Gabarito - Lista de Exercícios #5 - Métodos Quantitativos em Economia - FCE-UERJ

Professor Pedro Hemsley - 2015.1

1. Quais dos conjuntos de vetores abaixo são linearmente independentes?

i. $(2, 1)$ e $(1, 2)$: LI
ii. $(2, 1)$ e $(-4, -2)$: LD
iii. $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$: LI
iv. $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$: LI
v. $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 1)$: LI
vi. $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$ e $(1, 0, 0, 0)$: LD

2. Considere novamente os vetores da questão anterior. Cada um deles pertence a $\mathbb{R}^n$ para algum n. Determine n para cada item.

i. $n = 2$
ii. $n = 2$
iii. $n = 3$
iv. $n = 3$
v. $n = 4$
vi. $n = 4$

3. Escreva o vetor u como combinação linear dos vetores v_i nos itens abaixo.

i. $u = (2, 2)$, $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, 4)$.
$(2, 2) = c_1 (1, 2) + c_2 (1, 4) = (c_1, 2c_1) + (c_2, 4c_2) = (c_1 + c_2, 2c_1 + 4c_2)$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 3, c_2 = -1.$$

Logo, $u = 3v_1 - v_2$

ii. $u = (1, 2, 3)$, $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.

4. Os vetores $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 12)$ e $(0, 8, 0)$ geram $\mathbb{R}^3$? R. Não, pois não são LD: a matriz composta por esses vetores (como colunas) tem determinante igual a zero (o posto é igual a 2, que é menor do que o número de linhas).

5. Quais dos conjuntos de vetores abaixo são bases de $\mathbb{R}^2$?

i. $(1, 1)$ e $(-2, -2)$: não é base, pois os vetores são LD (um é múltiplo do outro).
ii. $(1, 1)$ e $(2, -2)$: é base, pois os vetores são LI e geram $\mathbb{R}^2$.
iii. $(1, -1)$ e $(-2, 2)$: não é base, pois os vetores são LD (um é múltiplo do outro).

iv. $(1,-1)$, $(1,0)$ e $(3,2)$: não é base, pois são LD: sempre que há mais vetores do que coordenadas em cada vetor, os vetores são LD.

6. Quais dos conjuntos de vetores abaixo são bases de $\mathbb{R}^3$?

i. $(1,1,1)$ e $(1,2,1)$ Não é base porque o número de vetores não é igual à dimensão do espaço (é menor).
ii. $(1,1,1)$, $(1,2,1)$ e $(1,0,1)$ Não é base porque os vetores são LD: a matriz composta por esses vetores (como colunas) tem determinante igual a zero (o posto é igual a 2, que é menor do que o número de linhas).
iii. $(6,3,9)$, $(5,2,8)$ e $(4,1,7)$ Não é base porque os vetores são LD: a matriz composta por esses vetores (como colunas) tem determinante igual a zero (o posto é igual a 2, que é menor do que o número de linhas).
iv. $(1,1,1)$, $(1,2,1)$ e $(1,0,0)$ É base, pois os vetores são LI e eles geram o espaço $\mathbb{R}^3$.
v. $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ Não é base porque o número de vetores não é igual à dimensão do espaço (é maior).

7. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A - rI = \begin{pmatrix} 3-r & 0 \\ 4 & 5-r \end{pmatrix}$

Polinômio Característico (determinante da matriz $A - rI$): $(3-r)(5-r) = 0$.

Autovalores (raízes do polinômio característico): $r_1 = 3$ e $r_2 = 5$.

Autovetores: $(1,-2)$ (associado a r_1) e $(0,1)$ (associado a r_2).

$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$B - rI = \begin{pmatrix} -1-r & 3 \\ -2 & 4-r \end{pmatrix}$

Polinômio Característico (determinante da matriz $B - rI$): $(-1-r)(4-r) + 6 = 0$.

Autovalores (raízes do polinômio característico): $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$.

Autovetores: $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ (associado a r_1) e $(1,1)$ (associado a r_2).

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$C - rI = \begin{pmatrix} -r & -2 \\ 1 & -3-r \end{pmatrix}$

Polinômio Característico (determinante da matriz $C - rI$): $r(3+r) + 2 = 0$.

Autovalores (raízes do polinômio característico): $r_1 = -1$ e $r_2 = -2$.

Autovetores: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (associado a r_1) e $(1, 1)$ (associado a r_2).

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -r & 0 & -2 \\ 0 & 7-r & 0 \\ 1 & 0 & -3-r \end{pmatrix}$$

Polinômio Característico (determinante da matriz $D - rI$): $r\,(3+r)\,(7-r) + 2\,(7-r) = 0$.

Autovalores (raízes do polinômio característico): $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ e $r_3 = 7$.

Autovetores: $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ (associado a r_1), $(1, 0, 1)$ (associado a r_2) e $(0, 1, 0)$ (associado a r_3)..

8. Encontre o traço e o determinante das matrizes da questão anterior a partir dos autovalores.

R. O traço é a soma dos autovalores. O determinante é o produto dos autovalores.

$Tr\,(A) = 8$, $Det(A) = 15$
$Tr\,(B) = 3$, $Det(B) = 2$
$Tr\,(C) = -3$, $Det(C) = 2$
$Tr\,(D) = 4$, $Det(D) = 14$

9. Quais dos conjuntos abaixo são sub-espaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$?

i. $\{(x, y) : x = 0\}$ É subespaço vetorial.
ii. $\{(x, y) : x = 1\}$ Não é subespaço vetorial porque não passa pela origem.
iii. $\{(x, y) : 3x - 4y = 0\}$ É subespaço vetorial.
iv. $\{(x, y) : x^2 = y^2\}$ Não é subespaço vetorial.
v. $\{(0, 1)\}$ Não é subespaço vetorial porque não passa pela origem.
vi. $\{(x, y) : x + y = 0,\ x - y = 0\}$ É subespaço vetorial.
viii. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ Não é subespaço porque não inclui todos os produtos por escalar: se um vetor for multiplicado por -1, o resultante não estará no espaço.
ix. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$ Não é subespaço porque não inclui combinação lineares dos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

10. Para cada item da questão 1, determine uma base para o espaço gerado pelo conjunto de vetores apresentado.

11. Determine uma base para o espaço-linha, uma base para o espaço-coluna e uma base para o espaço-nulo de cada uma das matrizes abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 & 1 \\ 8 & 5 & -10 & 8 \\ -4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Base para espaço-linha: linhas não-nulas na forma escalonada da matriz: p.ex., $(2, -1)$ para matriz A.

Base para espaço-coluna: colunas que correspondem às colunas com um pivô na forma escalonada reduzida: p.ex, coluna $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ na matriz A.

Base para espaço-nulo: base para o conjunto de soluções do sistema homogêneo; p.ex., $Ax = 0$ admite solução $x_2 = 2x_1$, e portanto $(1, 2)$ é uma base (o conjunto de soluções é uma reta, portanto unidimensional, portanto o número de vetores na base é igual a 1).