ver que o sinal da covariância mostra a tendência na relação linear entre as variáveis.

Covariância

Definition

Sejam X e Y v.a., então a covariância entre X e Y é definida por

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))],$$

se essa esperança existe

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY - Y\mathbb{E}(X) - X\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Assim, temos que existe a covariância entre duas variáveis se, e somente se, existe a esperança $\mathbb{E}(XY)$.

Covariância

- Se $Cov(X, Y) = 0$, dizemos que X e Y são não-correlacionados.
- Se X e Y são independentes, então são não-correlacionado, pois neste caso

  $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

  mas é claro que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ não implica que em independência, ou seja, a covariância zero não necessariamente implica independência.
- Ver exercícios 7.39 e 7.40 do Meyer

Covariância

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias. Então,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)] + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

Demonstração:

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n - \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n))^2$$

$$= \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \cdots + X_n - \mathbb{E}(X_n))^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 + \sum_{i\neq j}(X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right]$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 + 2\sum_{i<j}(X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

Covariância

Corollary

Se $X_1, \ldots, X_n$ *são independentes e integráveis, então*

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

- A magnitude da covariância não é fácil de interpretar.
- A versão normalizada da covariância (coeficiente de correlação) entretanto, mostra por sua magnitude a força da relação linear. Assim, agora X e Y sejam v.a., com variâncias positivas e finitas. Dizemos que a v.a. $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ é uma padronização de X, pois expressa o valor de X em unidades padronizadas (desvio padrão).
- Um v.a. padronizada possuí esperança zero e variância 1.
- A covariância padronizada, chama-se coeficiente de correlação entre X e Y, o qual denotaremos por $\rho(X, Y)$

Coeficiente de correlação

Definition

Seja X e Y v.a. então o coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

- O coeficiente de correlação é uma quantidade adimensional
- O coeficiente de correlação é independente da escolha e transação das variáveis, ou seja,

$$\rho(X,Y) = \rho(aX+b, cY+d)$$

para $a<0$, $c<0$.

Coeficiente de correlação

A seguir temos uma proposição com algumas propriedades do coeficiente linear.

Sejam X e Y v.a. com variâncias finitas e positivas. Então:

a $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

b $\rho(X, Y) = 1$ se, e somente se, $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ para algum $a>0$, $b \in \mathbb{R}$.

c $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ para algum $a<0, \quad b \in \mathbb{R}$.

Coeficiente de correlação

- O coeficiente de correlação é uma medida do grau de linearidade entre X e Y. Valores de ρ próximos de $+1$ ou -1 indicam um alto grau de linearidade, enquanto valores de ρ próximos de 0 indicam falta de tal linearidade.
- Valores positivos de ρ mostram que Y tende a crescer com o crescimento de X, enquanto valores negativos de ρ mostram que Y tende a decrescer com valores crescentes de X.
- Existe muito equívoco sobre a interpretação do coeficiente de correlação. Um valor de ρ próximo de zero indica apenas ausência de relação linear entre X e Y. Ele não elimina a possibilidade de alguma relação não-linear.
- Se as variáveis forem independentes, o coeficiente de correlação é 0.
- O contrário não é verdadeiro porque o coeficiente de correlação detecta apenas dependências lineares entre duas variáveis.

Coeficiente de correlação

- Por exemplo, suponha-se que a v.a. X é simetricamente distribuída em torno de 0 e que a v.a. $Y = X^2$.
- Então, Y é completamente determinada por X, de modo que X e Y são perfeitamente dependentes, mas a correlação entre elas é 0. Em outras palavras, as variáveis não são correlacionadas.
- Entretanto, no caso especial em que X e Y são conjuntamente normais, não correlação é equivalente à independência (veremos depois)

Exemplo 1

Mostre que se $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ e X e Y assumem apenas valores 0 e 1 então X e Y são independentes.

$$\mathbb{E}(X) = 0\mathbb{P}(X = 0) + 1\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1)$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0\mathbb{P}(Y = 0) + 1\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = {} & 0\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + 0\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + 0\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \\ & + 1\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)\end{aligned}$$

Mas como por hipótese $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ então temos que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$ Agora observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) &= \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1)\left(1 - \mathbb{P}(X = 1)\right) = \mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(X = 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0)(1 - \mathbb{P}(Y = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)\end{aligned}$$

Pelas equações acima obtemos a independência.

Exemplo 2

Se X assume apenas valores a e b, Y assume apenas os valores c e d e $Cov(X, Y) = 0$, então X e Y são independentes.
De fato, considere que W e Z assumem apenas valores 0 e 1. Então

$$X = (b-a)W + a \text{ e } Y = (d-c)Z + c$$

Então,

$$\begin{aligned} XY &= [(b-a)W + a][(d-c)Z + c] \\ &= (b-a)(d-c)WZ + a(d-c)Z + c(b-a)W + ac \end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbb{E}(XY) = (b-a)(d-c)\mathbb{E}(WZ) + a(d-c)\mathbb{E}(Z) + c(b-a)\mathbb{E}(W) + ac$$

e temos que
$\mathbb{E}(X) = (b-a)\mathbb{E}(W) + a$
$\mathbb{E}(Y) = (d-c)\mathbb{E}(Z) + c$
o que implica que

Exemplo 2 - continuação

$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = (b-a)(d-c)\mathbb{E}(W)\mathbb{E}(Z) + a(d-c)\mathbb{E}(Z) + c(b-a)\mathbb{E}(W) + ac$
Como a $Cov(X,Y) = 0$ e
$0 = Cov(X,Y) = (b-a)(d-c)Cov(W,Z)$ e ainda

$$\begin{aligned} Cov(XY) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= (b-a)(d-c)\mathbb{E}(WZ) + a(d-c)\mathbb{E}(Z) + c(b-a)\mathbb{E}(W) + ac \\ &- (b-a)(d-c)\mathbb{E}(W)\mathbb{E}(Z) + a(d-c)\mathbb{E}(Z) + c(b-a)\mathbb{E}(W) + ac \end{aligned}$$

$$(b-a)(d-c)[\mathbb{E}(WZ) - \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(Z)] = (b-a)(d-c)Cov(W,Z)$$

Agora se $Cov(X,Y) = 0$ então como $(a-b)(d-c) \neq 0$, pois $b > a$ e $d > c$ o que implica que pelo exemplo anterior temos que

$$Cov(W,Z) = 0$$

o que implica que W e Z são independentes o que implica que $(b-a)W + a$ e $(d-c)Z + c$ são independentes e portanto X e Y são independente.

Exemplo 3

Se X e Y são independentes com variância finita, então

$$Var(XY) = Var(X)Var(Y) + \mathbb{E}(X)^2 Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 Var(X)$$

Para isso observe que

$$\begin{aligned}
&Var(X)Var(Y) + \mathbb{E}(X)^2 Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 Var(X) \\
&= \left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)\right)\left(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)\right) \\
&+ \left(\mathbb{E}^2(X)\right)\left(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)\right) + \left(\mathbb{E}^2(Y)\right)\left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)\right) \\
&= \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}^2(Y) + \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}^2(Y) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}^2(Y) \\
&+ \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}^2(Y) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}^2(Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}^2(Y) = \mathbb{E}((XY)^2) - \mathbb{E}^2(XY) = Var(XY)
\end{aligned}$$

portanto o resultado segue.

Covariância

A covariância é bilinear, ou seja,

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

no qual a_i e b_j são números reais e $Var(X_i)$, $Var(Y_j)$ são finitas.