AULA 4 -Probabilidade Condicional e Regra de Bayes

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Probabilidade Condicional: exemplos

- A soma dos resultados de dois lançamentos de um dado é 9. Qual a probabilidade do primeiro resultado ter sido 6?
- Num jogo de advinhação de palavras, a primeira letra da palavra é “a”. Qual a probabilidade da segunda ser “b”?
- Em um lote temos 80 peças sem defeito e 20 com defeito. Definimos os eventos: $A = \{$a primeira peça defeituosa$\}$ e $B = \{$a segunda peça defeituosa$\}$, com reposição $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ Se escolhemos sem reposição é verdade que $P(A) = \frac{1}{5}$, mas qual é o valor de $P(B)$? Neste caso devemos saber se o evento A ocorreu ou não.

Probabilidade Condicional

Dado um experimento, S e uma lei de probabilidade, suponha que o resultado do experimento pertence a um evento A.

- Deseja-se quantificar a probabilidade de que o resultado também pertença a um outro evento A.
- O objetivo é construir uma nova lei de probabilidade que leve em conta o conhecimento disponível.
- A nova lei é a probabilidade condicional de A dado B, denotada por $P(A|B)$.

Definição

A probabilidade condicional é um conceito da probabilidade que envolve dois eventos de forma que estuda a probabilidade de o evento A ocorrer, sabendo que o evento B já ocorreu.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ sendo $P(B) > 0$

Probabilidade Condicional

Dado um evento B,

1. $P(A|B) \geq 0$ para todo evento A.
2. Se A_1 e A_2 são eventos disjuntos,

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

3. $$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Probabilidade Condicional

- Como $P(A|B)$ é uma lei de probabilidade, todas as demais propriedades são válidas.
  Exemplo: Lembrando que
  $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \leq P(A) + P(C)$
  assim $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$ ou seja, de forma geral temos

$$P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$$

- Como $P(B|B) = 1$, a lei $P(A|B)$ está concentrada em B. Os resultados fora de B podem ser descartados.
- A probabilidade condicional pode ser vista como uma lei de probabilidade definida no universo B.
- Se S possui um número finito de resultados igualmente prováveis,

$$P(A|B) = \frac{\text{numero elementos de } A \cap B}{\text{numero elementos de } B}$$

Probabilidade Condicional

Example

Suponha que na fábrica tenha 100 máquinas. Algumas são elétricas (E) e outras manuais (M). Também algumas são novas (N) e outras usadas (U).

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Uma pessoa entra na fábrica, escolhe aleatoriamente uma máquina e descobre que ela é nova. Qual é a probabilidade de ser elétrica? Na nossa notação queremos calcular $P(E|N)$ Somente considerando o espaço amostral reduzido de N (70 novas) teremos que: $P(E|N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$. Usando a definição de probabilidade condicional teremos que:

$$P(E|N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}$$

Probabilidade Condicional

Regra da multiplicação

- A consequênciamais importante da definição de probabilidade condicional se obtem escrevendo da seguinte maneira:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

que é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

De forma geral temos: $P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2)...P(A_n|A_1, ...A_{n-1})$

Probabilidade Condicional

- Anteriormente usamos o conceito de probabilidade condicional com o objetivo de avaliar a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos.
- Para calcular a probabilidade de um único evento A, podemos aplicar este conceito de outra maneira.

Probabilidade Condicional

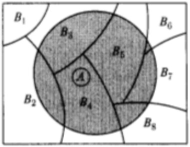
Definition

Dizemos que os eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ representam uma partição do espaço amostral S se:

a $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

b $\cup_{i=1}^{k} B_i = S$

c $P(B_i) > 0$ para todo i



Pelo Diagrama de Venn temos k=8, podemos escrever:
$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup ... \cup A \cap B_k$ alguns conjuntos podem ser vazios $A \cap B_j$ e não invalidam a decomposição de A.

Exemplo: lançamento de um dado
$B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$ e $B_3 = \{6\}$ representam uma partição do espaço amostral.

Probabilidade Condicional

- Considerando que todas as interseções são pares mutuamente excludentes, podemos aplicar a propriedade aditiva para este evento.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$$

- Cada termo $P(A \cap B_j)$ pode ser expresso como $P(A|B_j)P(B_j)$ e assim, obtemos o chamado **Teorema da Probabilidade Total**

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + ... + P(A|B_k)P(B_k)$$

- O TPT é util para calcular a probabilidade de eventos B para os quais as probabilidades $P(B|A_i)$ são conhecidas. As escolhas da partição do $A_1, ..., A_n$ é crucial.

Probabilidade Condicional

- Sejam $A_1, ..., A_n$ eventos disjuntos que formam uma partição do espaço amostral. Assuma que $P(A_i) > 0$ para todo i.

Regra de Bayes Para todo evento B tal que $P(B) > 0$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + ... + P(A_n)P(B|A_n)}$$

- A regra de Bayes relaciona probabilidades condicionais $P(A|B)$ com probabilidades na forma reversa, $P(B|A)$.

Probabilidade Condicional

A regra de Bayes é usada frequentemente para se fazer uma inferência.

- Assuma que existam várias causas que podem resultar num certo efeito.
- Exemplo: surge um ponto na tela do radar (efeito). O ponto é causado por uma aeronave ou por outra coisa.
- Observa-se o efeito, evento B. Deseja-se determinar a causa, um dos eventos $A_1, ..., A_n$.
- $P(B|A_i)$ é a probabilidade de se observar o efeito B quando a causa A_j está presente.

Probabilidade Condicional

Example (Detecção por radar)

Considere os eventos $A = \{\text{uma aeronave está presente}\}$ e $B = \{\text{o radar registra a presença}\}$. As probabilidades são $P(A) = 0.05$, $P(B|A) = 0.99$, e, $P(B|A^c) = 0.1$

Qual é a probabilidade da aeronave estar presente dado que o radar fez um registro ($P(A|B)$)?

Usando a regra de Bayes temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}$$

$$P(A|B) = \frac{0.05 \times 0.99}{0.05 \times 0.99 + 0.95 \times 0.1} = 0.34$$