AULA 17 - Distribuição Uniforme e Normal

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Distribuição Uniforme

- A distribuição uniforme é a mais simples distribuição contínua, bastante utilizada dentro da teoria de probabilidade.
- A distribuição uniforme tem uma importante característica a qual a probabilidade de acontecer um fenômeno de mesmo comprimento é a mesma.

Definition

Uma v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuição Uniforme

Example

A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 7]$.
A função densidade da distribuição Uniforme é dada por $f(x) = \frac{1}{7}$ se $0 \leq x \leq 7$ e zero, caso contrário. Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros?

$$\mathbb{P}\left(X \leq 0,8\right) = \int_0^{0,8} f(x)dx = \frac{0,8-0}{7} = 0,1142.$$

E qual a probabilidade de que ocorra nos 3 km centrais da rede?

$$\mathbb{P}\left(2 \leq X \leq 5\right) = \int_2^5 f(x)dx = \mathbb{P}\left(X \leq 5\right) - \mathbb{P}\left(X \leq 2\right) = 5/7 - 2/7 \approx 0,4285.$$

Distribuição Uniforme

- O valor esperado de uma v.a. X com distribuição uniforme é dado por

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

- A variância $\text{Var}(X)$ é dada por

$$\text{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2\left(X\right) = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2 = \frac{b^2-2ab+a^2}{12}.$$

Assim

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição Normal

- A distribuição normal ou gaussiana é a mais importante distribuição contínua.
- Sua importância se deve a vários fatores, entre eles podemos citar que a distribuição normal serve como uma excelente aproximação para uma grande classe de distribuições.
- Também diversos estudos práticos tem como resultado uma distribuição normal.
- Além disso, esta distribuição apresenta algumas propriedades matemáticas muito desejáveis, que permitem concluir importantes resultados teóricos.
- Podemos citar como exemplo a altura de uma determinada população em geral segue uma distribuição normal.

Distribuição Normal

Definition

Uma v.a. contínua X tem distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

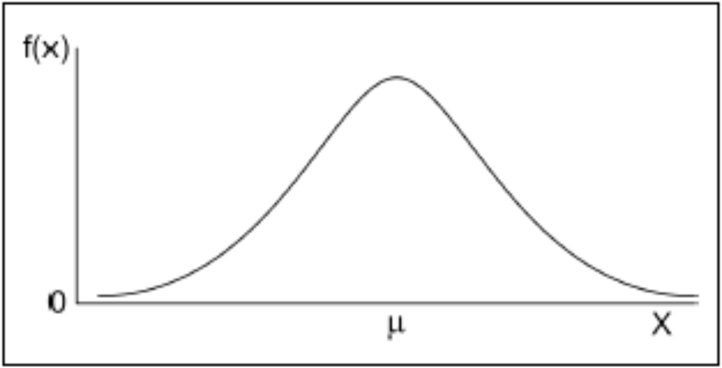
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Usamos a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- A distribuição normal é contínua parametrizada pela sua esperança matemática (número real μ) e desvio padrão (número real positivo σ).

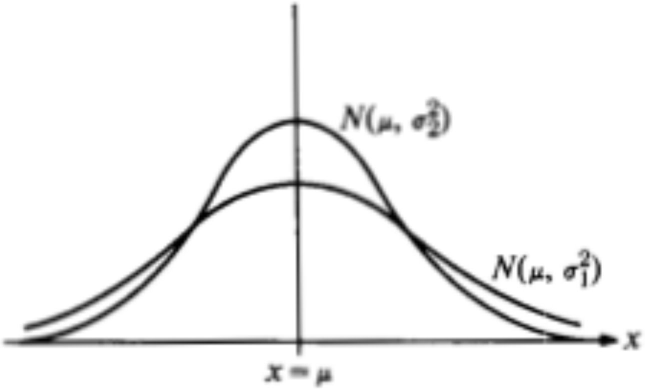
Distribuição Normal

- A distribuição é normal quando tem a forma de “sino”:



Distribuição Normal

- Visto que $f(x)$ depende de x somente através da expressão $(x-\mu)^2$, torna-se evidente que será simétrica em relação a μ.
- O parâmetro σ será os pontos de inflexão da curva. Por isso, se σ for "grande", então o gráfico de f(x) tenderá a ser "achatado", e se σ for "pequeno", o gráfico de $f(x)$ tenderá a ser bastante "pontiagudo".



Distribuição Normal

- Quando μ e σ são desconhecidos (caso mais comum), estes valores serão estimados por $\overline{X}$ e s, respectivamente, a partir da amostra, em que $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ e

  $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}$$

- Para cada valor de μ e/ou σ temos uma curva de distribuição de probabilidade.

Distribuição Normal

- Porém, para se calcular áreas específicas, faz-se uso de uma distribuição particular: a "distribuição normal padronizada", também chamada de Standartizada ou reduzida, o qual é a distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.
- Para obter tal distribuição, isto é, quando se tem uma variável X com distribuição normal com média μ diferente de 0 (zero) e/ou desvio padrão σ diferente de 1 (um), devemos reduzi-la a uma variável Z, efetuando o seguinte cálculo

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Distribuição Normal

- Considerando a normal padronizada, temos que a distribuição passa a ter média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$.
- Neste caso a fdp de X pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

- Pelo fato da distribuição ser simétrica em relação à média $\mu = 0$, a área à direita é igual a área à esquerda de μ.
- Por ser uma distribuição muito usada, existem tabelas a qual encontramos a resolução de suas integrais.

Tabulação da Distribuição Normal

- A tabulação da distribuição normal decorre da impossibilidade de calcular analiticamente a probabilidade $P(a \leq X \leq b)$, para uma v.a. X que tenha uma distribuição $N(0,1)$

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx,$$

- Assim, a fd da distribuição normal, denotada por

$$\Phi(s) = P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx,$$

Distribuição Normal

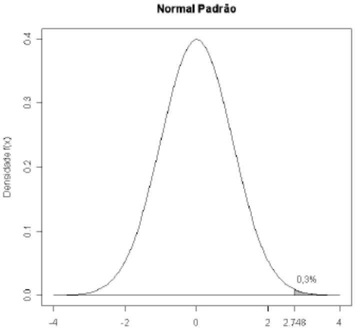
Example

Calcular a área sob a curva para Z maior que $2,7$.

A área sob a curva normal para Z maior do que $2,7$ é dada por

$$\mathbb{P}(Z \geq 2,7) = \int_{2,7}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] = 1 - 0,9965 = 0,0035$$

ou seja, a probabilidade de Z ser maior do que $2,7$ é $0,35\%$.



Distribuição Normal

Example

Determine a área sob a curva de uma normal padronizada para z entre $-0,2$ e $1,9$.
Para este cálculo, precisamos determinar:

$$\mathbb{P}(-0,2 \leq Z \leq 1,9) = \mathbb{P}(Z \leq 1,9) - \mathbb{P}(Z \leq -0,2) = 0,9713 - 0,4207 = 0,5506.$$

Assim, a área que procuramos é $0,5506$.

Distribuição Normal

Example

Suponha que o peso médio de 800 porcos de uma certa fazenda é de 64kg, e o desvio padrão é de 15kg. Supondo que este peso seja distribuído de forma normal, quantos porcos pesarão entre 42kg e 73kg.

Para resolvermos este problema primeiramente devemos padroniza-lo, ou seja,

$$Z = \frac{x - 64}{15} \sim N(0,1).$$

Então o valor padronizado de 42kg é de $\frac{42-64}{15} \approx -1,47$ e de 73kg é de $0,6$.

Assim a probabilidade é de

$$\mathbb{P}(-1,47 \leq Z \leq 0,6) = \mathbb{P}(Z \leq 0,6) - \mathbb{P}(Z \leq -1,47) = 0,7257 - 0,0708 = 0,6549.$$

Portanto, o número aproximado que se espera de porcos entre 42kg e 73kg é $800 \cdot 0,6549 \approx 524$.

Distribuição Normal

Theorem

Suponha que X *seja uma v.a. tal que* $X \sim N(\mu;\sigma^2)$*. Seja* $Y = aX + b$*, então* Y *terá distribuição normal* $Y \sim N[a\mu + b; (a\sigma)^2]$.

Demonstração:
O fato que $E(Y) = a\mu + b$ e $V(Y) = (a\sigma)^2$ decorre imediatamente das propriedades do valor esperado e da variância, apresentadas em aulas anteriores.
O fato que Y terá distribuição normal segue do fato que Y é uma função de X.

Distribuição Normal

- Se X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ e se $Y = (X - \mu)/\sigma$ então Y terá distribuição $N(0, 1)$

Demonstração
É evidente que Y é uma função linear de X, e, por isso, o teorema anterior se aplica.
Assim, com $a = 1/\sigma$ e $b = \mu/\sigma$, tem-se

$$N[a\mu + b; (a\sigma)^2] = N[\mu/\sigma - \mu/\sigma; \sigma^2/\sigma^2]$$

Distribuição Normal

- Como resultado temos o valor esperado da normal é:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \mu$$

- A variância é :

$$\text{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2\left(X\right) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$