Curso de Graduação de Ciências Econômicas
Introdução à Estatística Econômica
Lista de Exercícios para P2

Questões selecionadas (indicados em azul ao longo da lista):

Meyer: 7.15, 7.40, 7.42, 7.46, 8.4, 8.17, 9.1, 9.33
Bussab e Morettin: Capítulo 6: Exemplo 6.11, Exemplo 6.15; Capítulo 7: 13
ANPEC: Q3 (2018)

Exercícios Meyer

Capítulo 7:

7.1 Determinar o valor esperado das seguintes variáveis aleatórias:

(a) A variável aleatória, X definida no Probl. 4.1.

(4.1. Sabe-se que uma determinada moeda apresenta cara três vezes mais. frequentemente que coroa. Essa moeda é jogada três vezes. Seja X o número de caras que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X e também a fd. Faça um esboço do gráfico de ambas.)

7.3 Os valores abaixo representam a distribuição de probabilidade de D, a procura diária de um certo produto. Calcule $E(D)$.

d:	1,	2,	3,	4,	5
$P(D=d)$	0,1,	0,1,	0,3,	0,3,	0,2

7.6 Suponha que um dispositivo eletrônico tenha uma duração de vida X (em unidades de 1.000 horas), a qual é considerada como uma variável aleatória continua, com a seguinte fdp :

$$f(x) = e^{-x},\ x > 0$$

Suponha que o custo de fabricação de um desses dispositivos seja US$ 2,00. O fabricante vende a peça por US$5,00, mas garante o reembolso total se $X \leq 0{,}9$. Qual será o lucro esperado por peça, pelo fabricante?

7.7 As 5 primeiras repetições de um experimento custam US$ 10 cada uma. Todas as repetições subsequentes custam US $5 cada uma. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro resultado bem sucedido ocorra. Se a probabilidade de um resultado bem sucedido for sempre igual a 0,9, e se as repetições forem independentes, qual será o custo esperado da operação completa?

7.10 Suponha que D, a demanda diária de uma peça, seja uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\mathbf{P}(D = d) = C2^d/d!,\ d = 1,2,3,4$$

(a) Calcule a constante C.

(b) Calcule a demanda esperada.

7.12 Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com as seguintes fdp:

$$f(x) = 8/x^3,\ x > 2;\ g(y) = 2y,\ 0 < y < 1$$

(a) Determine a fdp de $Z = XY$.

(b) Obtenha $E(Z)$ por duas maneiras: (i) empregando a fdp de Z, como foi obtida em (a); (ii) Diretamente, sem empregar a fdp de Z.

7.15 Determine o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias Y e Z do Probl. 5.2.
(5.2. Suponha que X seja uniformemente distribuida sobre (1,3). Ache a fdp das seguintes variáveis aleatórias: (a) $Y = 3X + 4$, (b) $Z = e^X$)

7.23 Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória W do Probl. 6.13 .

(6.13. Quando uma corrente I (amperes) passa através de um resistor R (ohms), a potência gerada é dada por $W = I^2R$ (watts). Suponha que $I\&R$ sejam variáveis aleatórias independentes, com as seguintes fdps:

$$\begin{aligned} I\colon\ f(i) &= 6i(1-i),\ 0 \le i \le 1 \\ &= 0, \text{ para quaisquer outros valores.} \\ R\colon\ g(r) &= 2r,\ 0 < r < 1, \\ &= 0, \text{ para quaisquer outros valores.} \end{aligned}$$

Determine a fdp da variável aleatória W e esboce seu gráfico.)

7.24 Suponha que X seja uma variável aleatória, para a qual $E(X) = 10$ e $V(X) = 25$. Para quais valores positivos de a e b deve $Y = aX - b$ ter valor esperado 0 e variância 1 ?

7.37 Suponha que a variável aleatória bidimensional (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre R, onde R é definido por $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$. (Veja a Fig. 7.17.) Calcule ρ_{xy}, o coeficiente de correlação.

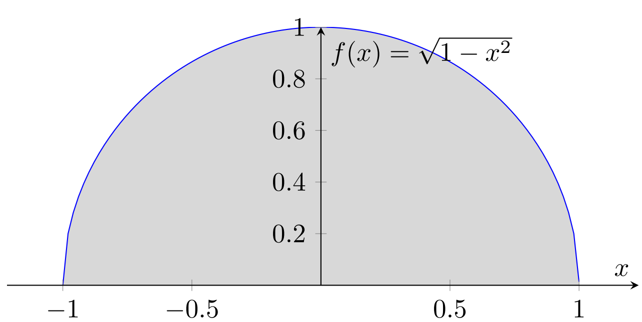

Fig. 7.17

7.39 O exemplo seguinte ilustra que $\rho = 0$ não significa independência. Suponha que (X, Y) tenha uma distribuição de probabilidade conjunta dada pela Tabela 7.1.

(a) Mostre que $E(XY) = E(X)E(Y)$ e consequientemente $\rho = 0$.

(b) Explique por que X e Y não são independentes.

(c) Mostre que este exemplo pode ser generalizado como se segue. A escolha do número $1/8$ não é decisiva. o que é importante é que todos os valores em azul sejam iguais, todos os valores em vermelho sejam iguais, e o valor central seja zero.

Y	X		
	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

Tabela 7.1

7.40 Suponha que A e B sejam dois eventos associados so experimento ε. Suponha que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Sejam as variáveis aleatórias X e Y definidas assim:

$X = 1$ se A ocorrer, e 0 em caso contrário,
$Y = 1$ se B ocorrer, e 0 em caso contrário.

Mostre que $\rho_{xy} = 0$ implica que X e Y sejam independentes.

OBS: Esta questão (7.42) foi alterada em relação ao livro e por isso qualquer gabarito encontrado na internet terá uma resposta diferente. Certifique-se de que, caso você tenha um gabarito, ele foi produzido pelo professor, pela monitora ou pelo tutor.

7.42 Para a variável aleatória (X, Y) definida no Probl. 6.3, calcule:

$E(X \mid y)$

$E(Y \mid x)$

$\mathrm{Var}(X \mid Y)$

Verifique que $E(X) = E[E(X \mid Y)]$ e $E(Y) = E[E(Y \mid X)]$.

(6.3. Suponha que a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) seja dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3},\ 0 < x < 1;\ 0 < y < 2$$

$$= 0, \text{ para quaisquer outros valores. })$$

7.46 Se X, Y e Z forem variáveis aleatórias não-correlacionados, com desvios padrão 5, 12 e 9, respectivamente, e se $U = X + Y$ e $V = Y + Z$, calcule o coeficiente de correlação entre U e V.

Capítulo 8:

8.1 Se X tiver uma distribuição de Poisson com parâmetro β, e se $P(X = 0) = 0{,}2$, calcular $P(X > 2)$.

8.4 Suponha-se que a probabilidade de que uma peça, produzida por determinada máquina, seja defeituosa é 0,2. Se 10 peças produzidas por essa máquina forem escolhidas ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais de uma defeituosa seja encontrada? Empregue as distribuições binomial e de Poisson e compare as respostas.

8.11 Suponha que um livro de 585 páginas contenha 43 erros tipográficos. Se esses erros estiverem aleatoriamente distribuídos pelo livro, qual é a probabilidade de 10 páginas escolhidas ao acaso, estejam livres de erros? (Sugestão: Suponha que $X =$ número de erros por página tenha uma distribuição de Poisson.)

OBS: Esta questão (8.17) foi levemente alterada em relação ao livro para melhor entendimento.

8.17 Uma máquina produz arruelas. Cerca de 50 por cento dessas arruelas são de $1/4$ de polegada de diâmetro; cerca de 30 por cento são de $1/8$ de diâmetro, e os restante 20 por cento são de $3/8$. Suponha que 10 arruelas sejam produzidas.

(a) Qual é a probabilidade de que seja produzido exatamente cinco arruelas de $1/4$, quatro de $1/8$ e uma arruela de $3/8$?

(b) Qual é a probabilidade de que somente dois tipos de arruelas estejam entre as escolhidas

(c) Qual é a probabilidade de que todos os três tipos de arruelas estejam entre aquelas escolhidas

(d) Qual é a probabilidade que existam três de um tipo, três de outro tipo, e quatro do terceiro tipo, em uma amostra de 10?

Capítulo 9:

9.1 Suponha que X tenha a distribuição $N(2{,}0{,}16)$. Empregando a tabela da distribuição normal, calcule as seguintes probabilidades:

(a) $P(X \geq 2{,}3)$

(b) $P(1{,}8 \leq X \leq 2{,}1)$

9.2 O diâmetro de um cabo elétrico é normalmente distribuído com média 0,8 e variância 0,0004. Qual é a probabilidade de que o diâmetro ultrapasse 0,81?

9.3 Suponha que o cabo, no Probl. 9.2, seja considerado defeituoso se o diâmetro diferir de sua média em mais de 0,025. Qual é a probabilidade de se encontrar um cabo defeituoso?

9.4 Sabe-se que os erros, em certo dispositivo para medir comprimentos, são normalmente distribuídos com valor esperado zero e desvio-padrão de 1 unidade. Qual é a probabilidade de que o erro na medida seja maior do que 1 unidade? 2 unidades? 3 unidades?

9.5 Suponha-se que a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(40{,}36)$ e $N(45{,}9)$, respectivamente. Se o dispositivo eletrônico tiver de ser usado por um período de 45 horas, qual dos dispositivos deve ser preferido? Se tiver de ser usado por um período de 48 horas, qual deles deve ser preferido?

9.10 Suponha que X tenha distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Determine c (como uma função de μ e σ), tal que $P(X \leq c) = 2P(X > c)$.

9.11 Suponha que a temperatura (medida em graus centígrados) seja normalmente distribuída, com o valor esperado de $50°$ e variância 4. Qual é a probabilidade de que a temperatura T esteja entre $48°$ e $53°$ centígrados?

9.14 Suponha que X seja uma variável aleatória para a qual $E(X) = \mu \mathbf{e} V(X) = \sigma^2$. Suponha que Y seja uniformemente distribuida sobre o intervalo (a, b). Determine a e b de modo que $E(X) = E(Y)$ e $V(X) = V(Y)$

9.27 Suponha que X tenha uma distribuição exponencial truncada à esquerda, como está dada pela Eq. (9.24). Obtenha $E(X)$.

(Eq. 9.24: Uma variável aleatória X distribuída exponencialmente, truncada à esquerda de $X = \gamma$, teria a seguinte fdp:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= 0 \text{ se } x < \gamma, \\ &= C\alpha e^{-\alpha x}, \text{ se } x \geq \gamma \end{aligned}$$

9.31 Sabe-se que a precipitação anual de chuva, em certa localidade, é uma variável aleatória normalmente distribuída, com média igual a 29,5 cm e desvio padrão 2,5 cm. Quantos centímetros de chuva (anualmente) são ultrapassados em cerca de 5 por cento do tempo?

9.33 Seja X_t o número de partículas emitidas em t horas por uma fonte radioativa e suponha-se que X_t tenha uma distribuição de Poisson, com parâmetro β_t. Faça-se igual a T o número de horas entre emissões sucessivas. Mostre que T tem uma distribuição exponencial com parâmetro β. [Sugestão: Ache o evento equivalente (em termos de X_t) ao evento $T > t$.]

Exercícios Bertsekas (2ed)

1 Você vai a uma festa com 500 convidados. Qual é a probabilidade que exatamente um outro convidado faça o aniversário na mesma data que você? Calcule isto exatamente e aproximadamente usando uma Poisson (Para simplificar exclua aniversário em 29 de fevereiro).

2 Como uma campanha publicitária, uma fábrica de chocolate coloca ingressos de ouro em algumas de suas barras de chocolate, com a promessa de que um ingresso de ouro vale uma viagem pela fábrica de chocolate e todo o chocolate que você pode comer para a vida toda. Se a probabilidade de encontrar um bilhete dourado for p, encontre a média e a variância do número de barras de chocolate necessárias para encontrar um ingresso.

Exercícios Bussab e Morettin

Capítulo 6:

Exemplo 6.11 Um dado é lançado e queremos saber o valor esperado e a variância de que caia 5 ou não. (Dica: Utilize a distribuição de Bernoulli)

Exemplo 6.15 Em problemas de controle de qualidade, lotes com N itens são examinados. O número de itens com defeito (atributo A), r, é desconhecido. Colhemos uma amostra de n itens e determinamos k. Somente para ilustrar, Suponha que num lote de $N = 100$ peças, $r = 10$ sejam defeituosas. Escolhendo $n = 5$ peças sem reposição, qual a probabilidade de não se obter peças defeituosas? E qual a probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa? (Dica: Utilize a distribuição hipergeométrica)

20 Para os exercícios (a) a (e) abaixo, considere o enunciado: Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.

(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.

(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.

(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.

(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

21 Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

(a) n

(b) p

(c) $P(X < 12)$

21 Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

24 Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

Capítulo 7:

13 A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(150,300)$. Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a $200°$, o produto obtido é vendido a C_2 reais; se a temperatura for superior a $200°$, o produto é vendido a C_3 reais.

(a) Fazer o gráfico da f.d.p. de T.

(b) Qual o lucro médio por galão?

18 As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

Exercício ANPEC

QUESTÃO 03-2018: Considere um indivíduo procurando emprego. Para cada entrevista de emprego (X) esse indivíduo tem um custo linear (C) de 10,00 Reais. Suponha que a probabilidade de sucesso em uma entrevista qualquer seja de 0,2. Suponha também que as entrevistas sejam independentes, e que o indivíduo continue fazendo entrevistas até que tenha o primeiro resultado de sucesso. Calcule o custo esperado em Reais desse processo de busca até alcançar o primeiro sucesso. Assuma que X segue uma distribuição geométrica.