Lista de Exercícios #1 - Métodos Quantitativos em Economia - FCE-UERJ

Professor Pedro Hemsley - 2015.1

1. Identifique as equações lineares.

R. Equações lineares: todas as variáveis devem ter expoente igual a 1, e não pode haver produto de variáveis.

a. $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$ Linear.
b. $x_1x_2x_3 = -2$ Não-linear: produto de variáveis $x_1x_2x_3$.
c. $x^2 + 6y = 1$. Não-linear: expoente diferente de 1 x^2.
d. $(x+y)(x-z) = -7$ Não-linear: expoente diferente de um e produto de variáveis: $(x+y)(x-z) = x^2 - xz + xy - yz$.
e. $x + 3^{1/2}z = 4$ Linear (note que $3^{1/2}$ é apenas um número; nenhuma variável tem expoente diferente de 1).
f. $x + 3z^{1/2} = -4$. Não-linear: expoente diferente de 1: $z^{1/2}$.

2. Resolva os sistemas abaixo por substituição, por eliminação gaussiana, e por eliminação de Gauss-Jordan.

a. $\begin{cases} x - 3y + 6z = -1 \\ 2x - 5y + 10z = 0 \\ 3x - 8y + 17z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

3. Resolva o sistema abaixo por eliminação gaussiana e interprete o resultado.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ -x - y = 10 \end{cases}$$

R. $(1) \rightarrow (1) + 3 * (2)$:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 34 \\ -x - y = 10 \end{cases}$$

$(1) \longleftrightarrow (2)$:

$$\begin{cases} -x - y = 10 \\ 0x + 0y = 34 \end{cases} \qquad \text{forma escalonada}$$

A segunda linha implica $0 = 34$, o que é absurdo: não existe (x, y) tal que $0x + 0y = 34$. Logo, não existe solução.

Graficamente, a primeira equação do sistema original representa a reta $y = -10 - x$, e a segunda equação $y = \frac{4}{3} - x$. Essas equações são paralelas, pois têm a mesma inclinação -1; mas têm interceptos diferentes (-10 e $4/3$). Logo, são paralelas distintas, que nunca se encontram. A solução do sistema, porém, deve ocorrer exatamente onde todas as retas se encontram - ou seja, um ponto que esteja sobre todas as retas ao mesmo tempo. Se a solução está no ponto em que as retas se encontram mas as retas nunca se encontram, segue que não existe solução.

4. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes abaixo em (i) forma escalonada e (ii) forma escalonada reduzida.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Já está na forma escalonada: o primeiro elemento diferente de zero em cada linha está à direita (ou seja, numa coluna posterior) do que o primeiro elemento diferente de zero da linha anterior. Para encontrar a forma escalonada reduzida: $(2) \rightarrow (2)/4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(1) \rightarrow (1) - 3 * (1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada reduzida porque: (i) está em forma escalonada; (ii) cada pivô é igual a 1; (iii) as colunas que contêm um pivô não possuem nenhum outro elemento diferente de zero. (Lembrando: pivô é o primeiro elemento diferente de zero de uma linha.)

b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Já está na forma escalonada. Para encontrar a forma escalonada reduzida: $(1) \rightarrow (1) - 3 * (2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{forma escalonada reduzida.}$$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ já está em forma escalonada.

$(2) \to (2)/6$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1) \to (1) - 3 * (2)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1) \to (1)/2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

d. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não está en forma escalonada.

$(2) \to (2) - 2 * (1)$:

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -3 \end{bmatrix}$

$(2) \to -(2)/10$

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

$(1) \to (1) - 5 * (2)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

e. $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não está em forma escalonada.

Ao invés de fazer uma operação de cada vez, faça duas operações: $(1) \to (1)/7$; e $(2) \to (2)/9$.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

E mais duas, nessa ordem: $(1) \longleftrightarrow (2)$ e $(3) \to (3) - 2 * (2)$. Note que a última operação é feita a partir da matriz resultante da penúltima operação.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forma escalonada reduzida.

5. Considere os sistemas abaixo.

i. $\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ x - y = 10 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 1 \\ 6x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$

a. Escreva os sistemas em forma matricial.

i. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes encontradas no item anterior em forma escalonada.

i. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1)/3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -2 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-6*(3)]{(1)-4*(3)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -11 & -35 \\ 0 & -3 & -17 & -54 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & -11 & -35 \\ 0 & -3 & -17 & -54 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 11 & 35 \\ 0 & 3 & 17 & 54 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)/3]{(2)/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 11 & 35 \\ 0 & 3 & 17 & 54 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 3 & \frac{17}{3} & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-2*(1)]{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\longleftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$

c. Use as operações elementares com linhas para colocar as matrizes encontradas no item anterior em forma escalonada reduzida (ou seja, trabalhe a partir da forma escalonada, e não da matriz original do item a).

i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & -13/3 \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d. Encontre a solução.

A solução é dada pela forma escalonada reduzida, bastando reescrever a matriz em forma de sistema. A primeira linha do item i, por exemplo, significa que $1x + 0y = \frac{17}{3}$; logo, $x = \frac{17}{3}$. Dessa forma:

i. $(x, y) = \left(\frac{17}{3}, -\frac{13}{3}\right)$

ii. $(x, y, z) = (2, 1, 3)$

iii. $(x, y, z) = (1, -1, 2)$

6. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} -4x + 6y + 4z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

R. O sistema possui mais equações do que variáveis; logo, possui infinitas soluções, ou nenhuma solução. Se houver infinitas soluções, então necessariamente ao menos uma das variáveis é livre; defina z como variável livre e reescreva o sistema como:

$$\begin{cases} -4x + 6y = 4 - 4z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 4 - 4z \\ 2 & -1 & 1 - z \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida dessa matriz é:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{5}{4} - \frac{5z}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} - \frac{3z}{2} \end{array}\right]$$

Portanto, a solução geral é: $(x, y, z) = \left(\frac{5}{4} - \frac{5z}{4}, \frac{3}{2} - \frac{3z}{2}, z\right)$ para um $z \in \mathbb{R}$ qualquer.

7. Use a eliminação de Gauss-Jordan e determine para que valores de k o sistema abaixo possui: (i) exatamente uma solução; (ii) nenhuma solução; (iii) infinitas soluções.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - kx_2 = 1 \end{cases}$$

R. A matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \end{bmatrix}$$

Subtraia a primeira linha da segunda:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-1 & 0 \end{bmatrix}$

Se $-k-1=0$ (ou seja, $k=-1$), então a segunda linha se torna $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz, portanto, tem posto 1: resta apenas uma linha (ou seja, uma equação) para duas variáveis, e o sistema tem infinitas soluções. Se $k \neq -1$, então a segunda linha se torna $-(k+1)\,x_2 = 0$, e portanto $x_2 = 0$; usando então a primeira linha, temos $x_1 = 1$. Essa é a única solução para $k \neq -1$.

8. Para que valores do parâmetro a o sistema abaixo admite solução?

$$\begin{cases} 6x + y = 7 \\ 3x + y = 4 \\ -6x - 2y = a \end{cases}$$

R. $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & a+7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 0 & a+14 \\ 3 & 0 & a+11 \\ 0 & 1 & -(a+7) \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a-8 \\ 3 & 0 & a+11 \\ 0 & 1 & -(a+7) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a+11}{3} \\ 0 & 1 & -(a+7) \\ 0 & 0 & -(a+8) \end{bmatrix}$

Para Reescreva como sistema linear:

$$\begin{cases} 1x + 0y = \frac{a+11}{3} \\ 0x + y = -a-7 \\ 0x + 0y = -a-8 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x = \frac{a+11}{3} \\ y = -a-7 \\ 0 = -a-8 \end{cases}$$

Se $a=-8$, então o sistema admite uma única solução, dada pelas duas primeiras equações do sistema acima; caso $a \neq -8$, então o sistema não admite solução, pois a última linha se torna $0 = -a-8 \neq 0$, o que é absurdo.

9. Determine o posto das matrizes abaixo.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

R. Para solucionar, coloque cada matriz na forma escalonada, e conte o número de linhas com ao menos um elemento diferente de zero. a. posto 1 (a segunda linha é múltiplo da primeira); b. posto 2; c. posto 3; d. posto 4; e. posto 3.

10. Considere as matrizes de coeficientes abaixo. Para cada uma delas, determine o número de soluções nos seguintes casos: (i) $\forall i, b_i = 0$; e (ii) $\exists i \,/\, b_i \neq 0$.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

R. No caso (i), há pelo menos uma solução: $x_i = 0$ para todo i, ou seja, $x = (0, 0, ..., 0)$, a chamada solução trivial. A questão, portanto, é se há uma ou infinitas soluções. Para tanto, basta verificar se o número de equações "relevantes" é igual ao número de variáveis. Se sim, então há uma única solução. Caso contrário, o número de "equações relevantes" será menor do que o número de variáveis, e portanto o sistema terá infinitas soluções. "Equações relevantes" é simplesmente o posto da matriz de coeficientes: ou seja, o número de linhas que não podem ser reduzidas a zero no escalonamento. Em suma: basta calcular o posto e verificar se é menor ou se é igual ao número de colunas (o número de colunas da matriz de coeficientes é o número de variáveis, e o posto nunca pode ser maior do que o número de colunas). a. Posto 2, duas colunas: existe uma única solução. b. Posto 2, três colunas: infinitas soluções. c. Posto 2, duas colunas: logo, há exatamente uma solução. d. posto 3, três colunas: exatamente uma solução. e. Posto 3, três colunas: exatamente uma solução.

No caso (ii), a solução trivial não resolve o sistema; logo, não há garantia de ao menos uma solução. a. Existe uma única solução: posto $=$ número de linhas $=$ número de colunas. b. Existem infinitas soluções: posto $=$ número de linhas $<$ número de colunas; c. Se $b_3 = 0$ na forma escolonada reduzida, há infinitas soluções; caso contrário, não há solução. d. posto $=$ número de linhas $=$ número de colunas: existe exatamente uma solução. e. posto $=$ número de linhas $=$ número de colunas: existe exatamente uma solução.