Lista de Exercícios #6 - Álgebra Linear - IE-UFRJ
Professor Pedro Hemsley

1. Escreva as formas quadráticas abaixo na forma $y = x'Ax$, em que A é uma matriz de ordem n.

i. $y = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
ii. $y = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$
iii. $y = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$
iv. $y = 3x_1^2 + 3x_2^2$
v. $y = -ax_1^2 - ax_2^2$, $a > 0$

2. Escreva a forma quadrática correspondente a cada uma das matrizes abaixo.

i. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

iii. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

iv. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

v. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

vi. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

vii. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. Para cada uma das matrizes do exercício anterior, encontre os menores principais, e identifique os menores principais líderes.

4. Classifique as matrizes do exercício 2 quanto à definição. Interprete.
5. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. Encontre o traço e o determinante das matrizes da questão anterior a partir dos autovalores.

7. Considere a equação de diferença $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$, com condição inicial $x_0 = 1$. Encontre a solução dessa equação. Essa solução é estável? Se $x_{n+1} = 2x_n$, a sua resposta muda? Interprete.

8. Interprete as matrizes do exercício 5 como matrizes de coeficientes de sistemas dinâmicos. Encontre a solução de cada sistema (suponha que a condição inicial, em todos os casos, seja um valor inicial igual a 1 para cada variável). Que sistemas são estáveis?

9. (SB) Encontre a solução geral do processo de Markov para cada uma das matrizes abaixo.

$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

10. (SB) Para cada matriz simétrica abaixo, encontre a matriz ortogonal que a diagonaliza.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

11. (SB) Para cada matriz A abaixo, encontre uma matriz Q tal que $Q^{-1} = Q^T$, e $Q^T A Q$ é diagonal.

$i - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ii - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$