Gabarito Lista de Exercícios #4 - Métodos Quantitativos em Economia - FCE-UERJ

Professor Pedro Hemsley - 2015.1

1. Considere os vetores abaixo e calcule o que se pede.

$u = (1,2) \qquad v = (0,1) \qquad w = (-1,3) \qquad x = (1,2,0) \qquad z = (0,1,1)$

i. $u + v = (1,3)$
ii. $-4w = (4,-12)$
iii. $u + z$ Não definido porque os vetores têm dimensões diferentes.
iv. $3z = (0,3,3)$
v. $2v = (0,2)$
vi. $u + 2v = (1,4)$
vii. $u - v = (1,1)$
viii. $3x + z = (3,7,1)$
ix. $w + 2x$ Não definido porque os vetores têm dimensões diferentes.

2. Considere ainda a questão anterior. Qual a interpretação geométrica dos resultados dos itens i e vii?

3. Calcule a norma dos vetores abaixo.

i. $(3,4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$
ii. $(0,-3) = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$
iii. $(1,1,1) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
iv. $(3,3) = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
v. $(-1,-1) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
vi. $(1,2,3) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
vii. $(1,2,3,4) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$
viii. $(4,5,6) = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$
ix. $(3,0,0,0,0) = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

4. Calcule a distância entre os pontos abaixo.

i. $(0,0)$ e $(3,-4)$: $\sqrt{(0-3)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{25} = 5$
ii. $(1,-1)$ e $(7,7)$: $\sqrt{(1-7)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
iii. $(5,2)$ e $(1,2)$: $\sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$
iv. $(1,1,-1)$ e $(2,-1,5)$: $\sqrt{(1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$
v. $(1,2,3,4)$ e $(1,0,-1,0)$: $\sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (3-(-1))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$

4. Qual a relação entre a distância euclidiana entre dois vetores (exercício anterior) e a norma de um vetor (exercício 3)?

R. A norma de um vetor é simplesmente a distância euclidiana entre esse vetor e a origem.

5. Calcule o produto interno dos vetores abaixo.

i. $u = (1, 0)$ e $v = (2, 2)$: $1 * 2 + 0 * 2 = 2$
ii. $u = (4, 1)$ e $v = (2, -8)$: $4 * 2 + 1 * (-8) = 0$
iii. $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$: $1 * 1 + 1 * 2 + 0 * 1 = 3$
iv. $u = (1, -1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$: $1 * 1 + (-1) * 2 + 1 * 0 = -1$
v. $u =$ (1,0,0,0,0) e $v = (1, 1, 1, 1, 1)$: $1{*}1{+}0{*}1{+}0{*}1{+}0{*}1{+}0{*}1 = 1$

6. Considere novamente a questão anterior. Que itens apresentam vetores perpendiculares entre si?

R. O item (ii), pois o produto interno dos vetores é igual a zero.

7. Calcule o vetor unitário correspondente aos vetores abaixo.
Basta dividir cada coordenada do vetor pela norma desse vetor.

i. $(3, 4)$: $\frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
ii. $(6, 0)$: $\frac{(6,0)}{6} = (1, 0)$
iii. $(1, 1, 1)$: $\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
iv. $(-1, 2, -3)$: $\frac{(-1,2,-3)}{\sqrt{14}} = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$

8. Para cada par de pontos abaixo, escreva as representações paramétrica e não-paramétrica das retas correspondentes.
Para encontrar o vetor que representa a direção da reta que passa por dois pontos, basta calcular a diferença entre esses pontos: o vetor com a mesma direção da reta que passa por x e y é o vetor $(x - y)$ (ou $(y - x)$, tanto faz).

i. $(3, 0)$ e $(5, 0)$
Representação paramétrica: $(x_1 (t) , x_2 (t)) = (3, 0) + t * [(5, 0) - (3, 0)] = (3, 0) + t * (2, 0) = (3 + 2t, 0)$
Essa é uma reta vertical, e portanto não admite a representação tradicional em forma de função.
ii. $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$
Representação paramétrica:
$(x_1 (t) , x_2 (t) , x_3 (t)) = (1, 0, 0) + t * [(0, 0, 1) - (1, 0, 0)] = (1, 0, 0) + t * (-1, 0, 1) = (1 - t, 0, t)$
Essa é simplesmente uma reta no plano (x_1, x_3), pois $x_2 = 0$, e passa pelos pontos $x_1 = 1$,$x_3 = 0$ e $x_1' = 0$,$x_3' = 1$. A inclinação é $\frac{x_3' - x_3}{x_1' - x_1} = -1$. O ponto $\left(x_1', x_3'\right)$ é o intercepto no eixo x_3, pois $x_1' = 0$. Essa reta pode ser escrita como $x_3 = 1 - 1 * x_1 + 0 * x_2$, ou simplesmente $x_3 = 1 - x_1$.