<u>**Linguagem e Lógica**</u>

- Clareza de pensamento é uma das coisas mais importantes que podemos desenvolver.

- Para isso, precisamos saber trabalhar com a linguagem.

- Vamos começar com um exemplo simples:

$$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 5\}$$

- O que é o trecho destacado em vermelho?
- É um adjetivo.
- Vamos entender melhor esse adjetivo. Primeiro, vamos escrever a expressão acima em palavras:

Conjunto dos números naturais que são maiores que cinco.

- Para entendê-la, vamos dar uma pequena volta.
- Considere a expressão abaixo:

Elefantes asiáticos

- A palavra 'asiáticos' é um adjetivo, e constrói um subconjunto de 'elefantes'.

- Podemos escrevê-la de maneiras diferentes:

Elefantes que são asiáticos

- Observe que o trecho grifado sempre tem o mesmo papel: **constrói um subconjunto**.

Desenhar aqui conjuntos e subconjuntos

- Em um caso, falamos em 'adjetivo'. No outro, falamos em 'oração subordinada adjetiva'.

- Para nós, não faz diferença: o importante é entender o papel desse termo para construir conjuntos e subconjuntos.

- Vamos trabalhar um pouco mais com esses conceitos. Considere a frase:

Todo lobisomem (que existe no mundo real) é professor.

- Essa frase é verdadeira ou falsa?

- Para mostrar que é falsa, precisamos encontrar um lobisomem que não é professor.

- Mas não existe lobisomem que não é professor porque não existe lobisomem.

- Formalmente, dizemos que o conjunto de lobisomens é subconjunto de qualquer outro conjunto. Ou ainda: o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

- O objetivo aqui é começar a relacionar a teoria de conjuntos com a lógica, e a linguagem de forma geral.

- Vamos ver mais um exemplo.

- João vai fazer um churrasco e convida todos os amigos da turma, incluindo Bruno e Carlos. Bruno confirma, mas Carlos diz:

Eu vou se Bruno não for.

- Como você interpreta essa frase? Há um problema de relacionamento na turma? Carlos irá ao churrasco?

- Não, não há problema. Carlos disse apenas que irá ao churrasco se Bruno não for. Não disse se irá ou se não irá caso Bruno vá ao churrasco!

- Esse cuidado ao analisar uma frase é indispensável na matemática, que precisa de uma linguagem precisa, e em vários outros campos.

- Mas não é tão essencial no dia a dia, em que usamos uma linguagem frequentemente ambígua. (Não se torne o chato que corrige os amigos quando uma frase não é inteiramente precisa do ponto de vista da lógica matemática... você é capaz de entender as ambiguidades, imprecisões e sutilezas da linguagem corrente!)

- Vamos considerar outro exemplo:

Se chove, então molha.

- Note que esse exemplo tem a mesma estrutura do anterior: “se... então...”:

“Se Bruno não for, eu vou”.

- E se não chover, podemos concluir alguma coisa sobre molhar ou não molhar? Não!
- E se molhou: podemos concluir que choveu? Também não!

- E se não molhou, o que podemos concluir? Bem, agora certamente sabemos que não choveu!

- Vamos explorar esse tipo de implicação.

Eu bebo sim
Estou vivendo
Tem gente que não bebe e está morrendo
Eu bebo sim

Tem gente que já está com o pé na cova
Não bebeu e isso prova
Que a bebida não faz mal

- Mas prova mesmo?

- Vamos usar nossa estrutura lógica.

- Temos a seguinte proposição:

Beber causa (necessariamente) problemas de saúde.

- Para provar que é falsa, precisamos encontrar alguém que 'bebeu e não teve problemas de saúde'.

- Encontrar alguém que 'não bebeu e teve problemas de saúde' não nos ajuda!

- É importante observar mais um ponto importante: estamos trabalhando aqui em termos binários, mas frequentemente há tons de cinza.

- Por exemplo, beber a partir de determinada quantidade pode aumentar a probabilidade de haver problemas de saúde para pessoas com certas características de saúde.

- Certamente não estamos mais trabalhando em termos binários.

- A linguagem só nos ajuda se for precisa e descrever o fenômeno relevante para estudo.

- "Beber causa necessariamente problemas de saúde" não é uma afirmativa relevante para a medicina.

Lógica e Teoria de Conjuntos

- Começamos falando em conjuntos, subconjuntos e adjetivos. Agora estamos falando em lógica. Mudamos de assunto?

- Não, não mudamos: lógica e teoria de conjuntos são a mesma coisa. Podemos dizer "Se A, então B", ou "A está contido em B".

- Vamos explorar essa relação em detalhes, mas por enquanto, vamos voltar ao nosso exemplo inicial.

$$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 5\}$$

- Vamos falar um pouco mais sobre ele. Podemos, por exemplo, dizer o seguinte:

$$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 5\} \subset \{x \in \mathbb{N}: x \geq 3\}$$

- Podemos dizer isso de várias maneiras:

O conjunto de números naturais que são maiores ou iguais a cinco está contido no conjunto de números naturais que são maiores ou iguais a três.

Os números naturais que são maiores ou iguais a cinco são maiores ou iguais a três.

Se um número natural é maior ou igual a cinco, então é maior ou igual igual a três.

- Consegue observar como passamos de teoria de conjuntos para uma proposição lógica?

- Para concluir, vamos tomar alguns cuidados com a linguagem? Vamos seguir inicialmente nesse mesmo exemplo:

Os números naturais que são maiores ou iguais a cinco são maiores ou iguais a três.

- Já sabemos que o trecho grifado em vermelho faz a função de um adjetivo. Mas é uma função específica: a função restritiva.

- É assim que construímos um subconjunto.

Alguns cuidados

- Os adjetivos também podem fazer uma função explicativa. Nesse caso, não estamos construindo um subconjunto, mas apenas caracterizando o conjunto original!

Os elefantes asiáticos são mamíferos: *o adjetivo é restritivo.*

Os elefantes, mamíferos, são animais terrestres: *o adjetivo é explicativo.*

- Notou que no segundo caso colocamos o adjetivo entre vírgulas?

- E se colocarmos as vírgulas onde não deveríamos?

Os elefantes mamíferos são animais terrestres.
Estamos dizendo que alguns elefantes não são mamíferos.

Os elefantes, asiáticos, são mamíferos.
Estamos dizendo que todos os elefantes são asiáticos.

Os números naturais, maiores ou iguais a cinco, são maiores ou iguais a três.
Estamos dizendo que todos os números naturais são maiores ou iguais a cinco.

- Você precisa decorar regras para vírgulas? Não: **basta entender se você está construindo um subconjunto, ou se está descrevendo um conjunto**.

- Vamos voltar agora ao nosso exemplo de churrasco.

- Relembrando: João vai fazer um churrasco e convida todos os amigos da turma, incluindo Bruno e Carlos.

- Bruno confirma, mas agora Carlos diz:

Eu só vou se Bruno não for.

- Apenas acrescentamos a palavra 'só'. Mas isso muda tudo.

- Agora temos um problema: Carlos não vai se Bruno for.

- No caso original, tínhamos:

Se Bruno não for, então Carlos vai.
A ausência de Bruno implica a presença de Carlos. A presença de Bruno não tem nenhuma implicação necessária – simplesmente não temos informação sobre esse caso.

- Agora, temos:

Se Bruno for, Carlos não vai.
A presença de Bruno implica a ausência de Carlos.

- Uma palavra mudou completamente o significado da frase.

- Vamos começar a relacionar lógica e teoria de conjuntos.

- Para isso, vamos começar olhando para nossa relação causal básica:

A implica B.

- Esta relação pode ser representada de muitas formas. Podemos dizer:

Se A, então B.

- Ou escrever:

$$\boldsymbol{A \implies B}$$

- 'A' e 'B' são condições que guardam uma determinada relação. Pense em um exemplo concreto:

Se chove, então molha.

- Nesse exemplo, 'A' é a condição 'chover', e 'B' é a condição 'molhar'.

- Essas condições recebem nomes específicos. Você não precisa decorá-los: aos poucos, vai se habituar com eles.

- Na estrutura acima, 'A' é chamada de **condição suficiente**, e 'B' é chamada de **condição necessária**.

- Essa nomenclatura é extremamente comum em matemática. Vamos entendê-la no nosso exemplo.

- 'Chover' é uma condição suficiente para molhar: ou seja, não precisamos de nenhuma outra condição para poder afirmar que algo vai ficar molhado.

- 'Molhar', por sua vez, é a condição necessária: afinal, necessariamente vai molhar alguma coisa, dado que choveu.

- É importante notar que as condições necessária e suficiente não guardam nenhuma relação cronológica. A condição necessária não precisa vir antes da condição suficiente. 'A implica B' não significa que 'A' vem antes de 'B'!

- No nosso exemplo, a condição necessária ('molhar') vem depois da condição suficiente: ou seja, é uma consequência inescapável, necessária, da condição suficiente.

- E como isso se relaciona com a teoria de conjuntos? Muito simples: o que chamamos de ‘A implica B’ em lógica é chamado de ‘A está contido em B’ em teoria de conjuntos.

- Pense em um exemplo simples: o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros. De outra forma: se um número é natural, então esse número também é inteiro.

- Note que ‘o número é natural’ é condição suficiente para ser inteiro. Ou, ainda, um número ser inteiro é condição necessária para ser natural (é impossível um número ser natural sem ser inteiro).

- Vamos continuar explorando a relação entre lógica e teoria de conjuntos. Às vezes, não temos apenas uma condição necessária ou suficiente: pode haver várias.

- Por exemplo:

Se fizer sol e calor, eu vou à praia.

- A condição suficiente agora é: ‘fazer sol E fazer calor’. Preste atenção ao conectivo ‘e’: vamos voltar a ele.

- Podemos representar essa relação da seguinte forma:

$$A_1 \; e \; A_2 \Longrightarrow B$$

- Em que:

A_1: fazer sol
A_2: fazer calor
B: ir à praia

- Em matemática, é frequente usar símbolos universais, que não dependem de um idioma ou alfabeto específico.

- Por exemplo, o conectivo ‘e’ é representado pelo seguinte símbolo:

$$\wedge$$

- Esse símbolo é chamado de ‘e lógico’.

- Podemos então escrever a relação acima da seguinte forma:

$$A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B$$

- Observe que o símbolo ‘e lógico’, um ‘v’ de cabeça para baixo, se parece muito com um símbolo que você já conhece: o símbolo de interseção ∩.

- O símbolo de interseção é apenas o ‘e lógico’ arredondado!

- Isso faz sentido. Afinal, definimos a interseção dos conjuntos A_1 e A_2 como o conjunto dos elementos que pertencem a A_1 e que pertencem a A_2. Note o uso do conectivo ‘e’.

- Podemos passar agora para a união, representada em lógica pelo símbolo de ‘ou lógico’:

$$\vee$$

- O que é parecido com o símbolo de união: ∪.

- Por exemplo:

Se eu estiver viajando ou doente, não irei à aula.

- Note agora que precisamos que apenas uma das condições seja observada para chegar à conclusão: não precisamos mais que ambas valham simultaneamente, como no caso anterior.

- Podemos representar essa frase da seguinte forma:

$$A_1 \vee A_2 \Longrightarrow B$$

- Em que:

A_1: Estou viajando
A_2: Estou doente
B: Não vou à aula

Negação e Contraposição

- Vamos estudar agora uma noção bastante simples: a negação.

- Vamos retomar nosso exemplo básico:

Se chove, então molha.

- A condição suficiente é ‘chover’, e a condição necessária é ‘molhar’.

- A negação de chover é simplesmente ‘não chover’.

- A negação de molhar é simplesmente 'não molhar'.

- Bastante simples, certo? Mas podemos ir além, e explorar a estrutura lógica da nossa frase.

- O que podemos afirmar caso não chova? Ou seja, o que podemos afirmar, a partir da nossa informação inicial 'Se chove, então molha', caso a condição suficiente não valha?

- Não podemos afirmar nada: nem que molha, nem que deixa de molhar. Não temos informação para qualquer uma dessas afirmações.

- Se não chove, alguém pode ligar o chuveiro e molhar algo mesmo assim. Ou então podemos estar em um locar sem qualquer outra fonte de água, como um deserto, e não será possível molhar nada.

- E o que podemos afirmar caso 'não molhe', ou seja, se negarmos a condição necessária?

- Agora é diferente. Nesse caso, podemos garantir que também não choveu. Afinal, nossa informação inicial diz que, se chove então molha – se não molhou, é porque necessariamente não choveu.

- Podemos escrever:

Não A implica não B.

- Em símbolos:

$$\neg B \Longrightarrow \neg A$$

- Essa frase é a contraposição de "A implica B".

- A negação e a contraposição podem ser visualizados na teoria de conjuntos.

- A negação é simplesmente o complemento. Se 'A' é um conjunto, então A^c é o seu complemento. Analogamente, B^c é o complemento de B.

- O que a teoria de conjuntos nos diz? Se sabemos que A está contido em B, então sabemos que o complementar de B está contido em A. Essa é a contraposição.

Gráfico aqui

- Vamos voltar a um exemplo anterior. O conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros. Logo, o complemento dos inteiros está contido no complemento dos naturais.

- Em outras palavras: se um número não é inteiro, então necessariamente não é natural. Observe novamente como podemos expressar a mesma informação na teoria de conjuntos ou na lógica.

- Vamos continuar explorando a relação entre lógica e teoria de conjuntos.

- Vimos que a frase 'Se A, então B' pode ser representada como A => B. 'A' é a condição suficiente, e 'B' é a condição necessária.

- Também podemos dizer 'A somente se B'.

- Observe que novamente vemos que A implica necessariamente B. Ou seja, A está contido em B.

- Várias vezes, você encontrará a frase 'A se e somente se B'. O que isso quer dizer?

- Vamos representar isso em símbolos:

A somente se B é a mesma coisa que A => B.

A se B é a mesma coisa que B => A. Ou seja, agora B está contido em A.

Portanto, 'A se e só(mente) se B' significa que as duas direções valem: A ⇔ B.

O que significa dizer que A está contido em B, e B está contido em A? Significa que os dois conjuntos são iguais: A=B em linguagem de teoria de conjuntos.

Temos agora nossa linguagem básica para falar sobre lógica, e sabemos a relação dessa linguagem com a teoria de conjuntos.

Vamos revisitar agora a negação e a contraposição. Muitas vezes, temos o seguinte tipo de frase:

$$A_1 \ e \ A_2 => B$$

Ou então:

$$A_1 \; ou \; A_2 => B$$

Já sabemos representar essas frases. Mas como escrever a contraposição?

Vamos começar com a negação:

$$\neg(A_1 \; e \; A_2) = \neg A_1 \; ou \; \neg A_2$$

Se não podemos ter duas condições juntas simultaneamente, então ao menos uma das condições não é verificada.

Gráfico

A ideia é semelhante para a negação da união:

$$\neg(A_1 \; ou \; A_2) = \neg A_1 \; e \; \neg A_2$$

Um ponto importante: o 'ou', em lógica ou em teoria de conjuntos, é sempre não-exclusivo. Em outras palavras, a união inclui a interseção.

Vamos ver alguns exemplos concretos.

Uma base de um espaço vetorial é formada por um conjunto de vetores linearmente independentes que geram esse espaço.

Como podemos escrever isso na nossa linguagem?

A_1: o conjunto de vetores é linearmente independente
A_2: o conjunto de vetores gera o espaço vetorial em questão
B: o conjunto de vetores é uma base para esse espaço vetorial

Temos então $A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B$.

Logo, se um conjunto de vetores NÃO É base de um espaço vetorial, então ao menos uma das duas condições deve faltar: ou não são linearmente independentes, ou não geram o espaço vetorial.

Vamos reencontrar esses conceitos no nosso curso.

Vamos a outro exemplo.

Se os agentes econômicos são tomadores de preço e os mercados são completos, então todo equilíbrio de mercado é eficiente no sentido de Pareto.

Na nossa linguagem:

A_1: os agentes econômicos são tomadores de preço
A_2: os mercados são completos
B: todo equilíbrio de mercado é eficiente de Pareto.

Temos novamente $A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B$.

Podemos usar o mesmo raciocínio: se um equilíbrio de mercado **não** é eficiente de Pareto, então ao menos uma das condições deve falhar: ou ao menos um agente não é tomador de preços, ou falta algum mercado. Dessa forma, a contraposição funciona como um mapa para identificar a fonte da ineficiência de um equilíbrio de mercado: se um equilíbrio não é eficiente, basta tentar encontrar situações de poder de mercado ou ausência de mercado – não precisamos procurar em nenhum outro lugar.

Vale reforçar: o teorema não diz que todo equilíbrio de mercado é eficiente. Ele informa sob que condições podemos garantir que o equilíbrio de mercado é eficiente.

Observe que podemos escrever o mesmo resultado de várias maneiras diferentes. Por exemplo: se x é um equilíbrio de mercado, e os agentes são tomadores de preço, e os mercados são completos, então x é eficiente de Pareto.

É equivalente.

A contraposição é usada frequentemente no debate público, e nem sempre de maneira correta.

Alguém diz: "Determinada política econômica (A) irá reduzir o desemprego (B)." Temos aqui $A \Longrightarrow B$.

E outro responde: "Essa afirmativa está errada porque há situações em que o desemprego cai (B) mesmo sem a aplicação dessa política (não A)." Essa resposta não faz sentido: $A \Longrightarrow B$ e $\neg A \wedge B$ podem ser simultaneamente verdadeiras. Voltaremos a esse ponto.

Tipos de Demonstração

Temos uma determinada afirmativa: "Se A, então B".

Já sabemos que qualquer uma das condições (necessária ou suficiente) pode ser uma combinação de uma série de condições, mas não vamos nos preocupar com isso agora.

Como podemos demonstrar que essa afirmativa é **verdadeira**?

Há três tipos de demonstração: direta, por contraposição, e por absurdo.

A demonstração direta parte de A e, usando passos intermediários, chega a B:

$$A => X_1 => X_2 => \cdots => X_n => B$$

De início, não sabemos demonstrar que A implica B. Se conseguimos mostrar cada um dos passos intermediários, podemos chegar ao resultado.

Por exemplo, podemos querer demonstrar que o conjunto (0,1) não tem um ‘maior elemento’.

Demonstração direta: para qualquer elemento x de (0,1), o elemento x + (1-x)/2 também pertence a (0,1), e é maior que x. CQD.

Temos também a demonstração por contraposição, que usa a equivalência lógica entre ‘A => B’ e ‘não B => não A’.

Por exemplo, podemos demonstrar dessa forma que não existe número primo par maior do que 2. De outra forma “se é par e é maior que 2, então não é primo”.

Demonstração por contraposição. Suponha que seja primo. Se for par, é necessariamente igual a 2, que é o único primo par (os demais números pares são divisíveis por 2 e portanto não são primos). Logo, não pode ser simultaneamente par e maior que 2.

Por último, temos a demonstração por absurdo. Nesse caso, mostramos que ‘A e não B implicam absurdo’.

Por exemplo, vamos considerar a frase:

As variáveis x e y são tais que x+y = 1 e 2x + 2y = 3. Esse sistema linear não tem solução.

Vamos provar por absurdo que essa frase é verdadeira. Suponha que o sistema seja de fato esse (condição suficiente) mas que exista uma solução (x,y) (negamos a condição necessária).

A primeira equação, multiplicada por 2, nos diz que 2x + 2y = 2. Mas a segunda nos diz que 2x + 2y = 3. Logo, 2 = 3: absurdo.

Essas três técnicas nos ajudam a demonstrar que uma afirmativa é verdadeira. Mas e para provar que uma afirmativa é falsa?

É mais simples: basta apresentar um contra-exemplo. Ou seja, exemplo que respeite a condição suficiente mas não atenda à condição necessária.

Considere a afirmativa:

“Todo número primo é ímpar.”

Ou:

“O conjunto de números primos está contido no conjunto de números ímpares.”

“Se um número é primo, então é ímpar.”

Para mostrar que essa frase é falsa, basta apresentar um contra-exemplo: x=2. É primo, mas não é ímpar.

Vamos voltar à teoria de conjuntos. Para mostrar que A está contido em B, precisamos mostrar que todos os elementos de A estão presentes em B

Mas para mostrar que A não está contido em B, basta mostrar que um elemento de A não está contido em B.

Cuidado para não ter trabalho à toa! Ou, pior, cuidado para não tentar mostrar algo impossível.

Mostrar que A não está contido em B é diferente de mostrar que a interseção de A e B é vazia!

Tabela Verdade

É simplesmente um dispositivo gráfico que nos ajuda a avaliar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa.

Lembre-se: a dicotomia ‘V ou F’ é análoga à dicotomia ‘pertence ou não pertence’.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
v	v	v	v	f	v	v
v	f	f	v	f	f	f
f	v	f	v	v	v	f
f	f	f	f	v	v	v

Vamos avaliar algumas extensões.

1. $(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$. Resolução à parte.
2. $(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$. Resolução à parte.
3. $(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \Longrightarrow A \wedge \neg A)$. Resolução à parte.
4. $(A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A_1 \Longrightarrow \neg A_2)$. Resolução à parte.

Vamos ver alguns exemplos. Em todos os casos abaixo, identifique a estrutura lógica.

1. Toda sequência convergente de números não negativos tem limite não negativo.

Gabarito: Vamos denotar uma sequência de números por $\{x_n\}$. Isso não é indispensável para a resolução; é apenas para facilitar a notação.

$$A_1\text{: } Todos\ os\ elementos\ da\ sequência\ \{x_n\}\ são\ não\ negativos.$$
$$A_2\text{: } \{x_n\}\ \text{é}\ convergente.$$
$$B\text{: } o\ limite\ de\ \{x_n\}\ \text{é}\ não\ negativo.$$

A estrutura lógica é $A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B$. Essa sentença é verdadeira.

2. Um produto de matrizes invertíveis tem determinante diferente de zero e, portanto, admite inversa.

Gabarito: vamos dizer que X e Y são duas matrizes.

$$A_1\text{: } X\ \text{é}\ invertível$$
$$A_2\text{: } Y\ \text{é}\ invertível$$
$$B\text{: } \det(XY) \neq 0$$
$$C\text{: } Existe\ (XY)^{-1}$$

Estrutura lógica: $A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B \Longrightarrow C$. Essa sentença é verdadeira.

3. Todo sistema linear que admite exatamente duas soluções tem número de variáveis duas vezes maior que o número de equações.

Gabarito: vamos dizer que X é o sistema linear, n é o número de variáveis, e m é o número de equações.

$$A\text{: } X\ admite\ exatamente\ duas\ soluções$$
$$B\text{: } n = 2m$$

Estrutura lógica: $A \Longrightarrow B$.
Essa sentença é verdadeira **por vacuidade** porque nenhum sistema linear admite exatamente duas soluções. Pode admitir 0, 1 ou infinitas soluções. (Jean: talvez valha a pena ilustrar com

três sistemas: um com retas não paralelas, um com retas paralelas e não sobrepostas, outro com retas paralelas e sobrepostas.)

Observe que a notação não é indispensável. Podemos escrever simplesmente:

$$A: um\ sistema\ linear\ admite\ exatamente\ duas\ soluções$$
$$B: o\ número\ de\ variáveis\ desse\ sistema\ linear\ é\ o\ dobro\ do\ número\ de\ equações\ desse\ sistema.$$

4. Se um jogo estático tem um único equilíbrio de Nash, então o jogo dinâmico que consiste na repetição do jogo estático um número finito de vezes, admite um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, que é a repetição do equilíbrio estático em todos os períodos.

Gabarito: vamos denotar o jogo estático por Γ_E e o jogo dinâmico por Γ_D. O número finito de repetições é denotado por n.

$$A_1: \Gamma_E\ tem\ um\ único\ equilíbrio\ de\ Nash$$
$$A_2: \Gamma_D\ é\ repetido\ n\ vezes$$
$$B_1: \Gamma_D\ admite\ um\ único\ equilíbrio\ de\ Nash\ perfeito\ em\ subjogos$$
$$B_2: o\ equilíbrio\ de\ Nash\ perfeito\ em\ subjogos\ de\ \Gamma_D\ consiste\ na\ repetição\ do\ equilíbrio\ de\ Nash\ em\ todos\ os\ períodos$$

Estrutura lógica: $A_1 \wedge A_2 \Longrightarrow B_1 \wedge B_2$
Essa sentença é verdadeira.

5. O aumento da escolaridade média das crianças e jovens brasileiros na década de 1990 contribuiu para o aumento da renda e a redução da desigualdade da economia do país na década seguinte. Logo, não haveria aumento da renda e redução da desigualdade sem o aumento da escolaridade observado na década de 1990.

Gabarito.

$$A: Houve\ um\ aumento\ da\ escolaridade\ de\ crianças\ e\ jovens\ no\ Brasil\ na\ década\ de\ 1990$$
$$B: houve\ aumento\ da\ renda\ e\ diminuição\ da\ desigualdade\ na\ década\ de\ 2000$$

Estrutura lógica: $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow \neg(\neg A \wedge B)$

Essa sentença é falsa. A é condição suficiente para B, mas não é condição necessária. Ou seja, a afirmativa $A \Longrightarrow B$ não implica que, para ter B, precisamos ter A. No nosso caso, podemos ter resultados econômicos positivos (aumento da renda e redução da desigualdade) por outros motivos que não o aumento da escolaridade.

Esse é um erro bastante comum: “$A \Longrightarrow B$” (“educação gera benefícios econômicos”) é interpretado como “$\neg A \Longrightarrow \neg B$” (“sem educação não é possível obter benefícios econômicos”). Mas essa interpretação é errada, pois $\neg A \Longrightarrow \neg B$ é equivalente a $B \Longrightarrow A$, que é diferente de $A \Longrightarrow B$.

Vamos organizar um pouco nossa linguagem. Estamos fazendo cálculo proposicional, o que significa que estamos trabalhando com proposições.

Começamos trabalhando com proposições declarativas: ou seja, proposições às quais podemos atribuir um valor lógico – verdadeiro ou falso.

Toda proposição é verdadeira ou falsa, mas não ambos ao mesmo tempo, e não se admite outra possibilidade.

Tipicamente, começamos trabalhando com proposições simples:

João e Maria são irmãos
Antonio estuda no colégio Eliezer Max
Paulo não gosta de praia

As proposições simples podem ser ligadas por conectivos: não, e, ou, ‘se... então’, ‘se e só se’.

Lembre-se de que todos esses conectivos têm contraparte em teoria de conjuntos: respectivamente, temos: conjunto complementar, interseção, união, relação de continência, igualdade de conjuntos.

Proposições compostas são proposições que conectam duas ou mais proposições simples.

Na tabela verdade, encontramos a relação ‘se... então’ se não há VF em uma linha. E encontramos ‘se e só se’ se não há VF ou FV numa linha.