Segunda Lista de Exercícios - Microeconomia 1 (1ª parte) – PPGE/IE/UFRJ – 2024.1

1. Considere as funções utilidade abaixo:

a. CARA: Constant Absolute Risk Aversion: $u(c) = -e^{-ac}, a > 0$
b. CRRA: Constant Relative Risk Aversion: $u(c) = \frac{c^{1-\rho}}{1-\rho}, \rho \neq 1$

Encontre os coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco para essas funções.

Sejam r_A e r_R os coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco, respectivamente. Logo, $r_R = c \cdot r_A$.

a. $r_A = a$ (ver MWG Example 6.C.4). Logo, $r_R(c) = c \cdot a$.
b. Temos $u' = c^{-\rho}, u'' = -\rho c^{-\rho-1}$. Logo, $r_A = -\frac{u''}{u'} = -\frac{-\rho c^{-\rho-1}}{c^{-\rho}} = \frac{\rho}{c}$.
   Logo, $r_R(c) = c \cdot \frac{\rho}{c} = \rho$

2. ~~Considere o item b da função anterior. Verifique se o coeficiente relativo de aversão a risco é crescente ou decrescente em consumo para os seguintes intervalos: $(-\infty, 0), (0,1), (1, \infty)$. O que acontece para $\rho = 0$? E $\rho = 1$?~~

3. Mostre que se o coeficiente de aversão relativa ao risco é decrescente, então o coeficiente de aversão absoluta ao risco também é decrescente. Interprete. Use a equivalência lógica $[A \Longrightarrow B] \Longleftrightarrow [\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}]$ para concluir o que ocorre quando a aversão absoluta ao risco é crescente.

   $r_R(c) = c \cdot r_A(c)$. Logo:

$$r'_R(c) = r_A(c) + c \cdot r'_A(c)$$

   Considere um agente avesso ao risco: $r_A(c) > 0$. O consumo também é não-negativo: $c \geq 0$. Logo, se $r'_A(c) > 0$, então $r_A(c) + c \cdot r'_A(c) > 0$: ou seja, $r'_R(c) > 0$. Em suma: se o coeficiente de aversão absoluta ao risco é crescente, então o coeficiente de aversão relativa ao risco também é crescente.

   Para termos $r'_R(c) < 0$ com $r_A(c) \geq 0$ e $c \geq 0$, precisamos necessariamente de $r'_A(c) < 0$ (caso contrário, como acabamos de ver, teríamos $r'_R(c) > 0$).

   Se um agente tem aversão relativa a risco decrescente, está mais disposto a arriscar uma parcela de sua renda (digamos, 1%) à medida que sua renda w aumenta, e portanto está mais disposto a arriscar um valor fixo. Por exemplo, se está disposto a arriscar $1\% \times \$100 = \$1$, então está disposto a arriscar $1\% \times \$200 = \$2 > \$1$. Ou seja, se está disposto a arriscar $1 quando tem renda

$100, então continua disposto a arriscar $1 (ou até mais do que isso) quando tem renda $200: aversão absoluta ao risco decrescente.

4. Mostre a seguinte equivalência para um agente com utilidade $u(x)$.

a. Esse agente é avesso ao risco.
b. A utilidade vNM u é côncava.
c. O equivalente certeza de uma loteria F é menor ou igual ao valor esperado de F.

MWG – Proposition 6.C.1 (pode ignorar o item iv).

5. Considere agentes com utilidades vNM u e v. Mostre que o equivalente certeza de u é menor que o equivalente certeza de v se e só se o coeficiente de aversão absoluta de u é maior que o de v.

MWG – Proposition 6.C.2 – considere a equivalência entre os itens (i) e (iii).

6. Mostre que $F(x) \leq G(x)$ para todo x se e só se $E_F[u(x)] \geq E_G[u(x)]$ para qualquer função u crescente.

MWG – Proposition 6.D.1

7. Considere uma variável aleatória $Y = X + \varepsilon$, em que $X \sim U(1,5)$ e $\varepsilon \sim U(-1,1)$. Mostre que X domina Y estocasticamente em segunda ordem.

Y é por definição um *mean-preserving spread* de X (MWG Example 6.D.2). Logo, X domina Y estocasticamente em segunda ordem (MWG Proposition 6.D.2 – itens i e ii).

8. Considere uma economia com dois agentes A e B, com dois bens 1 e 2. O agente A tem utilidade $u_A(x_1^A, x_2^A) = ln(x_1^A) + 2 \cdot ln(x_2^A)$ e dotação inicial $(e_1^A, e_2^A) = (2,0)$. O agente B tem utilidade $u_B(x_1^B, x_2^B) = 2 \cdot ln(x_1^B) + ln(x_2^B)$ e dotação inicial $(e_1^A, e_2^A) = (0,1)$. Encontre o conjunto de alocações Pareto ótimas, a curva de contrato, e o equilíbrio Walrasiano. Verifique que o equilíbrio Walrasiano está na curva de contrato. Interprete de acordo com o primeiro teorema do bem-estar.

Temos $x_2^B = (1 - x_2^A)$ e $x_1^B = (2 - x_1^A)$, pois as dotações totais dos bens 1 e 2 são 2 e 1, respectivamente (*desculpem, não foi proposital*). Podemos calcular as taxas marginais de substituição:

$$TMS_A = \frac{1/x_1^A}{2/x_2^A} = \frac{x_2^A}{2x_1^A}$$

$$TMS_B = \frac{2/_{x_1^B}}{1/_{x_2^B}} = \frac{2x_2^B}{x_1^B} = \frac{2 \cdot (1 - x_2^A)}{(2 - x_1^A)}$$

A condição que descreve alocações Pareto ótimas é $TMS_A = TMS_B$:

$$\frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{2 \cdot (1 - x_2^A)}{(2 - x_1^A)} \Longrightarrow 2x_2^A - x_1^A x_2^A = 4x_1^A - 4x_1^A x_2^A \Longrightarrow 2x_2^A + 3x_1^A x_2^A - 4x_1^A = 0$$

Conjunto de alocações Pareto ótimas:

$$\{(x_1^A, x_2^A): 2x_2^A + 3x_1^A x_2^A - 4x_1^A = 0\}$$

Bastando complementar com $x_2^B = (1 - x_2^A)$ e $x_1^B = (2 - x_1^A)$, como definido anteriormente.

A curva de contrato é o subconjunto de cestas que os agentes preferem à dotação inicial. Ambos tem utilidade $-\infty$ na dotação inicial (formalmente, a utilidade tende a menos infinito à medida que o consumo de um dos bens tende a zero). Segue então que a curva de contrato inclui todos os pontos de $\{(x_1^A, x_2^A): 2x_2^A + 3x_1^A x_2^A - 4x_1^A = 0\}$ tal que $(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B) \gg 0$: nesse caso, ambos os agentes têm utilidade finita, portanto maior que a utilidade em.

(Se quiser, você pode fazer uma transformação monotônica positiva para as funções utilidade e usar $u_A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A \cdot (x_2^A)^2$, $u_B(x_1^B, x_2^B) = (x_1^B)^2 \cdot x_2^B$. A conclusão é a mesma: na dotação inicial, ambos têm utilidade zero, e portanto qualquer alocação com quantidades estritamente positivas de ambos os bens é estritamente preferível.)

Para obter o equilíbrio walrasiano, precisamos encontrar as demandas marshallianas. Começando pelo agente A:

$$TMS_A = \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{p_1}{p_2}$$

Vamos lembrar que só encontramos em equilíbrio os preços relativos (lei de Walras). Ou seja, podemos sempre normalizar um preço. Vamos escolher $p_2 = 1$. Logo:

$$\frac{x_2^A}{2x_1^A} = p_1 \Longrightarrow x_2^A = 2p_1 x_1^A$$

Vamos agora usar a restrição orçamentária do agente A:

$$p_1 x_1^A + \underbrace{p_2 x_2^A}_{1 \cdot 2p_1 x_1^A} = p_1 \underbrace{e_1^A}_{2} + p_2 \underbrace{e_2^A}_{0}$$

$$p_1 x_1^A + 2p_1 x_1^A = 2p_1$$

$$x_1^A = \frac{2p_1}{p_1 + 2p_1} = \frac{2}{3}$$

Logo, $x_2^A = 2p_1 x_1^A = 2p_1 \frac{2}{3} = \frac{4p_1}{3}$

Repetindo o mesmo processo para o agente B, e lembrando que $p_2 = 1$, obtemos:

$$x_2^B = \frac{1}{3}$$

$$x_1^B = \frac{2}{3p_1}$$

Precisamos agora usar uma condição de oferta igual a demanda para encontrar os preços relativos em equilíbrio. Precisamos aplica-la a apenas $N - 1$ mercados; como temos dois mercados, só precisamos de um. Vamos escolher o mercado do bem 1:

$$x_1^A + x_1^B = e_1^A + e_1^B$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3p_1} = 2 + 0$$

$$2 + \frac{2}{p_1} = 6$$

$$2p_1 + 2 = 6p_1 \Longrightarrow 4p_1 = 2 \Longrightarrow p_1 = \frac{1}{2}$$

Usando novamente as demandas marsallhianas, obtemos:

$$x_1^A = \frac{2}{3}$$

$$x_2^A = \frac{4p_1}{3} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_1^B = \frac{2}{3p_1} = \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$x_2^B = \frac{1}{3}$$

Podemos verificar que essa alocação é de fato Pareto ótima, usando a condição que encontramos para otimalidade:

$$2x_2^A + 3x_1^A x_2^A - 4x_1^A = 0$$

$$2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{4}{3} + \frac{12}{9} - \frac{8}{3} = 0$$

$$\frac{12}{9} + \frac{12}{9} - \frac{24}{9} = 0$$

$$0 = 0$$

Ou seja, o equilíbrio Walrasiano é Pareto ótimo.

9. Considere uma economia com dois agentes A e B, com dois bens 1 e 2. O agente A tem utilidade $u_A(x_1^A, x_2^A) = ln(x_1^A) + ln(x_2^A)$. O agente B tem utilidade $u_B(x_1^B, x_2^B) = ln(x_1^B) + 2 \cdot ln(x_2^B)$. A dotação inicial total dessa economia é $(10{,}10)$. Construa uma alocação Pareto ótima (pode ser qualquer uma). Encontre uma distribuição inicial de recursos que sustente essa alocação como um equilíbrio walrasiano. Interprete de acordo com o segundo teorema do bem-estar.

10. Uma alocação é *justa* se é eficiente de Pareto e se nenhum agente prefere a cesta de consumo de outra agente à sua própria. Considere uma economia em que todos os agentes têm preferências racionais, contínuas, monotônicas e côncavas. Mostre que existe ao menos um equilíbrio walrasiano justo nessa economia. (Atenção: essa questão é mais fácil do que parece.)

Considere uma alocação inicial igualitária: cada agente começa com a mesma dotação de cada um dos bens. Logo, seja qual for o vetor de preços no equilíbrio walrasiano, todos os agentes terão exatamente a mesma renda. Logo, qualquer agente poderia ter comprado a cesta que qualquer outro agente adquiriu. Logo, nenhum agente prefere (estritamente) a cesta de outro agente à sua própria cesta. Por último, pelo segundo teorema do bem-estar, o equilíbrio walrasiano é eficiente de Pareto. Em suma, o equilíbrio é eficiente e ninguém prefere a cesta de outro agente à sua própria: o equilíbrio walrasiano é uma alocação justa. (Observe que esse resultado depende inteiramente da capacidade de redistribuição da dotação inicial – essa é uma questão de finanças públicas, não diretamente de equilíbrio geral.)

11. MWG 11.B.3

12. MWG 11.B.4

13. MWG 11.C.1

14. MWG 11.C.2

Exercícios 11 a 14: ver Solutions MWG