AULA 3 - Modelos probabilísticos, axiomas da probabilidade, espaços amostrais

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Experimento não determinístico

Definition (Experimento não determinístico)

Um experimento não determinístico, ϵ é qualquer processo cujo resultado não pode ser previsto com certeza

Example

- Lançar uma moeda ou um dado e observar qual das faces da moeda ou do dado fica para cima.
- Número de peças defeituosas detectadas num lote de peças num processo de produção.
- Número de chamadas registradas por uma central telefônica num dado intervalo de tempo.

Espaço amostral

Definition (Espaço amostral)

Um espaço amostral de um experimento, S (é o mesmo conjunto universal U), é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento

Example

- No lançamento de uma moeda, $S = \{H, T\}$; no lançamento de um dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Na inspeção de peças defeituosas num dado lote, $S = \{0, 1, ..., n\}$, n suficientemente grande.
- No experimento medir a altura (m) de uma pessoa escolhida ao acaso $S = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$.

Eventos

Definition (Evento)

Um evento A (com relação a uma espaço amostral S associado com um experimento ϵ) é qualquer subconjunto do espaço amostral, isto é, qualquer coleção de resultados possíveis do experimento.

obs: esse subconjunto pode incluir o próprio S e o vazio $\emptyset$

Example

- No lançamento de uma moeda, $A_1 = \{\emptyset\}$, $A_2 = \{H\}, A_3 = \{T\}$ e $A_4 = \{H, T\} = S$.
- Na inspeção de peças defeituosas num dado lote, $A = \{x|2 \leq x \leq 5\}$
- No experimento medir a altura (m) de uma pessoa escolhida ao acaso $A = \{x|1,7 \leq x \leq 1,9\}$.

Experimentos, Espaços amostrais e Eventos

Obervações:

- Quando realizado, um experimento produz exatamente **um** resultado dentre os possíveis.
- Assume-se experimento **único**. Assim, lançar n vezes uma moeda é um experimento, não n.
- Diz-se que um evento A **ocorre** se o resultado do experimento pertence a A.
- A definição do espaço amostral é determinada pela natureza do experimento.

Experimentos, Espaços amostrais e Eventos

Exemplo: Dois jogos com dez lançamentos sucessivos de uma moeda

- **Jogo 1**: Você recebe 1 real cada vez que aparece cara.
  Apenas o **número** de caras importa e

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

- **Jogo 2**: Você recebe 1 real por lançamento e o valor recebido dobra cada vez que aparece cara.
  A sequência dos resultados importa e

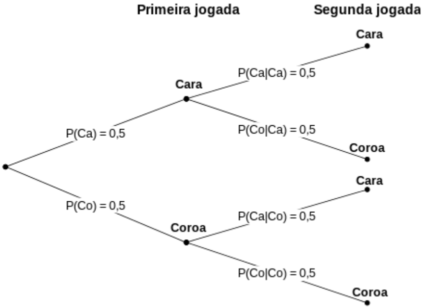
$$S = \{\text{todas as sequencias de dez lançamentos}\}$$

Experimentos, Espaços amostrais e Eventos

Modelos Sequenciais

- Muitos experimentos possuem caráter sequencial:
- Nestes casos é util descrever o experimento e seus resultados por meio de uma árvore de probabilidade.

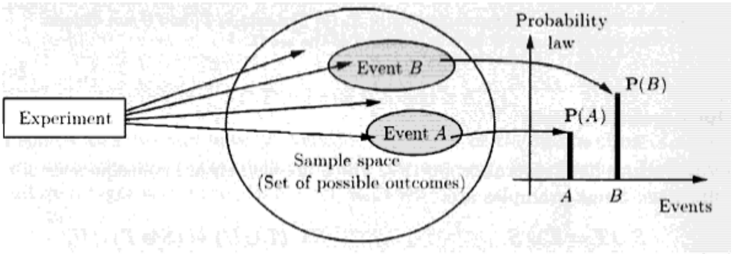
Exemplo: Um diagrama de árvores para o lançamento de duas moedas



Axiomas da Probabilidade

Definition (Lei da Probabilidade)

A função que atribui a cada evento $A \in S$ um número não-negativo denotado por $P(A)$ é chamado de lei de probabilidade.



Axiomas da Probabilidade

Definition

Se ϵ um experimento e S um espaço amostral associado com ϵ. Para cada evento A associamos um número real, denotado por $P(A)$ e chamado probabilidade de A, satisfazendo as seguintes propriedades.

1. (Não negatividade) $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. (Normalização) $P(S) = 1$.
3. (Aditividade) Se A e B são eventos disjuntos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

. Se $A_1, A_2, ...$ é uma sequência de eventos disjuntos de um espaço amostral

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

. Para qualquer n finito temos...

Axiomas da Probabilidade

Leis e Axiomas da Probabilidade

- O número $P(A)$ codifica conhecimento ou crença sobre a possibilidade conjunta dos elementos de A.
- A crença de que cara surge metade das vezes num longa repetição de lançamentos de uma moeda é codificada por $P(A) = 1/2$.
- A lei de probabilidade pode ser visualisada imaginando-se uma unidade de massa espalhada sobre S.
  - A massa total atribuída coletivamente a A é $P(A)$
  - Se A e B são disjuntos, a soma das massas é $P(A \cup B)$.

Axiomas da Probabilidade

Propriedades derivadas

- $P(A^c) = 1 - P(A)$. A probabilidade do complementar de A é obtida dos axiomas:

$$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

  Logo, $P(\emptyset) = P(S^c) = 0$. Diz-se que a probabilidade do evento certo, S, é 1, e do evento impossível, $\emptyset$, é 0.

- Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$. Dos Axiomas e com auxílio do Diagrama de Venn,

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A)$$

  pois $P(A^c \cap B) \geq 0$.

Axiomas da Probabilidade

Propriedades derivadas

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Dos Axiomas e com auxílio do Diagrama de Venn,

  $$A \cup B = A \cup (A^c \cap B),\ B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

  são disjuntos. Portanto $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$ e

  $$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A \cap B) + P(A \cup B) - P(A)$$

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. Demonstração imediata a partir da propriedade anterior, pois $P(A \cap B) \geq 0$.

Axiomas da Probabilidade

Propriedades derivadas

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$. Dos Axiomas e com auxílio do Diagrama de Venn,

$$A \cup B \cup C = A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

é a união de conjuntos disjuntos. Logo,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$$

Também podemos escrever: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Espaço amostral finito

No lançamento de uma moeda $S = \{H, T\}$, onde H é a cara e T é a coroa. Os eventos são: $\{H, T\}$, $\{H\}$, $\{T\}$, e $\emptyset$.

- Se a moeda é honesta, H e T são igualmente prováveis $P(\{H\}) = P(\{T\}) = 1/2$, e $P(\emptyset) = 0$
- O axioma da aditividade implica que $P(\{H, T\}) = 1$, o que é consistente com o axioma da normalização. Logo,

$$P(\{H, T\}) = 1,\ P(\{H\}) = P(\{T\}) = 1/2, \text{ e } P(\emptyset) = 0$$

define uma lei de probabilidade.

Espaço amostral finito

Em três lançamentos de uma moeda

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

- Assume-se que todos os resultados são igualmente prováveis; atribui-se probabilidade $1/8$ a cada um.
- Exemplo: se $A = \{\text{exatamente 2 caras ocorrem}\}$

$$P(A) = P(\{HHT, HTH, THH\})$$

$$P(A) = P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$$

$$P(A) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$$

Espaço amostral finito

Lei de Probabilidade Discreta

Quando S é finito, define-se a lei de probabilidade pelas probabilidades dos eventos singulares. A probabilidade de $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \in S$ é

$$P(\{a_1, a_2, ..., a_k\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_k\})$$

Lei de Probabilidade Discreta Uniforme

Se S consiste de k resultados possíveis igualmente prováveis e A é qualquer evento,

$$P(A) = \frac{\text{numero de elementos de A}}{k}$$

Ex: Se lança um dado e suponha que todos os resultados são igualmente prováveis. Seja um evento A que ocorre se e somente se aparece um número maior que 4. Então $A = \{5, 6\}$. Assim $P(A) = 1/6 + 1/6 = 2/6$