Gabarito - Lista de Exercícios #2 - Álgebra Linear - IE-UFRJ
Professor Pedro Hemsley - 2018.2

1. Considere as matrizes abaixo e calcule o que se pede (observe que nem todos as operações estão bem-definidas).

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

a. $A+B$ $\boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{matrix}}$
b. $A-D$: não definida (dimensões diferentes)
c. $3B$ $\boxed{\begin{matrix} 0 & 3 & -3 \\ 12 & -3 & 6 \end{matrix}}$
d. DC $\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}}$
e. B^T $\boxed{\begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}}$
f. A^TC^T $\boxed{\begin{matrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 5 & 1 \end{matrix}}$
g. $C+D$ $\boxed{\begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{matrix}}$ *gabarito corrigido*
h. $B-A$ $\boxed{\begin{matrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{matrix}}$
i. AB: não definida: número de colunas de A (3) é diferente do número de linhas de B (2).
j. CE $\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}}$
k. $-D$ $\boxed{\begin{matrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}}$
l. $(CE)^T$ $\boxed{\begin{matrix} -1 & 4 \end{matrix}}$
m. $B+C$ não definida: dimensões diferentes.
n. $D-C$ $\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix}}$
o. CA $\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 10 & 1 \end{matrix}}$
p. $EC\ (CA)^T$: não definida: dimensões não compatíveis.
q. E^TC^T $[-1 \quad 4]$ *gabarito corrigido*

2. Mostre que as matrizes abaixo são idempotentes.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

R. Uma matriz idempotente A é tal que $A * A = A$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -2+4 \\ 1-2 & -2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*3+6*(-1) & 3*6+6*(-2) \\ -1*3+(-2)*(-1) & -1*6+(-2)*(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Mostre que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

R. Basta mostrar que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1+1*(-1) & 2*(-1)+1*2 \\ 1*1+1*(-1) & 1*(-1)+1*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda encontrar a inversa diretamente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(1)-(2)]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(2)-(1)]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, então a matriz abaixo é uma inversa à direita e à esquerda de A.

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5. Encontre a inversa de cada uma das matrizes abaixo (ou mostre que é singular).

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{bmatrix}$

R. Para os dois primeiros itens, basta usar a fórmula derivada na questão anterior.

a. $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2*1-1*1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4*4-5*2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ *gabarito corrigido*

c. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-(3)/2]{(1)/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[(3)-3*(1)]{(2)-4*(1)}$
$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[(2)-2*(3)]{(1)+2*(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-(3)]{(2)/3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}$
$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$

d. Seguindo procedimento análogo ao do item anterior, encontramos $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$
$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

e. Pode ignorar - você nunca vai precisar inverter uma matriz 4x4. Para referência, a solução é:

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Resolva os sistemas abaixo usando a inversa da matriz de coeficientes.

i. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 6x + 2y + 6z = 20 \\ -4x - 3y + 9z = 3 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 6y + 3z = 1 \\ -6x - 10y = 6 \end{cases}$

R.Basta escrever os sistemas na forma $Ax = b$, encontrar a inversa A^{-1}, e pré-multiplicar para encontrar $x = A^{-1}b$.

i. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \\ \frac{13}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{42} & \frac{1}{42} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}$. $A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{26}{21} \end{bmatrix}$.

iii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. $A^{-1}b = \begin{bmatrix} -11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

7. Considere uma matriz $n \times n$ diagonal com elementos $d_1, ..., d_n$ na diagonal principal. Qual é a condição para que essa matriz possua inversa? Se essa condição for satisfeita, qual é a inversa?

R. Condição para existência de inversa: $d_i \neq 0$ para todo i. Se essa condição for satisfeita, a inversa é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{d_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$