Equações de Diferenças

November 9, 2018

Equação de Diferença

Um exemplo de equação de diferença é:

$y_{n+1} = a \cdot y_n$

Em que a é uma constante qualquer. O valor de y em um período é igual ao seu valor no período anterior multiplicado por essa constante.

Essa equação descreve, por exemplo, o retorno de um investimento sem risco. Ao investir uma quantia y_n no período n, obtemos um valor de juros de $\rho \cdot y_n$. Temos então no próximo período:

$$y_{n+1} = y_n + \rho \cdot y_n = (1 + \rho) y_n \tag{1}$$

Fazendo $1 + \rho = a$, obtemos a equação anterior.

Para resolver essa equação, precisamos conhecer o valor inicial y_0. Então:

$$\begin{aligned} y_1 &= a y_0 \\ y_2 = a y_1 &= a(a y_0) = a^2 y_0 \\ y_3 = a y_2 &= a(a^2 y_0) = a^3 y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

E assim em diante. A solução geral é $y_n = a^n y_0$.

Sistema de Diferenças: Duas Equações

Considere agora o sistema formado pelas duas equações abaixo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} &= c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Esse sistema pode ser representado em forma matricial. Defina:

$$z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{5}$$

Podemos então escrever:

$$z_{n+1} = A \cdot z_n \tag{6}$$

Para verificar que essa representação está de acordo com o sistema original, basta fazer a operação de multiplicação:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_n + by_n \\ cx_n + dy_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se $b = c = 0$, as equações não são relacionados,e temos apenas:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n \\ y_{n+1} &= dy_n \end{aligned} \tag{8}$$

As soluções já foram estabelecidas nesse caso: $x_n = a^n x_0$ e $y_n = a^n y_0$. *Esse é o caso geral para matrizes diagonais.*

Para resolver o caso geral, em que as equações podem ser relacionadas (ou seja, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$), considerar um vetor inicial $z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Temos então:

$$\begin{aligned} z_1 &= Az_0 \\ z_2 = Az_1 &= A^2 z_0 \\ &... \\ z_n &= A^n\_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Precisamos então computar A^n. Se $A = D$ é uma matriz diagonal, essa conta é fácil:

$$D \cdot D = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {r_1}^2 & 0 \\ 0 & {r_2}^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Podemos estender esse raciocínio:

$$D^n = \begin{bmatrix} {r_1}^n & 0 \\ 0 & {r_2}^n \end{bmatrix} \tag{11}$$

Precisamos então de uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal, que denotaremos por D. Nesse caso, $A = PDP^{-1}$, e portanto:

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = (PD)(P^{-1}P)(DP^{-1}) \\ &= (PD)I(DP^{-1}) = (PD)(DP^{-1}) = P(D^2)P^{-1} \end{aligned} \tag{12}$$

De forma geral:

$$A^n = P(D^n)P^{-1} \tag{13}$$

Ou seja:

$$A^n = P \begin{bmatrix} {r_1}^n & 0 \\ 0 & {r_2}^n \end{bmatrix} P^{-1} \tag{14}$$

A solução do sistema é portanto:

$$z_n = P \begin{bmatrix} {r_1}^n & 0 \\ 0 & {r_2}^n \end{bmatrix} P^{-1} z_0 \tag{15}$$

Para obter P d D, escreva $P = [v_1 v_2]$, em que v_1 e v_2 representam as colunas de P. $P^{-1}AP = D$ pode ser reescrito como $AP = PD$. Ou seja:

$$A[v_1 v_2] = [v_1 v_2] \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 v_1 & r_2 v_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Logo, $Av_1 = r_1 v_1$ e $Av_2 = r_2 v_2$. Mas isso significa que r_1 e r_2 são autovalores de A, e v_1 e v_2 são os autovetores associados.

Para construir a solução explicitamente:

$$\begin{aligned} z_n &= A^n z_0 \\ z_n &= PD^n P^{-1} z_0 \\ P^{-1} z_n &= P^{-1} PD^n P^{-1} z_0 \\ P^{-1} z_n &= ID^n P^{-1} z_0 \\ P^{-1} z_n &= D^n P^{-1} z_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Defina agora $Z_n = P^{-1} z_n = P^{-1} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Logo, $Z_n = D_n Z_0$. Como D^n é diagonal, conseguimos encontrar a solução. Para tanto, defina X_n como a primeira linha de Z_n, e Y_n como a segunda linha:

$$\begin{aligned} X_n &= c_1 r_1^n \\ Y_n &= c_2 r_2^n \end{aligned} \tag{19}$$

Em que c_1 e c_2 são as condições iniciais das variáveis artificiais X_n e Y_n, respectivamente (se $n = 0$, $X_n = c_1$, pois $r_1^0 = 1$).

Para recuperar z_n, fazemos:

$$z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 r_1^n \\ c_2 r_2^n \end{bmatrix} = c_1 r_1^n v_1 + c_2 r_2^n v_2 \tag{20}$$

Ou seja, temos uma combinação linear dos autovetores de A em que os coeficientes dependem das condições iniciais e dos autovalores correspondentes.

Observe então que o sistema é estável se ambos os autovalores são menores do que um em módulo: nesse caso, r_i^n se aproxima de zero quando n aumenta.

Considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= 0.5x_n \end{aligned} \tag{21}$$

Temos então a seguinte matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores dessa matriz são 2 e -1. Os autovetores correspondentes são $(1, \frac{1}{4})$ e $(1, \frac{-1}{2})$.

A solução é portanto:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = c_1 \times 2^n \times \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + c_2 \times (-1)^n \times \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Em que c_1 e c_2 dependem das condições iniciais, como veremos abaixo.

Ou seja:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \times 2^n + c_2 \times (-1)^n \\ y_n &= \frac{c_1 \times 2^n}{4} - \frac{c_2 \times (-1)^n}{2} \end{aligned} \tag{23}$$

Para determinar as contantes c_1 e c_2, precisamos do vetor inicial (x_0, y_0). Fazendo $n = 0$ nas equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_2 \\ y_0 &= \frac{c_1}{4} - \frac{c_2}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_0}{6} + \frac{y_0}{3} \\ c_2 &= \frac{-x_0}{6} + \frac{2y_0}{3} \end{aligned} \tag{25}$$

A solução fica então inteiramente caracterizada. Se, por exemplo, $x_0 = 2$ e $y_0 = -\frac{1}{4}$, encontramos $c_1 = c_2 = 1$, e portanto a solução do sistema é:

$$\begin{aligned} x_n &= 2^n + (-1)^n \\ y_n &= \frac{2^n}{4} - \frac{(-1)^n}{2} \end{aligned} \tag{26}$$

Observe que o sistema não é estável porque os autovalores não são inferiores a 1 em módulo.