AULA 9 - Variável aleatória bidimensional discreta

Susan Schommer

Introdução à Estatística Econômica - IE/UFRJ

Variáveis aleatórias bidimensionais

Definition

Sejam ϵ um experimento e S um espaço amostral associado a ϵ. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma variável aleatória bidimensional (algumas vezes chamada vetor aleatório).

Example

Considere o experimento de selecionar um ponto ao acaso no quadrado unitário

$$\mathcal{R} = \{0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}.$$

Denotamos por X e Y a primeira e a segunda coordenada do ponto selecionado, respectivamente. Com isso, temos um vetor (X, Y) que corresponde ao ponto selecionado.

Variáveis aleatórias bidimensionais

- No caso unidimensional o nosso espaço eram os números reais (R_X)
- Agora no caso bidimensional o nosso espço passa ser o plano $(R_{X \times Y})$, que é o contradomínio de (X, Y), no qual contém o conjunto de todos os valores possíveis de (X, Y).
- Como no caso unidimensional, iremos diferenciar pelos tipos de variáveis aleatórias: discretas e contínuas.

Variável aleatória discreta bidimensional

- Dizemos que uma variável aleatória discreta bidimensional (X, Y) é discreta se as variáveis aleatórias X e Y são discretas (forem finitos ou infinitos numeráveis), i. e., se os valores possíveis de (X, Y) puderem ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, ..., n, ...; j = 1, 2, ..., m, ...$
- Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfaça às seguintes condições:
  1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x, y),
  2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

  A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada a função de probabilidade de (X, Y).

Variável aleatória bidimensional

Exemplo: Duas linhas de produção fabricam um certo tipo de peça. Suponha que a capacidade na linha I (em qualquer dia) seja 5 peças e na linha II, 3 peças. Admita que o número de peças realmente produzidas em qualquer linha seja uma variável aleatória e que (X, Y) represente a variável aleatória bidimensional que fornece o número de peças produzidas pela linhas I e II, respectivamente. A Tabela abaixo dá a distribuição de probabilidade conjunta (X, Y).

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

A célula: $p(2,3) = P(X = 2, Y = 3) = 0,04$. Definimos:
$B = \{$mais peças são produzidas pela linha I que pela linha II$\}$
$P(B) = 0,01 + 0,03 + 0,05 + 0,07 + 0,09 + 0,04 + 0,05 + 0,06 + 0,08 + 0,05 + 0,05 + 0,06 + 0,06 + 0,05 = 0,75.$

Variável aleatória bidimensional

- Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. A função de distribuição acumulada (fda) F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

- F é uma função de duas variáveis e tem muitas propriedades análogas àquelas expostas para a fda unidimensional.

Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

Example

Considere o exemplo anterior. Calcularemos os totais marginais, isto é, a soma das 6 colunas e 4 linhas

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Suma
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
Suma	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1.00

Probabilidade marginal de $P(Y = 2) = 0,25$ e $P(X = 1) = 0,08$

No caso discreto temos que a distribuição de probabilidade marginal de X

$$p(x_i) = P(X = x_i) = \sum_y p(x_i, y_j)$$

Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, é natural definir a função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$, por

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{\sum_x p(x_i, y_j)}$$

Example

No exemplo anterior temos que a probabilidade condicional $P(X = 2|Y = 2)$ é a seguinte:

$$\mathbb{P}(X = 2|Y = 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,20$$

Variáveis Aleatórias Independentes

- Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$ para quaisquer i e j. Isto é, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ para todo i e j.

Example

Observamos que no exemplo anterior X e Y não são independentes, pois

$$0,05 = P(X = 2, Y = 2) \neq P(X = 2)P(Y = 2) = 0,16 \times 0,25 = 0,04$$

.

Variáveis Aleatórias Independentes

Example

Suponha que uma máquina seja utilizada para determinada tarefa durante a manhã e para uma tarefa diferente durante a tarde. Representemos por X e Y, respectivamente, o número de vezes que a máquina pára por desarranjo de manhã e à tarde. A Tabela abaixo dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y).

$Y \backslash X$	0	1	2	$q(y_j)$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$p(x_i)$	0.2	0.4	0.4	1.0

Um cálculo fácil mostra que, para todas as casas da Tabela acima, teremos $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$.

Portanto, X e Y são variáveis aleatórias independentes.