AULA 15 - Distribuição de Bernoulli e Binomial

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Variável Aleatória de Bernoulli

- Podemos dizer que as variáveis aleatórias mais simples entre as que merecem nossa atenção são aquelas cujos valores possíveis são dois (0 e 1).
- Receberam o nome do matemático Jacob Bernoulli.
- As v.a. de Bernoulli serão usadas na construção de variáveis aleatórias Binomiais, que são bastante utilizadas em modelagem probabilística de diversos fenômenos da Natureza.
- Em econometria temos modelos Binomiais: Probabilidade de falência, sinistro, abrir capital,...

Variável Aleatória de Bernoulli

Definition

Para qualquer valor de p no intervalo $[0, 1]$, a distribuição

Valor	0	1
Probabilidade	$1 - p$	p

chama-se distribuição de Bernoulli de parâmetro p.
A v.a. que tenha esta distribuição é chamada de variável aleatória Bernoulli de parâmetro p.

- Usamos a notação:

$$X \sim Bernoulli(p)$$

- Em geral é dito que a distribuição de Bernoulli tem valor 1 com a probabilidade de sucesso p e valor 0 com a probabilidade de falha $q = 1 - p$.

Variável Aleatória de Bernoulli

- Se X é uma v.a. com distribuição de Bernoulli, teremos:

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q = p$$

- Exemplo: uma jogada única de uma moeda. A moeda pode dar "coroa" com probabilidade p e "cara" com probabilidade $1 - p$. A experiência é dita justa se $p = 0.5$.
- A função de probabilidade f dessa distribuição é
  $f(k; p) = \begin{cases} p & \text{se } k = 1, \\ 1 - p & \text{se } k = 0. \end{cases}$
  Também pode ser expressado como

$$f(k; p) = p^k (1 - p)^{1-k} \quad \text{para } k \in \{0, 1\}.$$

Variável Aleatória de Bernoulli

- O valor esperado de uma variável aleatória de Bernoulli X é

$$E\left(X\right) = p$$

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

- A sua variância é

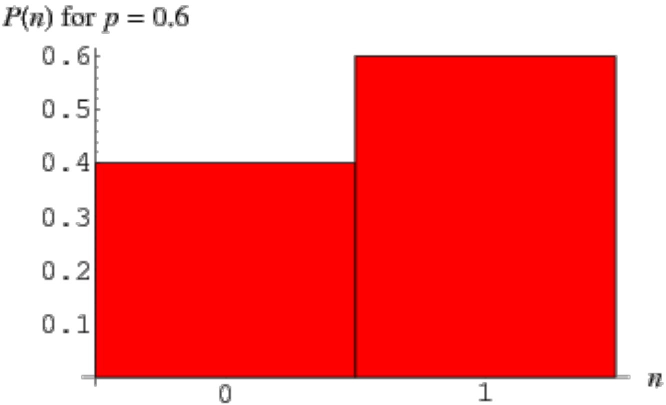
$$\mathrm{Var}\left(X\right) = p\left(1 - p\right)$$

$$\begin{aligned} Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 &= (0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p) - (E[X])^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p) \end{aligned}$$

Variável Aleatória de Bernoulli

- O gráfico da função de probabilidade da Bernoulli, pode ser apresentado de diversas formas.
- Seja a distribuição

Valor	0	1
Probabilidade	0.4	0.6



Variável Aleatória Binomial

- A distribuição de Bernoulli é um caso especial da distribuição Binomial, com $n = 1$.
- Exemplo: Se um dado equilibrado for lançado 3 vezes, então o número de vezes que veremos 6 tem distribuição binomial com $n = 3$

Definition

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são n distribuições de Bernoulli independentes com o mesmo parâmetro p, então sua soma $X = \Sigma X_i$ é a distribuição binomial $X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

Variável Aleatória Binomial

- A probabilidade de ter k sucessos e $n-k$ falhas é

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

- O número de pontos do espaço amostral que satisfaz essa condição é igual ao número de maneiras com que podemos escolher k ensaios para a ocorrência de sucesso dentre o total de n ensaios, pois nos $n-k$ restantes deverão ocorrer falhas. Este número é igual ao número de combinações de n elementos tomados k a k, ou seja,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Assim a função de probabilidade é definida por:

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ e onde $\binom{n}{k}$ é uma combinação.

Variável Aleatória Binomial

Example (Lançamento de três dados)

Três dados comuns e honestos serão lançados. A probabilidade de que o número 6 seja obtido mais de uma vez é: A probabilidade de que seja obtido 2 vezes mais a probabilidade de que seja obtido 3 vezes. Usando a distribuição binomial de probabilidade:
Acha-se a probabilidade de que seja obtido 2 vezes:

$$\begin{aligned} f(2;3,\frac{1}{6}) &= \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} \\ &= \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} \times \frac{1}{36} \times (\frac{5}{6})^1 \\ &= \frac{3}{1} \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \end{aligned}$$

Variável Aleatória Binomial

Example (Lançamento de três dados continuação)

Agora a probabilidade de que seja obtido 3 vezes:

$$
\begin{aligned}
f(3;3,\frac{1}{6}) &= \binom{3}{3} \times \frac{1}{6}^{3} \times (1-\frac{1}{6})^{3-3} \\
&= \frac{3!}{3!\cdot(3-3)!} \times \frac{1}{216} \times (\frac{5}{6})^{0} \\
&= \frac{3!}{3!} \times \frac{1}{216} \times 1 \\
&= 1 \times \frac{1}{216} \times 1 = \frac{1}{216}
\end{aligned}
$$

Assim, a resposta é: $= \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$

Variável Aleatória Binomial

Example (12 lançamentos de uma moeda)

Seja X uma variável aleatória que contém o número de caras saídas em 12 lançamentos de uma moeda honesta. A probabilidade de sair 5 caras em 12 lançamentos, $P(X = 5)$, é dada por:

$k = 5, n = 12, p = 0,5$

$$f(5; 12; 0,5) = \binom{12}{5} 0,5^5 (1 - 0,5)^{12-5} = 0,19$$

Variável Aleatória Binomial

- Se a $X \sim B(n, p)$ (isto é, X é uma v.a. binomialmente distribuida), então o valor esperado de X é

$$E[X] = np$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

A esperança de some é igual a soma das esperanças.

Variável Aleatória Binomial

- A variância é

$$\mathsf{var}(X) = np(1-p).$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) &= [n(n-1)p^2 + pn] - (np)^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

Como são v.a. independentes, a variância da soma é igual a soma das variâncias