AULA 7 - Variável aleatória unidimensional contínua e mista

Susan Schommer

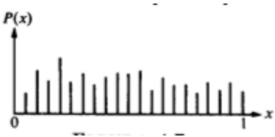
Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Variável aleatória

- Vimos na aula anterior que a variável aleatória **discreta** é definida:
  - Numa amplitude determinada, admite um número finito de valores, ou
  - tem uma quantidade enumerável de valores
- Na aula de hoje veremos variável aletória **contínua**
  - Pode tomar um número infinito de valores
  - Pode ser associada a uma mensuração em uma escala contínua

Variável aleatória

- Em variáveis aleatórias discretas supomos que X pode ser formado por um grande número de valores. Por exemplo: valores x no intervalo $0 \leq x \leq 1$ da forma $0, 0.01, 0.02, ..., 0.98, 0.99, 1.00$. Sendo que cada um desses valores está associado um número não negativo $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, ...$, e soma 1.



- Agora se quisermos considerar **todos** os valores de x no intervalo $0 \leq x \leq 1$, como podemos atribuir probabilidades pontuais para um X não enumerável? Faz sentido considerar $p(x_i)$?
- Então queremos substituir a função p definida somente para $x_1, x_2, ...$ por uma função f definida para **todos** os valores de x no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Variável aleatória contínua

Definition

Se diz que X é uma variável aleatória contínua, se existe uma função f, chamada **função de densidade de probabilidade** (fdp) de X, que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para todo x
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. Para qualquer a e b, tal que $-\infty < a < b < +\infty$ temos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

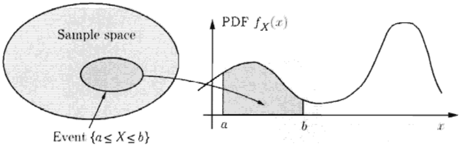


Ilustração de uma fdp. A probabilidade que X toma os valores em um intervalo $[a, b]$ é $\int_a^b f(x)dx$, no qual é a área sombreada na figura.

Variável aleatória contínua

- Pela definição temos a probabilidade de um ponto isolado é sempre zero, ou seja, $P(X = c) = \int_c^c f(x)dx = 0$. Então, quando X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de ocorrer um valor especifico é zero.

Example

Suponha que escolhamos um número ao acaso no intervalo $[0, 1]$. Qual é a probabilidade de escolhermos o número $0, 50$?

Variável aleatória contínua

Example

Seja $A = \{x : -1 < x < 5\}$ e seja X uma variável aleatória tal que sua função densidade de probabilidade seja $f(x)$ definida abaixo, com c sendo uma constante. Qual deve ser o valor da constante c?

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução: Como f é uma função densidade de probabilidade ela deve satisfazer a condição que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{5} c dx = c \cdot (5 - (-1)) = 6c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}.$$

Função de distribuição acumulada

Definition

A **função de distribuição acumulada** (fda) de uma variável aleatória X é uma função que a cada número real x associa o valor

$$F(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- O conhecimento da fda é suficiente para entendermos o comportamento de uma variável aleatória.
- Ela é chamada de fda, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a x.

Função de distribuição acumulada

- No caso de uma variável aleatória discreta:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- Para uma variável aleatória contínua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_i)\, dx$$

Função de distribuição acumulada

Example

Vamos encontrar a função distribuição acumulada de X: "número de caras obtidas nos três lançamentos".
Os valores que X pode assumir são $0, 1, 2$ e 3. Portanto,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{KKK\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{CKK\}) + \mathbb{P}(\{KCK\}) + \mathbb{P}(\{KKC\}) = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{CCK\}) + \mathbb{P}(\{CKC\}) + \mathbb{P}(\{KCC\}) = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{CCC\}) = \frac{1}{8}.$$

Função de distribuição acumulada

Example (continuação)

Portanto,

$$\text{se } x < 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = 0,$$

$$\text{se } 0 \leq x < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8},$$

$$\text{se } 1 \leq x < 2 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\text{se } 2 \leq x < 3 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{se } x \geq 3, \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1.$$

Desta forma, temos que a fda de X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0; \\ 1/8, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ 1/2, \text{ se } 1 \leq x < 2; \\ 7/8, \text{ se } 2 \leq x < 3; \\ 1, \text{ se } x \geq 3. \end{cases}.$$

Função de distribuição acumulada

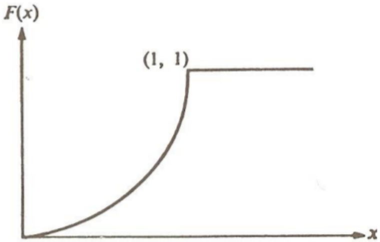
Example

Seja X uma variável contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Portanto, a fda é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ \int_0^x 2s\ ds = x^2, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



Função de distribuição acumulada

Example

O tempo de validade, em meses, de um óleo lubrificante num certo equipamento está sendo estudado. Seja $S = \{\omega : 6 < \omega \leq 8\}$. Uma variável de interesse é o próprio tempo de validade e, nesse caso, definimos $X(\omega) = \omega$; $\forall\, \omega \in S$. Por exemplo, podemos tomar a seguinte fda de X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 6; \\ (x-6)/2, \text{ se } 6 \leq x < 8; \\ 1, \text{ se } x \geq 8. \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X têm duas propriedades básicas:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
2. F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ teremos $F(x_1) \leq F(x_2)$

- Se X é uma variável aleatória contínua, então

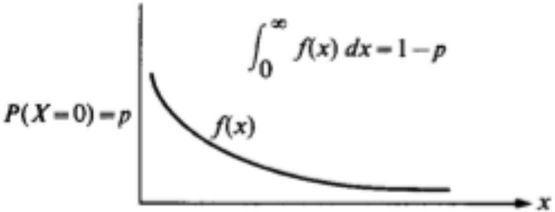
$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = f(x)$$

- Se X é uma variável aleatória discreta $p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})$

Distribuições mistas

Example

Suponha-se que estejamos ensaiando algum equipamento e façamos igual a X o tempo de funcionamento. Normalmente pensaríamos em X como uma variável puramente contínua, mas podem surgir situações nas quais queiramos atribuir uma probabilidade $p > 0$ ao resultado $X = 0$ (isto é, há uma probabilidade de que o equipamento não funcione de modo algum). Teríamos, assim, $P(X = 0) = p$ e $P(X > 0) = 1 - p$. Deste modo, p descreveria a distribuição de X no ponto 0, enquanto a fdp f descreveria a distribuição de valores para $X > 0$.



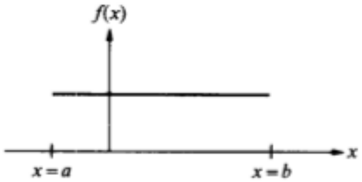
Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- É a mais simples distribuição contínua, entretanto uma das mais importantes e utilizadas dentro da teoria de probabilidade.
- Importante característica: a probabilidade de acontecer um fenômeno de mesmo comprimento é a mesma.

Definition

Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

Example

A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 7]$. Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros?
A função densidade da distribuição Uniforme é dada por $f(x) = \frac{1}{7}$ se $0 \leq x \leq 7$ e zero, caso contraário. Assim, a probabilidade de ocorrer pane nos primeiros 800 metros é:

$$\mathbb{P}(X \leq 0,8) = \int_0^{0,8} f(x)dx = \frac{0,8-0}{7} = 0,1142.$$

Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- Uma v.a. uniformemente distribuída tem uma fdp **constante**, $f(x) = K$, sobre o intervalo de definição.
- Uma variável aleatória uniformemente distribuída representa o análogo contínuo dos resultados igualmente prováveis, no sentido de que a probabilidade para qualquer subintervalo é a mesma para todos aquele que tenham o mesmo comprimento;
- Temos agora uma forma de tornar mais precisa a noção intuitiva de escolher ao acaso um ponto P em um intervalo $[a, b]$.

Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- A distribuição discreta uniforme em si não possui parâmetros. No entanto, é conveniente representar seus possíveis resultados com um intervalo fechado $[a, b]$, sendo a e b considerados os principais parâmetros da distribuição. Com isso a função acumulada dessa distribuição é representada como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se} \quad a \leq x < b \\ 1, & \text{se} \quad x \geq b \end{cases}$$