AULA 5 - Independência, Combinatória e permutações

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Independência

Um importante caso particular da probabilidade condicional surge quando a ocorrência de B não altera a probabilidade do evento A ocorrer.

Independência

Diz-se que os eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A)$$

- Pela definição de probabilidade condicional $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, sendo A e B independentes temos $P(A) = P(A \cap B)/P(B)$ assim $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Por simetria, se A é independente de B, então B é independente de A.

Exercício: Dois eventos são independentes se forem disjuntos?

Independência

Dado um evento C, os eventos A e B são **condicionalmente independentes** se

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Pela definição de probabilidade condicional e regra da multiplicação,

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C)P(B|C)P(A|B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(B|C)P(A|B \cap C) \end{aligned}$$

Independência

Comparando as expressões

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \quad \text{e}$$

$$P(A \cap B|C) = P(B|C)P(A|B \cap C)$$

obtém-se $(P(B|C) \neq 0)$

$$P(A|B \cap C) = P(A|C)$$

- Dado que C ocorreu, a informação de que B também ocorreu **não altera** a probabilidade de A.

Independência

Definition

Dizemos que três eventos, A, B e C são independentes se e somente se todas as condições seguintes se mantém:
$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C)$
$P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Generalizando temos...

Definition

O n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se e somente se para $k = 2, 3, ..., n$

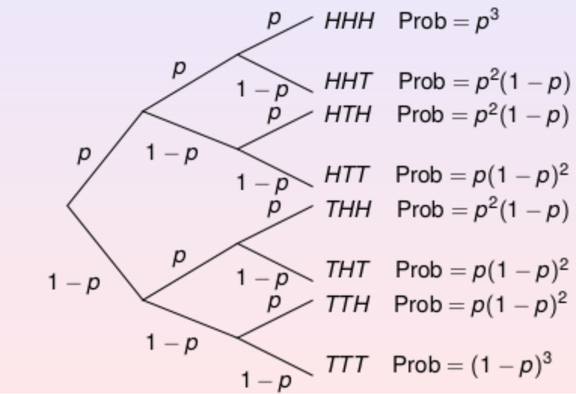
$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})$$

Independência

Ensaios Independentes

- Num experimento envolvendo uma sequência de estágios independentes e idênticos, tem-se ensaios independentes.
- Se existem apenas dois resultados possíveis em cada estágio, obtém-se ensaios independentes de Bernoulli.

Ex: três lançamentos de uma moeda (n=3).



Independência

No experimento,

- Numa sequência de tamanho 3, a probabilidade de k ($\geq n$) caras (e $n-k$ coroas) é $p^k(1-p)^{3-k}$
- No caso de uma sequência de tamanho n, k caras e $n-k$ coroas tem probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Deseja-se a probabilidade

$$
\begin{aligned}
p(k) &= P(k \,\text{caras em n lançamentos}) \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

em que $\binom{n}{k}$ significa "número de sequências de tamanho n contendo k caras".

Independência

- Os números $\binom{n}{k}$, referidos como **k-combinações de n** são chamados de coeficientes binomiais.
- Ainda na aula, demonstra-se que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

$$i! = i \cdot (i-1) \cdots 2 \cdot 1 \quad (0! = 1)$$

- A soma das probabilidades binomiais $p(k)$ deve ser 1. A igualdade

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

é a chamada **Fórmula Binomial**

Contagem

O cálculo de probabilidades frequentemente envolve contar o número de resultados em vários eventos.

- Se o espaço amostral S possui um número finito de resultados igualmente prováveis, para qualquer evento A,

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}}$$

- Se a probabilidade de cada resultado é conhecida e igual a p, então $P(A) = p \cdot (\text{número de elementos de A})$.
- Exemplo: quantas sequências de tamanho n resultantes de n lançamentos de uma moeda contém k caras?
- Questões deste tipo constituem grande parte do área conhecida como **Análise Combinatória**

Contagem

Princípio da Contagem

Considere um processo consistindo de r estágios. Suponha que

- Existem n_1 resultados possíveis no estágio 1.
- Para cada resultado possível no estágio 1, existem n_2 resultados possíveis no estágio 2.
- Genericamente, para qualquer resultado possível no estágio $i-1$, existem n_i resultados possíveis no estágio i.

Então o número total de resultados possíveis num processo de r estágios é o produto

$$n_1 n_2 \cdots n_r$$

Os valores $n_1 n_2 \cdots n_r$ podem ser diferentes, mas n_i deve ser constante para cada resultado do estágio $i-1$.

Contagem

Considere n objetos distintos. Seja k um inteiro positivo ($k \leq n$). De quantas maneiras diferentes é possível arranjar sequências de k objetos a partir dos n objetos dados?

- O primeiro elemento da sequência pode ser escolhido de n maneiras diferentes.
- O $i-$ésim elemento da sequência pode ser escolhido de $n-(i-1)$ maneiras diferentes.

Pelo Princípio da Contagem, o número total de $k-$permutações é igual a

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-k+1) &= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Contagem

Permutações

Se $k = n$, o número de $n-$permutações, chamadas simplesmente de permutações, é

$$n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Example

Número de palavras que podem ser formadas a partir de quatro letras distintas do alfabeto (26 letras, incluindo K, W e Y):

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{26!}{22!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 358800$$

Contagem

Exitem n pessoas interessadas em formar um “comitê” de k pessoas. Quantos diferentes comitês são possíveis?

- Abstratamente, deseja-se saber o número de combinações de k objetos selecionados de n objetos distintos.
- Diferentemente da $k-$permutação, a ordem dos elementos na combinação não é levada em conta.

Exemplo:
As $2-$permutações de A, B, C e D são

AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CD,DA,DB,DC.

As combinações de 2 letras de A, B, C e D seriam

AB,AC,AD,BC,BD,DC.

Contagem

O número de combinações de k objetos dentre n objetos distintos pode ser calculado da seguinte maneira: Quantos diferentes comitês são possíveis?

- O número de $k-$permutações é igual ao número de combinações vezes o número de permutações de k objetos. Logo
$$\frac{n!}{(n-k)!} = (\text{número de combinações}) \cdot k!$$
- Representando o número de combinações de k objetos dentre n por $\binom{n}{k}$, obtém-se

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Contagem

Uma combinações é uma escolha de k dentre um conjunto de n elementos

- Uma combinação pode ser vista como uma partição do conjunto. Uma parte contém k elementos, a outra $n - k$.
- A idéia pode ser generalizada para uma partição em r subconjuntos disjuntos.

Sejam $n_1, n_2, ..., n_r$ números inteiros não negativos tais que

$$n_1 + n_2 + ... + n_r = n$$

Considere uma partição do conjunto em r subconjuntos disjuntos. O $i-$ésimo subconjunto contém n_i elementos.

Contagem

O número total de partições pode ser obtido da seguinte forma:

- Existem $\binom{n}{n_1}$ maneiras de formar os elementos do primeiro subconjunto.
- Existem $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneiras de formar os elementos do segundo subconjunto.
- Existem $\binom{n-n_1-\cdots-n_{i-1}}{n_i}$ maneiras de formar elementos do $i-$ésimo subconjunto.
- Pelo Princípio da Contagem, o número total de escolhas é $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$

Contagem

Após cancelar termos fatoriais, obtém-se o chamado coeficiente multinomial:

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Example

Uma classe consiste de 4 alunos de graduação e 12 alunos de pós-graduação. Qual a probabilidade de cada grupo incluir um aluno de graduação?

- Um resultado típico do experimento é uma partição de 16 alunos em grupos de 4 alunos. O total das partições é

$$\binom{16}{4, 4, 4, 4} = \frac{16!}{4!4!4!4}$$

Contagem

Example (continuação)

- Os 4 alunos de gradução podem ser distribuídos de $4!$ maneiras distintas entre os 4 grupos.
- Os restantes 12 alunos podem ser distribuídos de

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!3!3!3}$$

maneiras distintas.
- Pelo Princípio da Contagem, o evento de interesse pode ocorrer de

$$4!\frac{12!}{3!3!3!3}$$

maneiras diferentes.

Contagem

Example (continuação)

- A probabilidade de que o evento ocorra é portanto

$$\frac{\frac{4!12!}{3!3!3!3}}{\frac{16!}{4!4!4!4}} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} \approx 0.14$$