

Gabarito - Lista de Exercícios #2 - Métodos Quantitativos em Economia - FCE-UERJ

Professor Pedro Hemsley - 2015.1

1. Considere as matrizes abaixo e calcule o que se pede (observe que nem todas as operações estão bem-definidas).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a. $A + B$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A - D$: não definida (dimensões diferentes)

c. $3B$ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

d. DC $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

e. B^T $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

f. $A^T C^T$ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

g. $C + D$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *gabarito corrigido*

h. $B - A$ $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i. AB : não definida: número de colunas de A (3) é diferente do número de linhas de B (2).

j. CE $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

k. $-D$ $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

l. $(CE)^T$ $\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

m. $B + C$ não definida: dimensões diferentes.

n. $D - C$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

o. CA $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

p. $EC (CA)^T$: não definida: dimensões não compatíveis.

q. $E^T C^T$ $\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$ *gabarito corrigido*

2. Mostre que as matrizes abaixo são idempotentes.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

R. Uma matriz idempotente A é tal que $A * A = A$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-2 & -2+4 \\ 1-2 & -2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3*3+6*(-1) & 3*6+6*(-2) \\ -1*3+(-2)*(-1) & -1*6+(-2)*(-2) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Mostre que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

R. Basta mostrar que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1+1*(-1) & 2*(-1)+1*2 \\ 1*1+1*(-1) & 1*(-1)+1*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda encontrar a inversa diretamente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & -1-2 \end{bmatrix}$$

4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, então a matriz abaixo é uma inversa à direita e à esquerda de A .

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5. Encontre a inversa de cada uma das matrizes abaixo (ou mostre que é singular).

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b. } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{c. } \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e. } \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

R. Para os dois primeiros itens, basta usar a fórmula derivada na questão anterior.

$$\text{a. } \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2*1-1*1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4*4-5*2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] \text{ gabarito corrigido} \\
 \text{c. } & \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{-(3)/2}]{\text{(1)/2}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(3)-3*(1)}]{\text{(2)-4*(1)}} \\
 & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(2)-2*(3)}]{\text{(1)+2*(3)}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[\text{-(3)}]{\text{(2)/3}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

d. Seguindo procedimento análogo ao do item anterior, encontramos

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

e. Pode ignorar - você nunca vai precisar inverter uma matriz 4x4.

Para referência, a solução é:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

6. Resolva os sistemas abaixo usando a inversa da matriz de coeficientes.

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad \text{ii. } \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 6x + 2y + 6z = 20 \\ -4x - 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 6y + 3z = 1 \\ -6x - 10y = 6 \end{cases}$$

R. Basta escrever os sistemas na forma $Ax = b$, encontrar a inversa A^{-1} , e pré-multiplicar para encontrar $x = A^{-1}b$.

$$\text{i. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}. A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. A^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{ii. } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}. A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{42} & \frac{3}{42} & -\frac{1}{21} \\ \frac{13}{42} & -\frac{1}{42} & \frac{1}{21} \\ \frac{14}{42} & \frac{1}{42} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{26}{21} \end{bmatrix}.$$

$$\text{iii. } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}b = \begin{bmatrix} -11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7. Considere uma matriz $n \times n$ diagonal com elementos d_1, \dots, d_n na diagonal principal. Qual é a condição para que essa matriz possua inversa? Se essa condição for satisfeita, qual é a inversa?

R. Condição para existência de inversa: $d_i \neq 0$ para todo i . Se essa condição for satisfeita, a inversa é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{d_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$