AULA 6 - Variável aleatória unidimensional discreta

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Variável aleatória

- Nas aulas anteriores definimos o espaço amostral de um experimento, mas não especificamos um resultado individual associado a um número.
  - Exemplo 1: Peça defeituosa e não defeituosa, podemos associar a 1 e 0.
  - Exemplo 2: Temperatura em um período de 24 horas, anotamos a temperatura máxima e mínima do dia e a média das temperaturas máxima e mínima.
- Em muitas situações queremos associar um número real x a cada um dos elementos s do espaço amostral S, i. e., $x = X(s)$ é o valor de uma função X do espaço amostral aos números reais.

Variável aleatória

Definition

Seja ϵ um experimento e S o espaço amostral associado a ele. Uma função X que associa a cada um dos elementos $s \in S$, um número real $X(s)$, se chama variável aleatória.

Example

Lançamos duas moedas e consideramos o espaço amostral com este experimento. $S = \{CC, CS, SC, SS\}$. Definimos a variável aleatória como: X é o número de caras obtidas nos dois lançamentos. Portanto,
$X(CC) = 2$, $X(CS) = X(SC) = 1$, e $X(SS) = 0$

- O espaço R_x é o conjunto de todos os valores possíveis de X.
- O S é o espaço amostral que corresponde aos resultados não numéricos do experimento. O R_x é o espaço amostral associado com a variável aleatória X, que representa a característica numérica.
- Se $X(s) = s$ teremos $S = R_x$

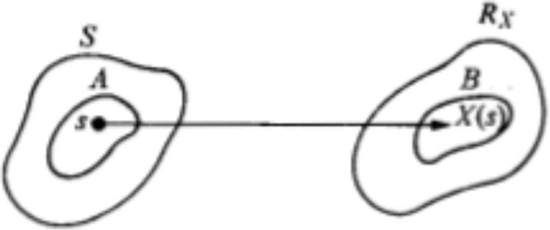
Variável aleatória

Definition

Se ϵ é um experimento e S um espaço amostral. Seja X uma variável aleatória definida em S e seja R_x o ocorrido. Seja B um evento com respeito a R_x, isto é, $B \subset R_x$. consideramos que A se define como:

$$A = \{s \in S | X(s) \in B\}$$

Pela definição acima A contém todos os resultados de S para os quais $X(s) \in B$. Neste caso dizemos que A e B são eventos equivalentes.



Variável aleatória

Example (lançamento de duas moedas)

$S = \{CC, CS, SC, SS\}$ Seja X o número de caras obtidas. Sendo $R_x = \{0, 1, 2\}$. Seja $B = \{1\}$. Dado que $X(CS) = X(SC) = 1$ se e somente se $X(s) = 1$, temos que $A = \{CS, SC\}$ é equivalente a B.

Definition

Seja B um evento de R_x, então definimos $P(B)$ como segue:

$$P(B) = P(A) \quad \text{onde} \quad A = \{s \in S | X(s) \in B\}$$

Assim definimos $P(B)$ igual a probabilidade do evento $A \subset S$, que é equivalente a B.

Variável aleatória

Example (probabilidade no lançamento de duas moedas)

Se as moedas são justas temos $P(CS) = P(SC) = \frac{1}{4}$. Portanto, $P(CS, SC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Em suma o evento $\{X = 1\}$ é equivalente ao evento $\{CS, SC\}$, usando a definição acima temos $P(X = 1) = P(CS, SC) = \frac{1}{2}$

No caso deste exemplo estamos interessados em $R_x = \{0, 1, 2\}$ e as probabilidades associadas $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Variável aleatória discreta

Definition

Seja X uma variável aletória. Se o número de valores possíveis de X (R_x ocorrido) é finito e infinito enumerável, chamamos X uma variável aleatória discreta.

- Denotamos os valores possíveis de X como $x_1, x_2, ..., x_n, ...$
- A descrição probabilística de uma variável aleatória discreta é definida por:

Definition

Com cada possível resultado x_i associamos um número $p(x_i) = P(X = x_i)$ chamada probabilidade de x_i. Os números $p(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ devem satisfazer as seguintes condições:

a $p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$

b $\sum_{i=1} p(x_i) = 1$

A função p se chama de função de probabilidade da variável aleatória X.

Variável aleatória discreta

- A importante forma para caracterizar uma variável aleatório é via as probabilidades dos valores que eles podem tomar.
- Para uma variável aleatória discreta X, isto é capturado pela função probabilidade de X, que denotaremos por p_X.
- Se x é qualquer valor possível de X a função de massa de probabilidade de x denotado $p_X(x)$ é a probabilidade do evento $\{X = x\}$ consistindo todos os resultados:

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

Variável aleatória discreta

Example (lançamento de duas moedas)

No exemplo que mostramos acima de lançar duas moedas e sendo X o número de caras obtidas, a função de massa de probabilidade
$p_X(x) = \frac{1}{4}$ se x=0 ou x=2
$p_X(x) = \frac{1}{2}$ se x=1
$p_X(x) = 0$ caso contrário

Note que $\sum_x p_X(x) = 1$ o x inclui todos os valores numéricos possíveis de X.
Por exemplo, se X é o número de caras obtido em dois lançamentos independentes de uma moeda honesta, como acima, a probabilidade de pelo menos uma cara é
$P(X > 0) = \sum_{x=1}^{2} p_X(x) = 1/2 + 1/4 = 3/4$

Variável aleatória Bernoulli

- Considere o lançamento de uma moeda, no qual temos cara com probabilidade p, e coroa com probabilidade $1 - p$.
- A variável aleatória Bernoulli toma dois valores 1 e 0 dependendo se o resultado é cara ou coroa:

$$X = 1 \quad \text{se for cara;} \quad X = 0 \quad \text{se for coroa}$$

A função de probabilidade de massa é:

$$p_X(k) = p \quad \text{se} \quad k = 1; \quad p_X(k) = 1 - p \quad \text{se} \quad k = 0$$

Variável aleatória Bernoulli

- Embora seja simples, mas esta variável aleatória Bernoulli é bastante usada em situações que temos apenas dois resultados.
- Outros exemplos:
  - O estado do telefone em um dado tempo que pode ser livre ou ocupado.
  - Uma pessoa que pode estar saudável ou doente com uma certa doença.
  - A preferência de uma pessoa, no qual pode ser contra ou a favor de uma candidato político.
- Se combinarmos múltiplas va Bernoulli, podemos construir uma va mais complicada tal como a va binomial.

Variável aleatória Binomial

- Uma moeda é lançada n vezes. A cada lançamento, temos cara com probabilidade p e coroa $1-p$ independente do lançamento anterior.
- Seja X o número de caras na sequência de n-lançamentos.
- A função de probabilidade de massa de X consiste das probabilidades da binomial que forma calculadas na aula anterior.

$$p_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

- A normalização:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$