AULA 8 - Funções de variáveis aleatórias

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Funções de variáveis aleatórias

- Dada uma variável aleatória X, nós podemos gerar outras variáveis aleatórias aplicando transformações em X.
- Por que queremos fazer isso...
  - Em um experimento, um indivíduo pode se interessar mais pela função do resultado e menos pelo resultado em si. Ex: um lançamento de dados, um apostador pode se interessar mais na soma dos resultados e menos nos valores individuais (pode priorizar uma soma de resultado 10 em vez de uma sequência real de 5, 5 ou 6, 4).
  - Derivar propriedades da funções das variáveis aleatórias.

Funções de variáveis aleatórias

Example

Se a variável aleatória X é a temperatura de hoje em graus Celsius, e consideramos a transformação $Y = 1.8X + 32$, no qual dá a temperatura em graus Fahrenheit. Neste exemplo, Y é um função linear de X da forma

$$Y = H(X) = aX + b$$

onde a e b são escalares.

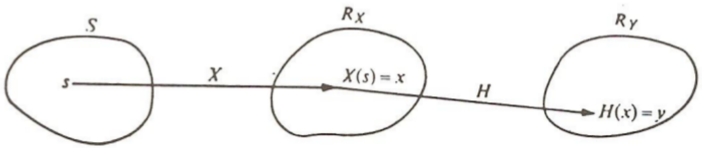
Podemos considerar também funções não lineares da forma:

$$Y = H(X)$$

- Exemplo: $H(x) = \log X$

Funções de variáveis aleatórias

Seja ϵ um experimento e seja S um espaço amostral associado a ϵ. Seja X uma variável aleatória definida em S. Suponha que $y = H(x)$ seja uma função real de x.
Então, $Y = H(X)$ é uma variável aleatória, porque para todo $s \in S$, um valor de Y fica determinado, a saber $y = H[X(s)]$



Nas aulas anteriores definimos a noção de eventos equivalalentes de S e R_x. Extendemos agora este conceito para R_y.

Eventos equivalalentes: probabilidade

Definition

Seja C um evento (subconjunto) associado ao R_Y, de Y. Seja $B \in R_X$ definido assim

$$B = \{x \in R_X : H(x) \in C\}$$

B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Se B e C forem relacionados desse modo, então B e C são denominados eventos equivalalentes.

- Suponha-se que A seja um evento associado a S, o qual é equivalente a um evento B associado a R_X . Então, se C for um evento associado a R_Y o qual é equivalente a B, teremos que A será equivalente a C.
- Quando falamos de eventos equivalentes, esses eventos são associados a diferentes espaços amostrais.

Eventos equivalalentes

Definition

Seja uma variável aleatória X definida no espaço amostral S. Seja R_X o contradomínio de X. Seja H uma função real e considere-se a variável aleatória $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y. Para qualquer evento $C \subset R_Y$, definiremos $P(C)$ assim

$$P(C) = P[\{x \in R_X : H(x) \in C\}]$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente.

- A definição anterior torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y, se conhecemos a distribuição de probabilidades de X e se pudermos determinar o respectivo evento equivalente;

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 1**:
  X é uma variável aleatória discreta e $Y = H(X)$; logo, Y será também uma variável aleatória discreta e
  $y_i = H(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n, ...$
- Exemplo:
  Suponha que a variável aleatória X tome os três valores, -1, 0 e 1, com probabilidades $1/3$, $1/2$ e $1/6$, respectivamente. Seja $Y = 3X + 1$. Nesse caso, os valores possíveis de Y são -2, 1 e 4, tomados com probabilidades $1/3$, $1/2$ e $1/6$.

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Procedimento geral:**
  Sejam $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, os valores possíveis de X, com distribuição de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1, 2, ..., n, ...$$

e seja H uma função tal que, a cada valor y corresponda exatamente um valor x.
Então, a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida do seguinte modo

$$y_i = H(x_i),\ i = 1, 2, ..., n, ...$$

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_i)$$

.

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo II:**
  Suponha-se que consideramos a mesma variável do exemplo anterior, mas agora $Y = X^2$. Nesse caso, os valores possíveis de Y são 0 e 1, tomados com probabilidades $1/2$ e $1/2$, porque $Y = 1$ se, e somente se, $X = -1$ ou $X = 1$ e a probabilidade do evento $\{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ é $1/3 + 1/6 = 1/2$.
- **Procedimento geral:**
  Sejam $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}, ...$, os valores de X, que tenham a propriedade $H(x_{ij}) = y_i$ para todo j. Então

  $$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_{i1}) + p(x_{i2}) + ...,$$

  isto é, deve-se achar o evento equivalente a $\{Y = y_i\}$.

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 2**:
  X é uma variável aleatória contínua e Y é discreta.
- Exemplo:
  Suponha-se que X possa tomar todos os valores reais, enquanto Y seja definido igual a $Y = 1$, se $X \geq 0$, e $Y = -1$, se $X < 0$.
  A fim de obter a distribuição de probabilidade de Y, determina-se apenas o evento equivalente (no contradomínio R_X) correspondente aos diferentes valores de Y. Assim

$$q(1) = P(Y = 1) = P(X \geq 0) = \int_0^\infty f(x)dx \quad \text{e}$$

$$q(-1) = P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas**:
  O caso mais importante e mais frequentemente encontrado surge quando X for uma variável aleatória contínua com fdp f e H é uma função também contínua.
  Consequentemente,$Y = H(X)$ será uma variável aleatória contínua e nossa tarefa será obter sua fdp digamos g.
- **Procedimento geral:**
  1. Obter G, a fd de Y, na qual $G(y) = P(Y \leq y)$, achando-se o evento A (no contradomínio X) o qual é equivalente ao evento $\{Y \leq y\}$;
  2. Derivar $G(y)$ em relação a y, a fim de obter $g(y)$ (a fdp de Y);
  3. Determinar aqueles valores de y no contradomínio de Y, para os quais $g(y) > 0$.

Observação: Note que este método é possível somente quando H é estritamente monótona (estritamente crescente ou estritamente decrescente).

Example

Suponhamos que X tenha fdp $f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$ e $f(x) = 0$, caso contrário.
Seja $H(x) = 3x + 1$. Para obter a fdp de $Y = H(X)$ teremos

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y) = P[X \leq (y-1)/3] \\ = \int_0^{(y-1)/3} 2x dx = [(y-1)/3]^2 \end{aligned}$$

Daí,

$$g(y) = G'(y) = 2(y-1)/9$$

Encontramos que $g(y) > 0$ para $1 < y < 4$.

Example

Suponhamos que uma variável aleatória contínua tenha a fdp como foi dado no exemplo anterior. Seja $H(x) = e^{-x}$. Para achar a fdp de $Y = H(X)$, procederemos da seguinte forma

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leq y) &= P(e^{-x} \leq y) \\ &= P[X \geq -\ln y] = \int_{-\ln y}^{1} 2x dx \\ &= 1 - (-\ln y)^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$g(y) = G'(y) = -2(\ln y)/y$$

Visto que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1/e < y < 1$.