AULA 14 - Esperança e variância condicionais

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Valor esperado condicionado: definição

Definition

a) Se (X, Y) for uma variável aleatória contínua bidimensional, definiremos o valor esperado condicionado de X, para um dado $Y = y$, como sendo

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y)dx$$

a) Se (X, Y) for uma variável aleatória discreta bidimensional, definiremos o valor esperado condicionado de X, para um dado $Y = y_j$, como sendo

$$E(X|y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i g(x_i|y_j)$$

Valor esperado condicionado: comentários

- A interpretação do valor esperado condicionado é a seguinte. Desde que $g(x|y)$ representa a fdp condicionada de X para um dado $Y = y$, $E(X|y)$ é o valor esperado de X, condicionado ao evento $\{Y = y\}$.
  Por exemplo, se (X, Y) representar o esforço de tração e a dureza de um espécie de aço, respectivamente, então $E(X|Y = 52,7)$ será o esforço de tração esperado de um espécime de aço escolhido ao acaso da população com dureza $52,7$.

Valor esperado condicionado: comentários

- É importe compreender que, em geral, $E(X|y)$ é uma função de y e, por isso, é uma variável aleatória. Semelhantemente, $E(Y|x)$ é uma função de x e, também, é uma variável aleatória [estritamente falando, $E(X|y)$ é o valor da variável aleatória $E(X|Y)$].
- Porque $E(Y|X)$ e $E(X|Y)$ são variáveis aleatórias, terá sentido falar de seus valores esperados. Deste modo, poderemos considerar $E[E(X|Y)]$.

Valor esperado condicionado

Theorem

$$E[E(X|Y)] = E(X) \quad e \quad E[E(Y|X)] = E(Y)$$

Demostração (caso contínuo) Por definição, $E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f(x,y)}{h(y)}dx$ em que f é a fdp conjunta de (X, Y) e h a fdp marginal de Y. Por isso

$$E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|y)h(y)dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f(x,y)}{\cancel{h(y)}}dx\right] \cancel{h(y)}dy$$

Se existirem todos os valores esperados, será permitido trocar a ordem da integração acima. Por isso

$$E[E(X|y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = E(X)$$

Valor esperado condicionado: independência

Theorem

Suponha que X *e* Y *sejam variáveis aleatórias independentes. Então*

$$E(X|Y) = E(X) \quad \textit{e} \quad E(Y|X) = E(Y)$$

Demostração

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x,y)}{h(y)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{g(x)\cancel{h(y)}}{\cancel{h(y)}} dx = E(X)$$

Valor esperado condicionado: outras propriedades

Seja X, Y e Z v.a e $a, b \in \mathbb{R}$. Assumindo que todas as esperanças condicionais a seguir existem, temos que

- $E[a|Y] = a$ pois $E[a|Y] = aP(a|Y) = a$
- $E[aX + bZ|Y] = aE[X|Y] + bE[Y|Z]$
- $E[X|Y] \geq 0$ se $X \geq 0$

Exercício: fazer o exemplo 7.22 do Meyer

Variância condicionada

Definition

Se (X, Y) for uma variável aleatória contínua bidimensional, definiremos o variância condicionada de Y, para um dado $X = x$, como sendo

$$Var(Y|X) = E\{[Y - E(Y|X)]^2|X\}$$

Podemos também escrever como:

$$Var(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$$