Lista de Exercícios #1 - Álgebra Linear - IE-UFRJ
Professor Pedro Hemsley - 2018.2

1. Identifique as equações lineares.

R. Equações lineares: todas as variáveis devem ter expoente igual a 1, e não pode haver produto de variáveis.

a. $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$ Linear.
b. $x_1x_2x_3 = -2$ Não-linear: produto de variáveis $x_1x_2x_3$.
c. $x^2 + 6y = 1$. Não-linear: expoente diferente de 1 x^2.
d. $(x + y)(x - z) = -7$ Não-linear: expoente diferente de um e produto de variáveis: $(x + y)(x - z) = x^2 - xz + xy - yz$.
e. $x + 3^{1/2}z = 4$ Linear (note que $3^{1/2}$ é apenas um número; nenhuma variável tem expoente diferente de 1).
f. $x + 3z^{1/2} = -4$. Não-linear: expoente diferente de 1: $z^{1/2}$.

2. Resolva os sistemas abaixo por substituição, por eliminação gaussiana, e por eliminação de Gauss-Jordan.

a. $\begin{cases} x - 3y + 6z = -1 \\ 2x - 5y + 10z = 0 \\ 3x - 8y + 17z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

3. Resolva o sistema abaixo por eliminação gaussiana e interprete o resultado.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ -x - y = 10 \end{cases}$$

R. $(1) \to (1) + 3 * (2)$:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 34 \\ -x - y = 10 \end{cases}$$

$(1) \longleftrightarrow (2)$:

$$\begin{cases} -x - y = 10 \\ 0x + 0y = 34 \end{cases} \qquad \text{forma escalonada}$$

A segunda linha implica $0 = 34$, o que é absurdo: não existe (x, y) tal que $0x + 0y = 34$. Logo, não existe solução.

Graficamente, a primeira equação do sistema original representa a reta $y = -10 - x$, e a segunda equação $y = \frac{4}{3} - x$. Essas equações são paralelas, pois têm a mesma inclinação -1; mas têm interceptos diferentes (-10 e $4/3$). Logo, são paralelas distintas, que nunca se encontram. A solução do sistema, porém, deve ocorrer exatamente onde todas as retas se encontram - ou seja, um ponto que esteja sobre todas as retas ao mesmo tempo. Se a solução está no ponto em que as retas se encontram mas as retas nunca se encontram, segue que não existe solução.

4. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes abaixo em (i) forma escalonada e (ii) forma escalonada reduzida.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Já está na forma escalonada: o primeiro elemento diferente de zero em cada linha está à direita (ou seja, numa coluna posterior) do que o primeiro elemento diferente de zero da linha anterior. Para encontrar a forma escalonada reduzida: $(2) \to (2)/4$:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1) \to (1) - 3 * (1)$:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz está na forma escalonada reduzida porque: (i) está em forma escalonada; (ii) cada pivô é igual a 1; (iii) as colunas que contêm um pivô não possuem nenhum outro elemento diferente de zero. (Lembrando: pivô é o primeiro elemento diferente de zero de uma linha.)

b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Já está na forma escalonada. Para encontrar a forma escalonada reduzida: $(1) \to (1) - 3 * (2)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ já está em forma escalonada.

$(2) \to (2)/6$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1) \to (1) - 3 * (2)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1) \to (1)/2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

d. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não está en forma escalonada.

$(2) \to (2) - 2 * (1)$:

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix}$

$(2) \to -(2)/10$

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

$(1) \to (1) - 5 * (2)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

e. $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não está em forma escalonada.

Ao invés de fazer uma operação de cada vez, faça duas operações: $(1) \to (1)/7$; e $(2) \to (2)/9$.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

E mais duas, nessa ordem: $(1) \longleftrightarrow (2)$ e $(3) \to (3) - 2 * (2)$. Note que a última operação é feita a partir da matriz resultante da penúltima operação.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

5. Considere os sistemas abaixo.

i. $\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ x - y = 10 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 1 \\ 6x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$

a. Escreva os sistemas em forma matricial.

i. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes encontradas no item anterior em forma escalonada.

i. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \underset{(1)/3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \underset{(2)-(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -2 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

c. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes encontradas no item anterior em forma escalonada reduzida (ou seja, trabalhe a partir da forma escalonada, e não da matriz original do item a).

d. Encontre a solução.

6. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} -4x + 6y + 4z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

7. Use a eliminação de Gauss-Jordan e determine para que valores de k o sistema abaixo possui: (i) exatamente uma solução; (ii) nenhuma solução; (iii) infinitas soluções.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - kx_2 = 1 \end{cases}$$

8. Para que valores do parâmetro a o sistema abaixo admite solução?

$$\begin{cases} 6x + y = 7 \\ 3x + y = 4 \\ -6x - 2y = a \end{cases}$$

9. Determine o posto das matrizes abaixo.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

10. Considere as matrizes de coeficientes abaixo. Para cada uma delas, determine o número de soluções nos seguintes casos: (i) $\forall i, b_i = 0$; e (ii) $\exists i \,/\, b_i \neq 0$.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$