## Formas Quadráticas

* Função mais simples que admite solução interior
  * Admite representação matricial

Forma Quadrática: $Q: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : Q(x) = x^T Ax$ , $A$ simétrica.

Exemplo: $Q: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$
Q $= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

## Definição de formas quadráticas

Não existe termo independente. Logo. $Q(x = 0) = 0$.

Em uma dimensão: $Q(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.
Se $a > 0$, $x = 0$ é um ponto de mínimo: $Q \geq 0$. $Q$ é *positiva definida (PD)*: $Q\,(x)$ é estritamente positiva em todo ponto $x \neq 0$.
Se $a < 0$, $x = 0$ é um ponto de máximo: $Q \leq 0$. $Q$ *negativa definida (ND):* $Q\,(x)$ é estritamente negativa em todo ponto $x \neq 0$.

Duas dimensões: $y = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
Se $(x_1, x_2) \neq (0, 0) \Rightarrow Q > 0$, então $Q$ é é P.D.
Se $(x_1, x_2) \neq (0, 0) \Rightarrow Q < 0$, então $Q$ é é N.D.

Se uma função quadrática pode assumir valores positivos e negativos, é dita indefinida.
Exemplo: $y = x_1^2 - x_2^2$

Se nunca é negativa, mas pode ser igual a 0 para x $\neq$0, é dita positiva semi-definida
Exemplo:$y = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = 0$ no ponto $(1, -1)$.

Análogo para negativa semi-definida.
Exemplo: $-(x_1 + x_2)^2$

Podemos definir a matriz $A$ a partir das propriedades da forma quadrática $Q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^m$. Seja $A_{(mxn)}$simétrica. Então $A$ é:

a) P.D se$x^T Ax > 0 \ \forall x \neq 0$.
b) P.S.D se $x^T Ax \geq 0 \ \forall x \neq 0$ .
c) N.D se $x^T Ax < 0 \ \forall x \neq 0$.
d) N.S.D se $x^T Ax \leq 0 \forall x \neq 0$ .
e) Indefinida caso não se encaixe em nenhum dos casos anteriores.

## Teste para Definição de Matriz

Definição: *Menores*: São submatrizes de uma matriz A qualquer, retirando determinadas linhas e colunas. Se forem retiradas linhas e colunas de mesmo índice, sobrará uma submatriz principal, cujo determinante é o menor principal.

Exemplo: A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
Menor principal de ordem 2: Det(A)
Menores principais de ordem 1: $a_{11}$ e $a_{22}$
Exemplo 2: A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
Menor principal de ordem 3: Det (A)
Menores principais de ordem 2: $\det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$, $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$, $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)$
Menores principais de ordem 1: $a_{33}$ , $a_{22}$ e $a_{11}$

Os menores principais mais usados , para cada ordem, são formados por eliminação das últimas linhas e colunas. São conhecidos como Menores Principais Líderes (MPL's):

$a_{11}$, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Teorema: Seja $A_{(mxn)}$. Então:
1 - A é P.D se todos os MPL's são estritamente positivos.
2 - A é N.D se os MPL's altenarem de sinal, começando com o sinal negativo: $A_1 < 0$, ... $A_2 > 0$, ...

Exemplos:
1 - $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A_1 = 2 > 0,\ A_2 = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3 > 0:$ P.D
2 - $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A_1 = -1 < 0, A_2 = (-1) \times 1 - 2 \times (-2) = 3 > 0:$ N.D
3 - $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad A_1 = 2 > 0, A_2 = 2 \times 7 - 3 \times 3 = 5 > 0:$ P.D
4 - $Q = x_1^2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
$A_1 = 1 > 0,\ \ A_2 = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 > 0:$ P.D.
5 - $Q = -x_1^2 - x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
$A_1 = -1 < 0, A_2 = (-1) \times (-1) - 0 \times 0 = 1 > 0$: N.D

## Matrizes Diagonais

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$ Representa $a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$

P.D se $a_i > 0\ \forall i$
N.D se $a_i < 0\ \forall i$
P.S.D se $a_i \geq 0\ \forall i$
N.S.D se $a_i \leq 0\ \forall i$

Para uma matriz diagonal, os elementos da diagonal principal são exatamente seus autovalores. Logo, uma matriz diagonal é positiva se todos os seus autovalores são estritamente positivos, e assim em diante.

Podemos generalizar: uma matriz é positiva definida quando todos os seus autovalores são estritamente positivos, e positiva semi-definida quando todos os seus autovalores são não-negativos (mas podem ser iguais a zero). Vale descrição análoga para matrizes negativas (semi) definidas.