Gabarito - Lista de Exercícios #3 - Álgebra Linear - IE-UFRJ
Professor Pedro Hemsley - 2018.2

1. Calcule o determinante das matrizes $2x2$ abaixo.

$$detA = det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 3 = -7$$
$$detB = det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \times 5 - 2 \times 4 = 2$$
$$detC = det\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = 9 \times 8 - 2 \times (-1) = 74$$
$$detD = det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$$
$$detE = det\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ -1 & -9 \end{bmatrix} = 10 \times (-9) - 10 \times (-1) = 80$$
$$detF = det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

2. Calcule o determinante das matrizes $3x3$ abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$detD = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}]$$

Para encontrar os determinantes das matrizes A, B e C, substitua os valores na fórmula geral para matrizes $3x3$ encontrada na matriz D.

3. Calcule o determinante das matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (matriz triangular superior)}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 200 & 300 \\ 0 & 5 & 400 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (matriz triangular superior)}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -17 & -33 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (matriz triangular inferior)}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \times 5 \times (-3) \times 0 = 0 \text{ (matriz diagonal)}$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ (matriz identidade é diagonal)}$$
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 0 = 0 \text{ (matriz diagonal)}$$
$$G = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 & -5 \\ 0 & b & 3 & -1 \\ 0 & 0 & c & -9 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} = a \times b \times c \times d \text{ (matriz triangular superior)}$$

$$H = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 100 \\ 0 & b & 0 & -17 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = a \times b \times c \times 0 = 0 \text{ (matriz triangular superior)}$$

4. Calcule o determinante das matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Faça $(1) - (4)$ para escalonar a matriz até colocá-la numa forma mais simples:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow detA = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ (matriz triangular inferior)}$$

(poderíamos também fazer $(3) - (2)$ para encontrar uma matriz triangular superior)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Faça $(4) - \frac{1}{2} * (1)$ para encontrar:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ (matriz triangular superior)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Faça $(4) - a * (1)$ para encontrar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow detC = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ (matriz triangular superior)}$$

5. Calcule o determinante das matrizes abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 1 \times 4 \times 6 = 24 \text{ (matriz triangular superior)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Troque as linhas (1) e (2) para encontrar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = -1 * 4 * 6 = -24$$ (atenção à troca de sinal! troca de linhas da matriz gera troca de sinal do determinante)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Quais das matrizes acima admitem inversa?

R. Todas as matrizes com determinante diferente de zero admitem inversa. Uma matriz quadrado admite inversa se e somente se o determinante for diferente de zero.

7. Quais das matrizes acima têm posto cheio (ou seja, posto = número de linhas = número de colunas)?

R. Atenção: o enunciado foi impreciso. "Posto cheio" signfica "posto = número de linhas = número de colunas" apenas quando o número de linhas é igual ao número de colunas, que é o caso das matrizes consideradas neste exercício; mas não é uma definição geral. No caso geral, quando o número de linhas pode ser diferente do número de colunas, sabemos que o posto deve ser menor do que o número de linhas, e também deve ser menor do que o número de colunas; dizemos então que posto cheio significa que o posto é igual ao número de linhas ou ao número de colunas - o que for MENOR.

Dito isso, o exercício considera apenas o caso particular em que as matrizes são quadradas. Nesse caso, a matriz tem posto cheio se e só se o determinante for diferente de zero.

8. Suponha que as matrizes acima representem os coeficientes de um sistema linear. Quais desses sistemas admitem uma única solução?

R. Todas as matrizes com determinante diferente de zero. Quando a matriz de coeficientes é quadrada e tem determinante diferente de zero, podemos reescrever o sistema $Ax = b$ como $x = A^{-1}b$, que representa a solução única para qualquer b.

9. Considere as matrizes A dos exercícios 1 e 2. Para cada uma delas:

i. Encontre os menores correspondentes a cada um dos elementos.

O menor referente ao elemento a_{ij} é o determinante da submatriz formada ao eliminar a linha i e a coluna j às quais pertence o elemento a_{ij}.

Considere a matriz $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$Menor(a) = det(a) = d$
$Menor(b) = det(c) = c$
$Menor(c) = det(c) = b$
$Menor(d) = det(d) = a$

Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

$Menor(a_{11}) = det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

$Menor(a_{12}) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

$Menor(a_{13}) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

$Menor(a_{21}) = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$

$Menor(a_{22}) = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$

$Menor(a_{23}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$

$Menor(a_{31}) = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$

$Menor(a_{32}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$

$Menor(a_{33}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ii. Encontre os cofatores correspondentes a cada um dos elementos.

O cofator é apenas um menor com ajuste de sinal. Se a soma dos índices i e j do elemento considerado for par, então o cafor é igual ao menor; se for ímpar, o cofator é igual ao menor com sinal trocado.

Considere a matriz $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
$Cofator(a) = Menor(a) = d$
$Cofator(b) = -Menor(b) = -c$
$Cofator(c) = -Menor(c) = -b$
$Cofator(d) = Menor(d) = a$
Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
$Cofator(a_{11}) = Menor(a_{11}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$
$Cofator(a_{12}) = -Menor(a_{12}) = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}$
$Cofator(a_{13}) = Menor(a_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$
$Cofator(a_{21}) = -Menor(a_{21}) = -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}$
$Cofator(a_{22}) = Menor(a_{22}) = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$
$Cofator(a_{23}) = -Menor(a_{23} = -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}$
$Cofator(a_{31}) = Menor(a_{31}) = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$
$Cofator(a_{32}) = -Menor(a_{32}) = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}$
$Cofator(a_{33}) = Menor(a_{33}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

iii. Escreva a matriz de cofatores.

Considere a matriz $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Matriz de cofatores: $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
Matriz de cofatores: $\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$

iv. Escreva a matriz adjunta.

A matriz adjunta é a transposta da matriz de cofatores.
Considere a matriz $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Matriz adjunta: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
Matriz adjunta: $\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$

v. Encontre a inversa a partir do determinante e da matriz adjunta.

A inversa pode ser escrita como a adjunta divida pelo determinante.
Considere a matriz $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Matriz inversa: $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
Matriz inversa:
$\frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-[a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}]} \times$
$\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$

vi. Encontre a solução para os vetores $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}'$ (para a matriz do exercício 1) e $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$ (para a matriz do exercício 2).

Considere as matrizes "A" de cada um dos exercícios.

Substituindo os elementos da matriz A do exercício 1 na fórmula encontrada no exercício anterior:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Logo:

$A^{-1} * b = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Analogamente, obtemos para a matriz A do exercício 2:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Logo:

$A^{-1} * b = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{-5}{12} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{13}{36} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$