

Gabarito Lista de Exercícios #4 - Álgebra Linear - IE-UFRJ
Professor Pedro Hemsley - 2018.2

1. Considere os vetores abaixo e calcule o que se pede.

$$u = (1, 2) \quad v = (0, 1) \quad w = (-1, 3) \quad x = (1, 2, 0) \quad z = (0, 1, 1)$$

i. $u + v = (1, 3)$

ii. $-4w = (4, -12)$

iii. $u + z$ Não definido porque os vetores têm dimensões diferentes.

iv. $3z = (0, 3, 3)$

v. $2v = (0, 2)$

vi. $u + 2v = (1, 4)$

vii. $u - v = (1, 1)$

viii. $3x + z = (3, 7, 1)$

ix. $w + 2x$ Não definido porque os vetores têm dimensões diferentes.

2. Considere ainda a questão anterior. Qual a interpretação geométrica dos resultados dos itens i e vii?

3. Calcule a norma dos vetores abaixo.

i. $\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

ii. $\|(0, -3)\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

iii. $\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

iv. $\|(3, 3)\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v. $\|(-1, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

vi. $\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

vii. $\|(1, 2, 3, 4)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$

viii. $\|(4, 5, 6)\| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$

ix. $\|(3, 0, 0, 0, 0)\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

4. Calcule a distância entre os pontos abaixo.

i. $(0, 0)$ e $(3, -4)$: $\sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{25} = 5$

ii. $(1, -1)$ e $(7, 7)$: $\sqrt{(1 - 7)^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

iii. $(5, 2)$ e $(1, 2)$: $\sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{16} = 4$

iv. $(1, 1, -1)$ e $(2, -1, 5)$: $\sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$

v. $(1, 2, 3, 4)$ e $(1, 0, -1, 0)$: $\sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$

4. Qual a relação entre a distância euclidiana entre dois vetores (exercício anterior) e a norma de um vetor (exercício 3)?

R. A norma de um vetor é simplesmente a distância euclidiana entre esse vetor e a origem.

5. Calcule o produto interno dos vetores abaixo.

i. $u = (1, 0)$ e $v = (2, 2)$: $1 * 2 + 0 * 2 = 2$

ii. $u = (4, 1)$ e $v = (2, -8)$: $4 * 2 + 1 * (-8) = 0$

iii. $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$: $1 * 1 + 1 * 2 + 0 * 1 = 3$

iv. $u = (1, -1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$: $1 * 1 + (-1) * 2 + 1 * 0 = -1$

v. $u = (1,0,0,0,0)$ e $v = (1,1,1,1,1)$: $1 * 1 + 0 * 1 + 0 * 1 + 0 * 1 + 0 * 1 = 1$

6. Considere novamente a questão anterior. Que itens apresentam vetores perpendiculares entre si?

R. O item (ii), pois o produto interno dos vetores é igual a zero.

7. Calcule o vetor unitário correspondente aos vetores abaixo.

Basta dividir cada coordenada do vetor pela norma desse vetor.

i. $(3, 4) : \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

ii. $(6, 0) : \frac{(6,0)}{6} = (1, 0)$

iii. $(1, 1, 1) : \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

iv. $(-1, 2, -3) : \frac{(-1,2,-3)}{\sqrt{14}} = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$

8. Para cada par de pontos abaixo, escreva as representações paramétrica e não-paramétrica das retas correspondentes.

Para encontrar o vetor que representa a direção da reta que passa por dois pontos, basta calcular a diferença entre esses pontos: o vetor com a mesma direção da reta que passa por x e y é o vetor $(x - y)$ (ou $(y - x)$, tanto faz).

i. $(3, 0)$ e $(5, 0)$

Representação paramétrica: $(x_1(t), x_2(t)) = (3, 0) + t * [(5, 0) - (3, 0)] = (3, 0) + t * (2, 0) = (3 + 2t, 0)$

Essa é uma reta vertical, e portanto não admite a representação tradicional em forma de função.

ii. $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$

Representação paramétrica:

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1, 0, 0) + t * [(0, 0, 1) - (1, 0, 0)] = (1, 0, 0) + t * (-1, 0, 1) = (1 - t, 0, t)$$

Essa é simplesmente uma reta no plano (x_1, x_3) , pois $x_2 = 0$, e passa pelos pontos $x_1 = 1, x_3 = 0$ e $x_1' = 0, x_3' = 1$. A inclinação é $\frac{x_3' - x_3}{x_1' - x_1} = -1$. O ponto (x_1', x_3') é o intercepto no eixo x_3 , pois $x_1' = 0$. Essa reta pode ser escrita como $x_3 = 1 - 1 * x_1 + 0 * x_2$, ou simplesmente $x_3 = 1 - x_1$.