AULA 18 - Distribuição Exponencial

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Distribuição Exponencial

- Um processo no qual os eventos ocorrem de forma contínua e independente a uma taxa média constante .
- É o análogo contínuo da distribuição geométrica, e tem a propriedade chave de ser sem memória.
- Esta distribuição tem sido usada extensivamente como um modelo para o tempo de vida de certos produtos e materiais.
- Exemplo: tempo de vida de óleos isolantes e dielétricos, entre outros.

Distribuição Exponencial

Definition

A variável aleatória X tem distribuição Exponencial com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se tiver função densidade de probabilidade dada por:

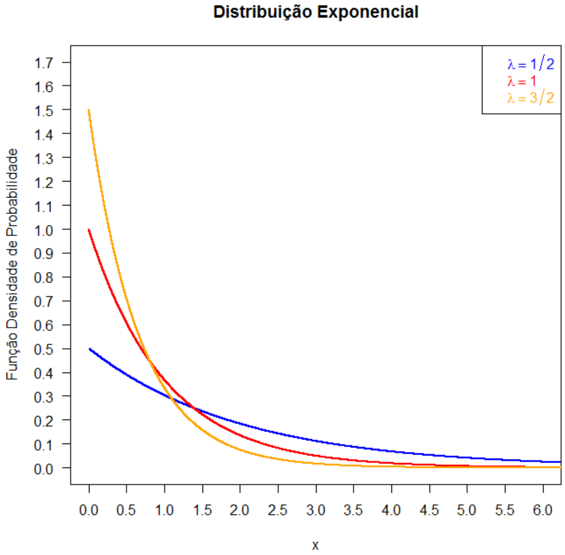
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

em que λ é o parâmetro de taxa da distribuição e deve satisfazer $\lambda > 0$.
Neste caso, λ é o tempo médio de vida e x é um tempo de falha. O parâmetro deve ter a mesma unidade do tempo da falha x. Isto é, se x é medido em horas, λ também será medido em horas.

Utilizamos a notação $X \sim$ Exp(λ).

Distribuição Exponencial

O gráfico abaixo mostra a distribuição exponencial com parâmetros $\lambda = 1/2, 1$ e $3/2$.



Propriedades da distribuição Exponencial

- A função de distribuição acumulada $F(x)$ é dada por

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

- Valor esperado é:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\frac{1}{\lambda}x}dx$$

e, resolvendo esta integral por partes temos que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Propriedades da distribuição Exponencial

- Sendo o valor esperado:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Para encontrar a variância de X, vamos primeiramente calcular o valor esperado de X^2.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

e, resolvendo a integral por partes, obtemos que

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Portanto a variância de X é dada por

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Propriedades da distribuição Exponencial

- Uma variável aleatória distribuída exponencialmente T obedece à relação
  $$\Pr(T > s + t \mid T > s) = \Pr(T > t), \qquad \forall s, t \geq 0.$$
  $$\begin{aligned}
  \Pr(T > s + t \mid T > s) &= \frac{\Pr(T > s + t \cap T > s)}{\Pr(T > s)} \\
  &= \frac{\Pr(T > s + t)}{\Pr(T > s)} \\
  &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\
  &= e^{-\lambda t} \\
  &= \Pr(T > t).
  \end{aligned}$$
  A distribuição exponencial e a geométrica são as únicas com probabilidade sem memória.
  Por exemplo, se um evento não ocorreu após 30 segundos, a probabilidade condicional de que a ocorrência leve pelo menos mais 10 segundos é igual à probabilidade incondicional de observar o evento mais de 10 segundos após o tempo inicial.

Exemplo 1 da distribuição Exponencial

O tempo até a falha do ventilador de motores a diesel tem uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{1}{28700}$ horas. Qual a probabilidade de um destes ventiladores falhar nas primeiras 24000 horas de funcionamento?

$$\mathbb{P}[0 \leq X \leq 24000] = \int_0^{24000} f(x)dx = \int_0^{24000} \frac{1}{28700} \exp\left(-\frac{x}{28.700}\right) = 0,567.$$

Ou seja, a probabilidade de um destes ventiladores falhar nas primeiras 24000 horas de funcionamento é de, aproximadamente, $56,7\%$.

Exemplo 2 da distribuição Exponencial

Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas. 70% das lâmpadas são produzidas pelo método A e as demais pelo método B. A duração da lâmpada depende do método pelo qual ela foi produzida, sendo que as produzidas pelo método A seguem uma distribuição exponencial com parâmetro $1/80$ e as do método B seguem uma exponencial de parâmetro $1/100$. Qual a probabilidade de que, se escolhermos uma lâmpada ao acaso, ela dure mais de 100 horas?
Sejam $X_A \sim$ Exp$(1/80)$ e $X_B \sim$ Exp$(1/100)$ e considere os evento C=Uma lâmpada durar mais de 100 horas, A=A lâmpada ter sido fabricada pelo método A e B=A lmpada ter sido fabricada pelo método B.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X_A \geq 100)0,7 + \mathbb{P}(X_B \geq 100)0,3$$

$$\mathbb{P}(C) = 0,7\int_{100}^{\infty} \frac{1}{80} e^{-\frac{x}{80}} dx + 0,3\int_{100}^{\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx \approx 0,2 + 0,11 = 0,31.$$

A probabilidade de que uma lâmpada escolhida ao acaso dure mais de 100 horas é de 31%.