# Transformação Linear

November 5, 2018

Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais. A função $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear se para quaisquer $v_1$, $v_2$ em $V$, e para qualquer constante $c \in R$, temos:

1- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

2- $T(cv_1) = cT(v_1)$

De forma equivalente: para quaisquer $v_1$, $v_2$ em $V$, e para quaisquer $c_1$, $c_2$ em $R$, temos:

$$T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$$

Ou seja, a transformação linear da combinação linear de $v_1$ e $v_2$ (lado esquerdo dessa equação) é igual à combinação linear das transformações individuais de cada um desses vetores.

Observe que essa definição implica:

$T(0) = 0$

A demonstração é simples:

$T(0) = T(0 + 0)$, pois $0 = 0 + 0$ em qualquer espaço vetorial (0 é o elemento neutro da adição vetorial).

Mas $T(0+0) = T(0)+T(0)$, pois $T$ é transformação linear. Logo, $T(0) = T(0) + T(0)$. Subtraindo $T(0)$ dos dois lados, obtemos:

$$T(0) - T(0) = T(0) + T(0) - T(0)$$

$$0 = T(0)$$

O que prova o resultado. Interpretação: uma transformação linear deve sempre passar pela origem.

Observe então que a função $y = ax + b$ não é uma transformação linear se $b \neq 0$, pois não passa no ponto $(0, 0)$.

## Exemplos

1- Seja $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = ax$, para algum número real $a$.

Podemos verificar que essa função define uma transformação linear:
$T(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_@) = ax_1 + ax_2 = T(x_1) + T(x_2)$
$T(cx) = a(cx) = c(ax) = cT(x)$

2- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 = [a_1a_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

5- $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ...x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{nm}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ou seja:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A \times \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}\right) \tag{5}$$

Toda transformação linear (finita) pode ser representada dessa forma.

# Algumas Definições

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

O *núcleo de* $T$ é o subconjunto de $V$ $\{v \in V : T(v) = 0\}$. Ou seja, são os pontos cuja imagem é zero (a origem do contradomínio).

A *imagem de* $T$ é o subconjunto de $W$ $\{w \in W : \exists v \in V / T(v) = w\}$.

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, então o núcleo é o espaço-coluna da matriz $A$ definida acima, e a imagem é o espaço-coluna associado a ela.

É possível provar que o núcleo é um sub-espaço vetorial de $V$, e a imagem é um sub-espaço vetorial de $W$. Temos ainda a seguinte relação entre as dimensões desses sub-espaços:

$$dim(nucleo) + dim(imagem) = dim(V) \tag{6}$$

Observe ainda que a dimensão da imagem é o posto da matriz $A$.

Relembre as seguintes definições. Uma função é injetiva é tal que

$$T(x) = T(y) \Longrightarrow x = y \tag{7}$$

. Uma função sobrejetiva é tal que $\forall w \in W, \exists v \in V : T(v) = w$.

Em palavras: para uma função injetiva, dois pontos diferentes no domínio têm imagens diferentes. Para uma função sobrejetiva, a imagem é o contradomínio inteiro.

Temos as seguintes caracterizações alternativas.

Uma transformação linear é injetiva se e somente se $nucleo(T) = \{0\}$, e é sobrejetiva se e só se $im\{T\} = W$.

Se $T : V \longrightarrow W$ e portanto existe uma matriz $A$ tal que $T(v) = Av$, então:

- $T$ é injetiva se e só se as colunas de $A$ são linearmente independentes
- $T$ é sobrejetiva se e só se as colunas de geram $\mathbb{R}^m$.

Logo, $T$ é bijetiva (injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo) se e só se as colunas de $A$: (i) geram $\mathbb{R}^m$; e (ii) são linearmente independentes. Ou seja, as colunas de $A$ devem ser uma base do contradomínio para que $A$ seja bijetiva e, portanto, invertível.

Considere agora uma base $v_1$,...,$v_n$ de $V$. A transformação linear $T : V \longrightarrow W$ fica unicamente determinada pelos valores $T(v_1$,...,$T(v_n$.

Para verificar esse resultado, observe que para todo $v \in V$, existe um único vetor $(x_1, ..., x_n)$ tal que $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$. Pela definição de transformação linear, temos:

$$T(v) = T(x_1v_1 + ... + x_nv_n) = x_1T(v_1) + ... + x_nT(v_n) \tag{8}$$

Como o vetor $(x_1, ..., x_n)$ é único, a imagem de $v$ fica unicamente determinada a partir das imagens $T(v_1), ..., T(v_n)$ da base $v_1, ..., v_n$.

Logo, qualquer elemento $T(v)$ na imagem de $T$ pode ser escrito como combinação linear de $T(v_1), ..., T(v_n)$. Ou seja, $im\{T\} = \mathcal{L}\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$. Considere os seguintes exemplos. 1-

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Encontre $T(w)$ se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é linear com:
1-

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Precisamos escrever $w$ como combinação linear de $v_1$ e $v_2$, ou seja, encontrar constantes $c_1$ e $c_2$ tal que $w = c_1v_1 + c_2v_2$.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = c_1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Realizando as operações de álgebra matricial, pode escrever esta equação como:

$$c_1 + 2c_2 = 5$$

$$c_1 + c_2 = 7$$

Resolvendo esse sistema linear (se tiver dúvidas, olhe novamente o início da matéria), obtemos:

$$c_1 = 9$$

$$c_2 = -2$$

Logo, $w = 9v_1 - 2v_2$, e portanto:

$$T(w) = T(9v_1 - 2v_2) = 9T(v_1) - 2T(v_2)$$

Substituindo os valores dados para $T(v_1)$ e $T(v_2)$, obtemos:

$$T(w) = 9 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Como $v_1$ e $v_2$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever $T(w)$ como combinação linear de $T(v_1)$ e $T(v_2)$.

Vamos agora obter $T(x)$ para $x \in \mathbb{R}^2$ qualquer:

$$c_1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Podemos reescrever na forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 2x_2 - x_1$ e $c_2 = x_1 - x_2$.

Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2x_2 - x_1) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_1 - x_2) \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Podemos tomar agora o valor da transformação linear $T$ em ambos os lados:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left((2x_2 - x_1) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_1 - x_2) \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \tag{16}$$

No lado direito, temos a transformação linear de uma combinação linear, e podemos então escrever:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = (2x_2 - x_1) \times T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (x_1 - x_2) \times T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \tag{17}$$

Podemos substituir agora as imagens de $T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, dados anteriormente:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = (2x_2 - x_1) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (x_1 - x_2) \times \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_1 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_1 - 4x_2 \\ 7x_1 - 7x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 5x_2 - 2x_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Ou seja, encontramos a imagem $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ para um vetor $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ qualquer em $\mathbb{R}^2$.

Podemos enunciar agora o seguinte resultado. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Existe uma matrix $A_m \times n$ tal que $T(x) = Ax, \forall x \in R^n$. A i-ésima coluna dessa matrix é dada por $Ae_i = T(e_i)$.

Se $T$ é conhecida, essa operação é fácil. Por exemplo:

$$T(x) = \begin{bmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \tag{19}$$

Mas $T$ pode ser descrita de outras formas, como nos exemplos abaixo.

### Exemplos de Transformações Lineares $R^2 \longrightarrow R^2$

Considere inicialmente uma rotação em torno do eixo horizontal. Ou seja: mantemos a coordenada no eixo horizontal, e trocamos o sinal da coordenada do eixo vertical. Essa transformação pode ser representada pela seguinte matriz:

$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

Se $x = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, então:

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = Ax = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \tag{20}$$

Analogamente, uma rotação em torno do eixo vertical é obtida através da matriz:

$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Já a rotação em torno da reta de 45 graus é obtida com a matri

$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

## Matriz de uma Transformação Linear

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais $V$ e $W$. Considere uma base $v_1, ..., v_n$ para o domínio $V$ e uma base $w_1, ..., w_m$ para o contradomínio $W$.

Podemos escrever um vetor $v \in V$ qualquer como combinação linear da base de $V$:

$v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$

É possível provar que o vetor de coeficientes $(x_1, ..., x_n)$ é único. Esse é o chamado vetor de coordenadas de $v$ na base $v_1, ..., v_n$. Temos então uma bijeção $f$ entre $V$ e $R^n$. De forma análoga, podemos construir uma bijeção $g$ entre $W$ e $R^m$.

Podemos então associar a transformação linear $T : V \longrightarrow W$ à transformação linear $T' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, que pode ser representada por uma matriz $A_{m \times n}$. Essa é a matriz de $A$ *nas bases escolhidas* (se a base de $V$ ou $W$ mudar, a matriz que representa $T$ também mudará). A i-ésima coluna dessa matriz é o vetor de coordenadas de $T(v_i)$.

## Exemplos de Matrizes de Transformações Lineares

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 17x_1 - 20x_2 \\ 12x_1 - 14x_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Vamos determinar a matriz que representa $T$ na base canônica de $\mathbb{R}^2$:

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Obtemos inicialmente as imagens de $e_1$ e de $e_2$:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 17 \cdot 1 - 20 \cdot 0 \\ 12 \cdot 1 - 14 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix} = 17e_1 + 12e_2 \tag{22}$$

Obtemos analogamente a imagem de $e_2$:

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 17 \cdot 0 - 20 \cdot 1 \\ 12 \cdot 0 - 14 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -14 \end{bmatrix} = -20e_1 - 14e_2 \tag{23}$$

A matriz que representa essa transformação na base canônica é:

$$\begin{bmatrix} 17 & -20 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Vamos agora representar essa transformação linear na seguinte base:

$v_1 = \begin{bmatrix} 55 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}17 \cdot 5 - 20 \cdot 4\\12 \cdot 5 - 14 \cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \tag{25}$$

$$T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}17 \cdot 4 - 20 \cdot 3\\12 \cdot 4 - 14 \cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \tag{26}$$

A matriz que representa essa transformação linear é:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} \tag{27}$$