Apostila de Métodos Quantitativos - UERJ
Professor: Pedro Hemsley
Versão preliminar; favor não circular.

Sistemas Lineares

Exemplos de Equações Lineares:

$x_1 + 2x_2 = 3$
$2x_1 - 3x_2 = 8$

Forma Geral: $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ (ao invés de y = ax + b)

a's, b: parâmetros
x's: variáveis

→Cada termo possui apenas uma variável, elevada à 1ª potência.
→Quando existem, as soluções de uma sistema linear podem ser encontradas explicitamente.

Estudamos álgebra linear para trabalhar com aproximações lineares (cálculo) e com versões exatas de modelos (econômicos ou matemáticos) lineares.

Sistemas de Equações Lineares: Técnicas p/ solução

Como resolver sistemas do tipo:

A: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

B: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

C: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$

De forma geral:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

→ $a_{ij}'s$ e $b_i's$ são parâmetros: números (reais) dados
→ a_{ij}é o coeficiente de x_j na equação i
→Uma solução é um vetor $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ que resolve todas as equações simultaneamente.

Perguntas relevantes sobre um sistema:

1 - Existe solução ?
2 - Há quantas soluções ?
3 - Existe um algoritmo (procedimento) para computar as soluções ?

Procedimentos:
i: substituição
ii: eliminação de variáveis
iii: método matricial

i: Substituição

- método ensinado desde o 1º grau

Exemplo A:

$2x_1 + 3x_2 = 7$ (eq 1)
$x_1 - x_2 = 1$ (eq 2)

eq 2 → $x_1 = 1 + x_2$

Substituindo na eq 1:
$2(1+x_2)+3x_2=7$
$2+2x_2+3x_2=7$
$5x_2=5 \rightarrow x_2=1$

Substituindo de volta na eq 2:
$x_1=1+x_2$
$x_1=1+1$
$x_1=2$

Solução: $(x_1,x_2)=(2,1)$

Existe solução ? Sim.
Quantas soluções ? Apenas uma.
Existe algoritmo ? Sim.

Exemplo B:

$x_1+x_2+x_3=5$ (eq 1)
$x_2-x_3=0$ (eq 2)

Use a eq 2 p/ isolar x_3:
$x_3=x_2$

substitua o valor de $x_3$na eq 1:
$x_1+x_2+x_3=5$
$x_1+x_2+x_2=5$
$x_1+2x_2=5$

Use a nova eq 1 p/ isolar x_2:
$x_2=\frac{5-x_1}{2}$

Substitua de volta na eq 2:
$x_3=\frac{5-x_1}{2}$

Solução: $(x_1,x_2,x_3)=(x_1,\frac{5-x_1}{2},\frac{5-x_1}{2})\ \forall x_1\in\mathbb{R}$

Existe solução ? Sim.
Quantas soluções ? Infinitas $(\forall x_1\in\mathbb{R})$
Existe algoritmo ? Sim.

Exemplo C:

$x_1+x_2=5$ (eq 1)
$2x_1+2x_2=4$ (eq 2)

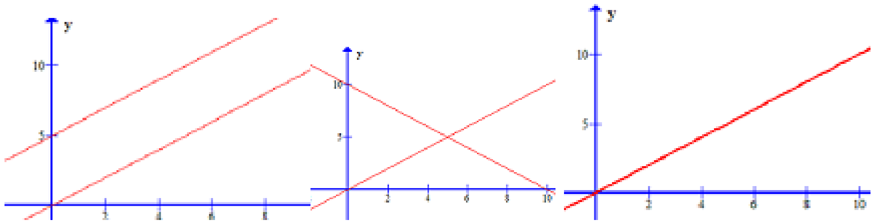
eq 2 $\rightarrow 2x_2=4-2x_1$
$x_2=2-x_1$

Substitua na eq 1:

$x_1+x_2=5$
$x_1+2-x_1=5$
$x_1-x_1=5-2$
$0=3:$ absurdo

Existe solução ? Não
Quantas soluções ? Zero
Existe algoritmo ? Não

Esses 3 exemplos ilustram todos os casos possíveis: há zero, uma ou infinitas soluções. Para duas retas (ou seja, duas equações lineares no plano), esses casos podem ser representados como se segue:



Quando há apenas duas equações, pode haver apenas três casos: as: retas se encontram em um único ponto; podem ser paralelas e sobrepostas (e portanto se encontram em todos os pontos); ou podem ser paralelas e distintas (nunca se encontram). Se houver mais de duas retas, pode não haver encontro simultâneo de todas elas.

ii: Eliminação de Variáveis

- Ideia: usar uma equação para eliminar uma variável das demais equações.

Exemplo A:

$(1) 2x_1 + 3x_2 = 7$
$(2) x_1 - x_2 = 1$

$(2) \rightarrow -2 * (2)$: multiplicar uma equação por número$\neq 0$

$(1) 2x_1 + 3x_2 = 7$
$(2) -2x_1 + 2x_2 = -2$

$(2) \rightarrow (2) + (1)$: adicionar uma equação a outra

$(1) 2x_1 + 3x_2 = 7$
$(2) 0x_1 + 5x_2 = 5$
Agora, cada equação tem menos variáveis que a equação anterior

$(2) x_2 = 1$

Substituição reversa:

$(1) 2x_1 + 3 * 1 = 7$
$2x_1 = 4$
$x_1 = 2$

Exemplo B:

$(1) x_1 + x_2 + x_3 = 5$ $\rightarrow$cada equação já possui menos variáveis do que a equação anterior no sistema original
$(2) x_2 - x_3 = 0$

$(2) x_2 = x_3$

Substituição Reversa:
$x_1 + x_3 + x_3 = 5$
$x_1 = 5 - 2x_3$

Solução: $(x_1, x_2, x_3) = (5 - 2x_3, x_3, x_3) \forall x_3 \in \mathbb{R}$
É igual à solução encontrada anteriormente, mas agora fica expressa em função de x_3.
Quando há infinitas soluções, sempre há pelo menos uma variável livre. Pode-se escolher qualquer uma - nesse caso, escolhemos x_3.

Exemplo C:

$(1) x_1 + x_2 = 5$
$(2) 2x_1 + 2x_2 = 4$

$(2) \rightarrow -\frac{1}{2} * (2)$
$(1) x_1 + x_2 = 5$
$(2) x_1 - x_2 = -2$

$(2) \rightarrow (2) + (1)$
$(1) x_1 + x_2 = 5$
$(2) 0x_1 - 0x_2 = 3 \rightarrow 0 = 3!$

Operações Elementares com Equações

1 - Adicionar o múltiplo de uma equação a outra.
2 - Multiplicar uma equação por qualquer número, exceto zero.
3 - Trocar a ordem das equações.

Qualquer solução do sistema original também é solução do sistema alterado por essas operações. Dois sistemas são ditos equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Em outras palavras, as operações elementares possuem memória; dessa forma, podem ser revertidas.

Usamos as operações elementares para colocar o sistema em uma forma particularmente simples: cada equação tem menos variáveis que a equação anterior. Depois, aplicamos a substituição reversa para encontrar a solução (ou as soluções), quando houver.

Esse método é chamado Eliminação Gaussiana: a ideia geral é usar o coeficiente a_{ij}(var x_j na eq$i$) como "pivô" para zerar o coeficiente a_{kj} (variável x_j na equação k) para todo $k > i$ (ou seja, nas linhas abaixo da linha i).

Uma variante é o método de Gauss-Jordan. Após ter um sistema tal que cada equação tenha menos variáveis que a equação anterior, usa-se um coeficiente$\neq 0$ da última equação como pivô, para zerar os coeficientes das equações anteriores. O ideal é transformar o coeficiente$\neq 0$ em 1.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 & -0.4x_2 & -0.3x_3 & = 130 \\ & 0.8x_2 & -0.2x_3 & = 100 \\ & & 0.7x_3 & = 210 \end{cases}$$

Substituição reversa (eliminação Gaussiana):
$(3) x_3 = 300$
$(2) x_2 = 200$
$(1) x_1 = 300$

Gauss-Jordan: divida a segunda equação por 0.8 (pivô de x_2, primeira variável com coeficiente não-nulo nessa equação) e a terceira equação por 0.7.

$$\begin{cases} x_1 & -0.4x_2 & -0.3x_3 & = 130 \\ & x_2 & -0.25x_3 & = 125 \\ & & x_3 & = 300 \end{cases}$$

Use o coeficiente de x_3 em (3) como pivô para eliminar x_3 de (1) e(2); depois use o coeficiente de $x_2$em(2)como pivô para eliminar x_2 de (1).
Resultado:
$(1) x_1 \quad\quad\quad = 300$
$(2) \quad\quad x_2 \quad = 200$
$(3) \quad\quad\quad x_3 = 300$

Operações Elementares com linhas

Sistema com m equações e n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uso de matriz para resumir informações:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Coeficientes}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz Aumentada}$$

Operações Elementares:
1 - Trocar ordem das linhas
2 - Adicionar múltiplo não-zero de uma linha a outra
3 - Multiplicar cada elemento de uma linha por número diferente de zero.

Um matriz aumentada que recebeu essas operações representa um sistema linear equivalente ao da matriz original.

Uma matriz está em forma escalonada se o primeiro elemento diferente de zero em cada linha se encontra numa coluna posterior ao primeiro elemento não-zero da linha anterior. O primeiro elemento não-zero em uma linha é denominado pivô. Considere os seguintes exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma matriz está em forma escalonada se o primeiro elemento diferente de zero em cada linha se encontra numa coluna posterior ao primeiro elemento não-zero da linha anterior. O primeiro elemento não-zero em uma linha é denominado pivô.

Se a matriz aumentada de um sistema estiver em forma escalonada (o que pode ser obtido através da eliminação gaussiana), a solução pode ser encontrada por substituição reversa.

Para reproduzir a eliminação de Gauss-Jordan, é necessário simplificar ainda mais a matriz aumentada.

Primeiro, multiplica-se cada linha pelo recíproco do seu pivô, de forma a transformar o pivô em 1.

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,3 & 130 \\ 0 & 0,8 & -0,2 & 100 \\ 0 & 0 & 0,7 & 210 \end{pmatrix} (2)\rightarrow (2) * \tfrac{1}{0,8} \qquad (3)\rightarrow (3) * \tfrac{1}{0,7}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,3 & 130 \\ 0 & 1 & -0,25 & 125 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

Depois, usamos cada pivô para eliminar as entradas não-zero nas linhas acima:

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Solução}$$

Uma matriz está em forma escalonada reduzida se cada pivô é igual a 1 e cada coluna que contém um pivô não contém outros elementos diferentes de zero.

Sistemas c/ Infinitas Soluções ou Sem Solução

As soluções (x_1, x_2) que satisfazem $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = b_1$ formam uma reta. Logo, a solução para um sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \end{cases}$ ocorre no(s) ponto(s) em que as duas retas se cruzam.

Entretanto, as retas podem ser paralelas. Isso implica que ou elas nunca se cruzam, ou elas se sobrepõe apenas duas opções.

Se elas se sobrepõe, qualquer ponto sobre qualquer uma delas é uma solução. Exemplo:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\left.\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}\right\} \rightarrow \text{(2) não adiciona informação}$$

Se nunca se encontram, então$\nexists$solução:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\left.\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}\right\} \rightarrow \text{Informação incompatível}$$

O mesmo princípio vale para sistemas com m equações e n variáveis: há 0, 1 ou ∞soluções.

Questões:

1 - Que condições na matriz de coeficientes garantem a existência de ao menos uma solução$\forall b = (b_1, \ldots, b_m)$?

2 - Que condições na matriz de coeficientes garantem a existência de no máximo uma solução$\forall b$?

3 - Que condições na matriz de coeficientes garantem a existência de exatamente uma solução$\forall b$?

Vocabulário:

- variável livre: variável que não é determinada pelo sistema.
- variável básica: variável determinada pelo sistema, ou dependente apenas das variáveis livres.

A ordem de aplicação das operações elementares determina quais variáveis serão livres e quais serão básicas. Quando um sistema admite uma única solução, não há variáveis livres.

Posto de uma Matriz

O critério fundamental para responder às questões acerca da existência e unicidade de soluções de um sistema é o posto de uma matriz.

Definição: o *posto* de uma matriz é o número de linhas diferentes de zero na forma escalonada dessa matriz. (Uma linha é diferente de zero se ao menos um elemento é diferente de zero.)

É possível provar que essa definição não depende de que forma escalonada é escolhida porque uma mesma matriz admite diversas formas escalonadas.

Sejam A e $\hat{A}$ a matriz de coeficientes e a matriz aumentada de dado sistema, respectivamente. Sejam B e $\hat{B}$ as matrizes correspondentes em forma escalonada. É possível provar que $\hat{B}$ é uma matriz aumentada para B, pois o processo para escalonar $\hat{A}$ não depende da última coluna.

É possível provar os seguintes resultados:
1 - Posto(A)$\leq$Posto($\hat{A}$);
2 - Posto(A)$\leq$Número de linhas de A;
3 - Posto(A)$\leq$Número de colunas de A.

Um sistema linear possui solução se e somente se Posto(A)=Posto($\hat{A}$).
Se um sistema admite exatamente uma solução, então o número de linhas da matriz de coeficientes A é maior ou igual que o número de colunas. Essa é uma condição *necessária*, porém não *suficiente*, para unicidade.

Exemplo: sistema com uma equação (M = 1) e duas variáveis (N = 2):

$$x_1 + x_2 = 2$$

$N > M$: Número de variáveis > Número de equações
Número de colunas > Número de linhas

A condição necessária não se verifica, e portanto o sistema não pode ter uma única solução.

Implicação: se um sistema possui mais variáveis do que equações, então há apenas duas possibilidades:

1 - há infinitas soluções;
2 - não há solução.

Considere um sistema em que $(b_1, \ldots, b_m)= (0, \ldots, 0)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é dito homogêneo e admite no mínimo uma solução, dita *solução trivial*:

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

Portanto, *um sistema homogêneo com mais variáveis do que equações admite, necessariamente, infinitas soluções.*

Os b_i´s, porém, são exógenos, e é importante saber que propriedades garantem existência e unicidade da solução para quaisquer b_i´s, e não apenas $b_i = 0 \forall i$.

Teorema: um sistema possui *ao menos uma* solução para qualquer escolha de b_i´s se e somente se Posto(A) = Número de linhas de A. (1)

Se um sistema possui mais equações do que variáveis, então há pelo menos uma escolha de b_i´s tal qual que o sistema não tenha solução.

Teorema: um sistema terá *no máximo uma* solução para toda escolha de b_i´s se e somente se Posto(A) = Número de colunas de A. (2)

Um sistema possui exatamente uma solução para toda escolha de b_i´s, portanto, se e somente se:

Posto(A) = Número de linhas de A = Número de colunas de A.

Diz-se então que a matriz é não-singular. Para que exista exatamente uma solução, a matriz deve ter o mesmo número de linhas e de colunas; matrizes com essa propriedade são ditas quadradas. Mais do que isso, não deve haver "linhas redudantes", ou "retas paralelas", o que se traduziria em linhas iguais a $(0, \ldots, 0)$ na forma escalonada.

A forma mais fácil de avaliar se uma matriz tem "posto cheio"(1) é calcular seu determinante, que deve ser diferente de zero.

Resumo

Considere um sistema $Ax = b$ com M equações e N variáveis:

a) Se M < N:
   i) $Ax = 0$ tem infinitas soluções
   ii) $\forall b$, $Ax = b$ tem infinitas soluções ou não tem solução
   iii) Se posto(A) = M, $Ax = b$ tem infinitas soluções$\forall b$.

b) Se N > M:
   i) $Ax = 0$ tem uma ou infinitas soluções
   ii) $\forall b$, $Ax = b$ tem 0, 1 ou∞soluções
   iii) Se posto(A) = N, $Ax = b$ tem 0 ou 1 solução$\forall b$.

c) Se M = N:
   i) $Ax = 0$ tem uma ou infinitas soluções
   ii) $\forall b$, $Ax = b$ tem 0, 1 ou∞soluções
   iii) Se posto(A) = M = N, $Ax = b$ tem exatamente uma solução$\forall b$.

Álgebra Matricial

Uma matriz é uma coleção organizada de números em k linhas e n colunas.
Cada número é uma entrada e é representado por a_{ij}: entrada na linha i ($i = 1, \ldots, k$), coluna j ($j = 1, \ldots, n$) .

Quando k e n são compatíveis, é possível definir operações algébricas usuais.

Adição: $A_{(k\,x\,n)} + B_{(k\,x\,n)}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}$$

Pode-se definir o elemento neutro na adição matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} + \underset{0_{(k\,x\,n)}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Subtração: Basta definir$-B$ como a matriz que, quando adicionada a B gera a matriz de zeros:

$$-\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} & \cdots & -b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{k1} & \cdots & -b_{kn} \end{pmatrix}$$

Defina então $A - B$ como $A + (-B)$ e use a operação de adição:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}-b_{k1} & \cdots & a_{kn}-b_{kn} \end{pmatrix}$$

Multiplicação por Escalar ($r \in \mathbb{R}$):

$$r * \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{k1} & \cdots & ra_{kn} \end{pmatrix}$$

Multiplicação Matricial:

O produto de duas matrizes A e B, denominado AB, está definido se e somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Podemos então multiplicar uma matriz $A_{(k\,x\,m)}$ por uma matriz $B_{(m\,x\,n)}$, formando uma matriz $AB_{(k\,x\,n)}$: número de linhas de A e número de colunas de B.

(Note que, se $n \neq k$, o produto BA não está sequer definido. Mesmo se $m = n$, em geral, $AB \neq BA$).

O elemento (i, j) da matriz AB é definido como:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{h=1}^{m} a_{ih}b_{hj}$$

Exemplo:

$$\underset{3x2}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}} \underset{2x2}{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \\ eA+fC & eB+fD \end{pmatrix}}$$

Considere a Matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{ij} = 1 \ \forall i = j \\ a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \end{matrix}$

$$(nxn)$$

Para toda matriz $A_{m\,x\,n}$, $AI = A$
Para toda matriz $B_{n\,x\,m}$, $IB = B$

Essa matriz é denominada Matriz Identidade.

Leis da Álgebra Matricial

Leis associativas: $(A+B)+C = A+(B+C)$
$$(AB)C = A(BC)$$

Lei comutativa para adição: $A+B = B+A$

Leis distributivas: $A(B+C) = AB+AC$
$$(A+B)C = AC+BC$$

Como já dito, a Lei Comutativa para multiplicação não se verifica na Álgebra Matricial.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Transposta

A transposta de uma matriz $(k\,x\,n)$ é uma matriz $(n\,x\,k)$ em que trocamos as linhas pelas colunas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \end{pmatrix}$$

Dessa forma, $(a_{j\,x\,i})^T = a_{i\,x\,j}$

Regras:

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(A-B)^T = A^T - B^T$
$(A^T)^T = A$
$(rA)^T = rA^T$
$(AB)^T = B^T A^T$

Sistemas de Equações em Forma Matricial

Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A matriz de coeficientes é:

$$A = \underset{(mxn)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

Considere ainda as matrizes:

$$x = \underset{(nx1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}};\ b = \underset{(mx1)}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

Podemos então escrever:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(mxn) \qquad (nx1) \qquad (mx1)$$

$$Ax = b$$

Temos então uma analogia de um sistema com uma equação com uma única variável:$Ax = b$

Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada: $k = n$: mesmo número de linhas e colunas

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Coluna: $n = 1$: apenas uma coluna

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matriz Linha: $k = 1$: apenas uma linha

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

Matriz Diagonal: $k = n$ e $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$: todos os elementos fora da diagonal principal são zero.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Superior: $a_{ij} = 0 \forall i > j$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz Triangular Inferior: $a_{ij} = 0 \forall i < j$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz Simétrica: $A = A^T$, $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Idempotente: Matriz quadrada tal que $BB = B$

$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz de Permutação: Matriz quadrada em que cada linha e cada coluna possuem exatamente um elemento$\neq 0$, e esse elemento é igual a 1.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizes Elementares

São matrizes que, ao pré-multiplicar uma matriz A, reproduzem alguma das operações elementares com linhas:

1 - Troca de linhas;
2 - Adicionar o múltiplo de uma linha à outra linha;
3 - Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero.

Exemplo: Matriz de permutação E_{ij}, que troca as linhas i e j da matriz identidade.
O produto $E_{ij}A$ apenas troca as linhas de A.

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

Exemplo: para multiplicar uma linha de uma matriz por $r \neq 0$, basta definir $I_i(r)$ como uma matriz identidade em que a i-ésima linha é multiplicada por r, e multiplicar essa matriz pela matriz que deseja-se multiplicar a i-ésima linha correspondente.

$$I_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

Logo, é possível obter a forma escalonada reduzida de uma matriz A ao pré-multiplicá-la por matrizes elementares: $Ax = b \rightarrow EAx = Eb$

Exemplo: para adicionar r vezes a linha i à linha j, substitua o zero da matriz identidade na posição (ji) por r:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix}$$

Álgebra de Matrizes Quadradas

Considere o conjunto de todas as matrizes quadradas. As operações algébricas estão bem-definidas nesse conjunto (mas, em geral, $AB \neq BA$). A matriz identidade é tal que $AI = IA = A$.

Define-se a matriz inversa A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. A matriz inversa, se existir, é única.

Uma matriz quadrada é dita não-singular se o posto é igual ao número de linhas.

Seja A uma matriz (kxn). A matriz $B_{(nxk)}$ é inversa à direita de A se $AB = I_{(kxk)}$.
A matriz $C_{(nxk)}$é inversa à esquerda se $CA = I_{(nxn)}$.

Se uma matriz A possui inversa à direita e à esquerda, então $B = C$; definimos $A^{-1} = B = C$ como inversa de A.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
Inversa à direita de A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
Inversa à esquerda

<u>Teorema</u>: *uma matriz quadrada* (mxm) *é inversível se e só se for não-singular.*
Inversível $\leftrightarrow$ Não-singular

Nesse caso: $Ax = b \rightarrow x = A^{-1}b$: solução do sistema linear.

Como encontrar A^{-1} ? Há várias formas. Um método é transformar a matriz $[A \,|\, I]$ em $[I \,|\, Z]$ através das operações elementares: prova-se então que $Z = A^{-1}$

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$[A \,|\, I] = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$

$(1) \rightarrow (1)\,/2$
$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$(1) \rightarrow (1) - (2)$
$\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$

$(1) \leftrightarrow (2)$
$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$

E portanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Verificação:
$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Seja A uma matriz $2x2$ qualquer: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Então A é não-singular se e só se $ad - bc \neq 0$; nesse caso,
$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $ad - bc = 2 * 0 - 2 * 1 = -2 \neq 0$
$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Teorema: para uma matriz quadrada A, as afirmações abaixo são equivalentes:
$(a) A$ é invertível
$(b) A$ possui inversa à direita
$(c) A$ possui inversa à esquerda
$(d) A$ é não-singular
$(e) A$ possui posto cheio, i.e, posto(A)=M.
$(f) Ax = b$ possui ao menos uma solução$\forall b$.
$(g) Ax = b$ possui no máximo uma solução$\forall b$.

Podemos definir para uma matriz quadrada:
$A^m = A * A * \ldots * A$
m vezes

Se A é invertível:
$A^{-m} = (A^{-1})^m = A^{-1} * A^{-1} * \ldots * A^{-1}$
m vezes

Teorema: se A é invertível, então:

(a) A^m é invertível $\forall m \epsilon \mathbb{Z}$e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$
(b) $\forall r, s \epsilon \mathbb{Z}$, $A^r A^s = A^{r+s}$
(c) $\forall r \neq 0$, (rA) é invertível e $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$

Toda matriz A pode ser escrita como:
$A = F_1 * \ldots * F_m * U$

F_i elementar $\forall i = 1, \ldots, m$
U em forma escalonada reduzida.

Se A é não-singular, então $\mu = I$ e $A = F_1 * \ldots * F_m$

Determinantes (SB.9)

As matrizes mais importantes são quadradas: representam os coeficientes de sistemas com o mesmo número de equações e variáveis. Queremos saber em que condições uma matriz quadrada é não-singular. Para tanto, usamos o determinante de uma matriz.

Definição indutiva: define-se o determinante de uma matriz (a) (i.e, um escalar) como a; usamos essa definição para construir o determinante da 2x2; usamos essa para a 3x3; etc.

Matriz (a) : escalar a : a inversa é simplesmente $\frac{1}{a}$, que está definida se e somente se $a \neq 0$. Definimos então det(a)= a.

Matriz 2x2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

A inversa existe se e só se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; definimos então o determinante:
det$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}det(a_{22}) - a_{12}det(a_{21})$
Considere o termo $a_{11}det(submatriz)$: a entrada a_{11} é multiplicada pelo determinante da submatriz formada ao se eliminar a linha 1 e coluna 1 da matriz original.

Seja A_{mxn}. Defina A_{ij}como a matriz obtida ao eliminar a linha i e a coluna j de A.
Defina $M_{ij} = det(A_{ij})$ como o *menor(i,j)* de A.
Defina $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ como o *cofator(i,j)* de A.

Cofator é um menor com ajuste de sinal:
$C_{ij} = M_{ij}$ se $(i + j)$ for par;
$C_{ij} = -M_{ij}$ se $(i + j)$ for ímpar.

Podemos então escrever:
det$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$

Defina analogamente o determinante de uma matriz 3x3:

det$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$
$= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

Caso geral: Matriz $A_{(mxn)}$:
det$A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1m}C_{1m} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{1+m}a_{1m}C_{1m}$
(Na verdade, podemos escolher qualquer linha, não apenas a primeira)

Teorema: para matrizes triangulares (superiores ou inferiores) ou diagonais, o determinante é o produto dos termos da diagonal principal.

Exemplo:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 2 \end{pmatrix} = 1 * 2 = 2$

Teorema: (impacto de operações elementares com linhas)
(i) o determinante não muda ao adicionar o múltiplo de uma linha a outra linha da matriz;
(ii) o sinal do determinante é invertido quando é feita uma troca de linhas;
(iii) quando se multiplica uma linha por um escalar, o determinante é multiplicado pelo mesmo escalar.

Corolário: $\det A = \det R$ se R for uma forma escalonada de A *obtida apenas adicionando-se múltiplos de uma linha às outras.*

Deve-se fazer os ajustes necessários de acordo com os itens (ii) e (iii) do teorema anterior se essas operações forem realizadas no escalonamento.

Exemplo: $detA = -detR$ se for feita exatamente uma troca de linhas no escalonamento.

É mais fácil computar o determinante da forma escalonada, que é triangular superior.

Teorema: *uma matriz quadrada é não-singular se e somente se o determinante for diferente de zero.*

Uso do determinante

Matriz Adjunta: Adj(A): entrada (i,j) é o cofator $C_{j,i}$ de A.

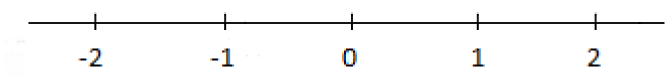
Teorema: Seja uma matriz A com $det(A) \neq 0$.

(a) $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$
(b) Regra de Cramer: se $Ax = b$, computa-se$x = A^{-1}b$ como:
$x_i = \frac{detB_i}{detA}$; $i = 1, \ldots, m$. B_i: matriz A trocando a coluna i por b.

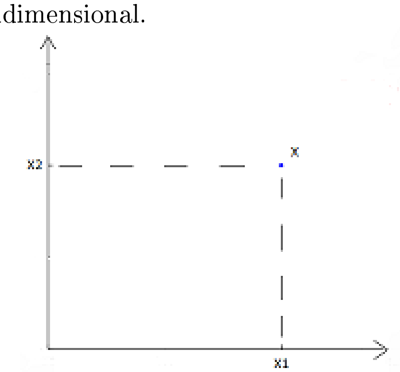
Teorema: Seja uma matriz $A_{(mxn)}$:
(1) $det(A^T) = det(A)$
(2) $det(AB) = det(A)det(B)$
Em geral, $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$.
Na prática, use eliminação Gaussiana, não regra de Cramer.

Espaços Euclidianos (SB. 10)

Conjunto de números reais: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^1$: representado por uma reta, o espaço euclidiano unidimensional.

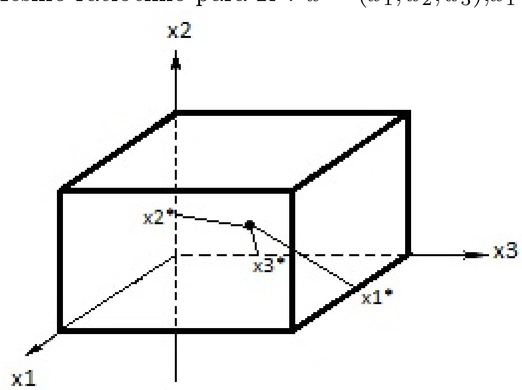


Conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2$: representado pelo plano cartesiano: o espaço euclidiano bidimensional.



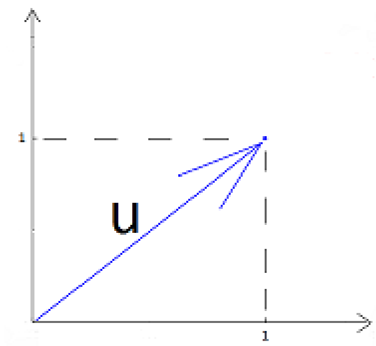
$x = (x_1, x_2)$,$x_1 \in \mathbb{R}$,$x_2 \in \mathbb{R}$

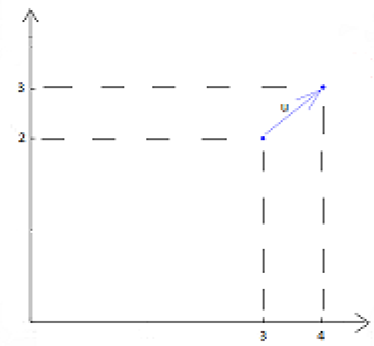
Mesmo raciocínio para $\mathbb{R}^3$: $x = (x_1, x_2, x_3)$,$x_1 \in \mathbb{R}$,$x_2 \in \mathbb{R}$,$x_3 \in \mathbb{R}$: espaço euclidiano tridimensional.



$\mathbb{R}^n$: espaço euclidiano n-dimensional, formado por n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R} \forall i$.
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$.

Um vetor pode ser um ponto específico (a partir da origem) ou um deslocamento (a partir de um ponto qualquer).





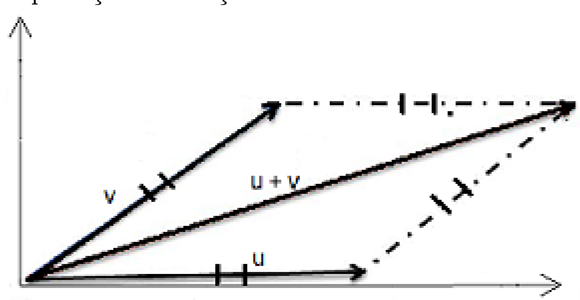
Dois vetores são iguais se têm o mesmo tamanho e a mesma direção, ainda que origens distintas.

Se u começa no ponto $a = (a_1, \ldots, a_m)$ e termina no ponto $b = (b_1, \ldots, b_m)$, então
$u = (b_1 - a_1, \ldots, b_m - a_m)$
Exemplos:
$(1 - 0, 1 - 0) = (1, 1) = u$
$(4 - 3, 3 - 2) = (1, 1) = u$

Álgebra de Vetores: igual à algebra matricial, bastando interpretar um vetor como uma matriz $(mx1)$.

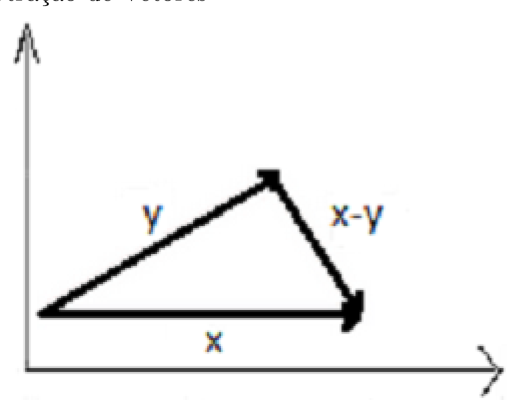
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Interpretação da Adição de Vetores



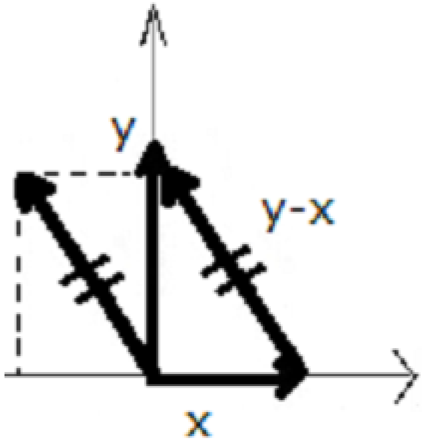
$u = (u_1, u_2)$
$v = (v_1, v_2)$
$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Subtração de Vetores



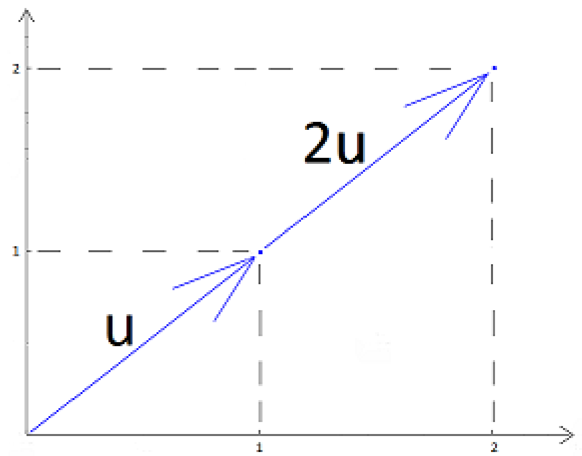
$x = (x_1, x_2)$
$y = (y_1, y_2)$
$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$

Exemplo:



$y = (0, 1)$
$x = (1, 0)$
$y - x = (-1, 1)$

Interpretação da Multiplicação por Escalar



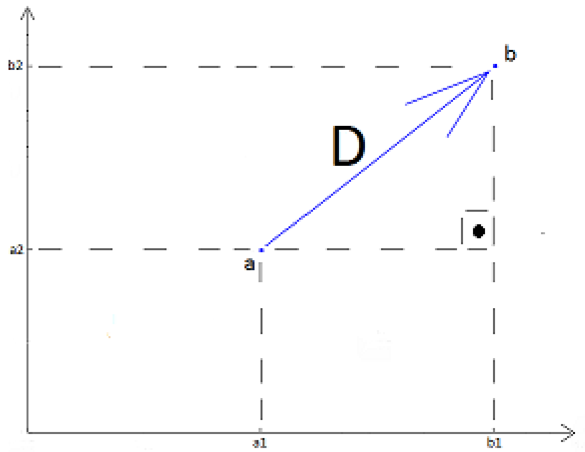
Um Espaço Vetorial é um conjunto sobre o qual se define as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar vistas acima, e é fechado para essas operações (e portanto deve respeitar uma série de propriedades, como se verá).

DISTÂNCIA, NORMA e PRODUTO INTERNO

Distância entre dois números (vetores em $\mathbb{R}^1$): módulo $|x - y|$.

$x = 4$, $y = 1 \rightarrow |x - y| = |4 - 1| = 3$
$x = 3$, $y = 7 \rightarrow |x - y| = |3 - 7| = |-4| = 4$
$x = -3$, $y = -8 \rightarrow |x - y| = |-3 + 8| = 5$

Distância entre dois vetores em $\mathbb{R}^2$:
$a = (a_1, a_2)$
$b = (b_1, b_2)$



$||b-a|| = D = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

A distância em $\mathbb{R}^n$é definida de maneira análoga:
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$||b-a|| = D = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2} = \sqrt{\sum_i \ (b_i-a_i)^2}$$

Em $\mathbb{R}^1$: $|b-a| = \sqrt{(b-a)^2}$

Definimos a norma de um vetor a como a distância desse vetor até a origem (a origem um vetor $b_i = 0, \forall i$).

$||a|| = ||a-0|| = \sqrt{(a_1-0)^2+\ldots+(a_n-0)^2} = \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}$

Teorema: $||r.v|| = |r|.||v||, \forall r \epsilon \mathbb{R}^1, v \epsilon \mathbb{R}^n$.

$rv = r(v_1, \ldots, v_n) = (rv_1, \ldots, rv_n)$
$||r.v|| = \sqrt{(rv_1)^2+\cdots+(rv_n)^2} = \sqrt{r^2v_1^2+\cdots+r^2v_n^2} = \sqrt{r^2(v_1^2+\cdots+v_n^2)}$
$= \underbrace{\sqrt{r^2}}_{|r|}.\underbrace{\sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}}_{||v||}$

Defina o vetor unitário w associado a um vetor v como $w = \frac{v}{||v||}$: mesma direção, mas norma 1. Para verificar que w tem norma 1, basta calcular diretamente:
$||w|| = ||\frac{v}{||v||}|| = ||\frac{1}{||v||}.v|| = |\frac{1}{||v||}|.||v|| = \frac{1}{||v||}.||v|| = 1$

Produto Interno

Considere os vetores:

$u = (u_1, \ldots, u_n); u \epsilon \mathbb{R}^n$
$v = (v_1, \ldots, v_n); v \epsilon \mathbb{R}^n$

Produto interno: $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n; u \cdot v \in \mathbb{R}$

Exemplo:
$u = (4, -1, 2)$
$v = (6, 3, -4)$
$u \cdot v = 4.6 - 1.3 - 2.4 = 24 - 3 - 8 = 13$

Exemplo:
$u = (1, 1)$
$v = (-2, 2)$
$u \cdot v = 1.(-2) + 1.2 = -2 + 2 = 0$

Propriedades:
$(i) u \cdot v = v \cdot u$
$(ii) u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$
$(iii) u(r \cdot v) = r(u \cdot v) = (r \cdot u)v$

$(iv) u \cdot u \geqq 0$
$(v) u \cdot u = 0 \to u = (0, \ldots, 0)$: origem
$(vi) (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v$

Relação entre norma e produto interno

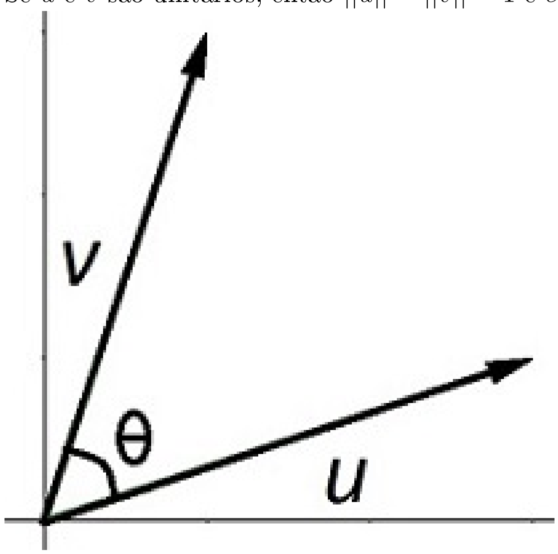
$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$
$u \cdot u = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n = u_1^2 + \cdots + u_n^2$

Mas $||u|| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$
Logo, $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$, ou $||u||^2 = u \cdot u$

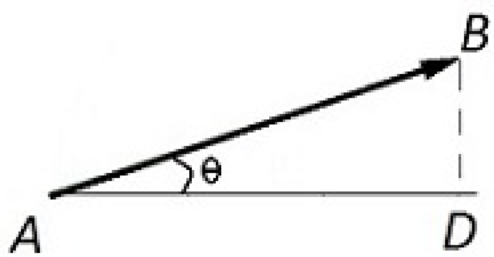
A distância também pode ser escrita em função do produto interno:
$||(u - v)|| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}$

Dois vetores determinam o ângulo θ entre eles, e o produto interno está relacionado com esse ângulo.

Teorema: $cos\theta = \frac{u}{||u||} \cdot \frac{v}{||v||}$
Se u e v são unitários, então $||u|| = ||v|| = 1$ e $cos\theta = u \cdot v$.



$cos\theta = \frac{||AD||}{||AB||}$, se $||\theta|| < 90$

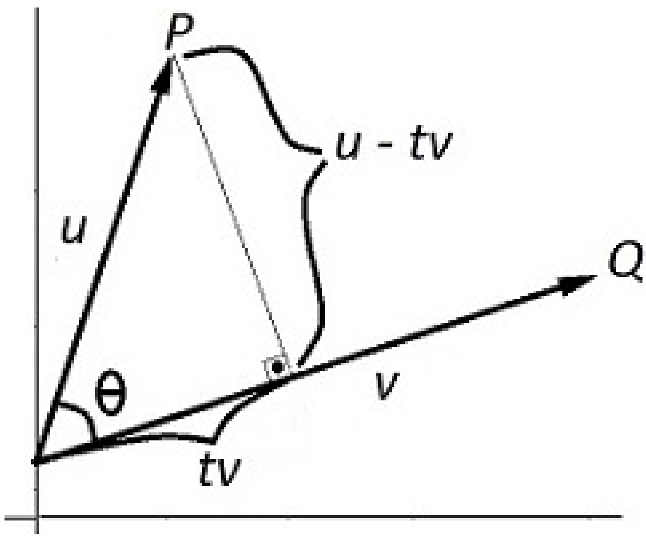


$cos\theta = -\frac{||AD||}{||AB||}$, se $\theta \epsilon$ (90,270)

$cateto \leq hipotenusa \Rightarrow cos\theta \in [-1, 1] \Rightarrow |cos\theta| \leq 1$

Prova do teorema acima:

Considere vetores u e v quaisquer e escolha um escalar t tal que $u - tv$ e v sejam ortogonais.



Pela definição, $cos\theta = \frac{||tv||}{|u|} = \frac{t.||v||}{||u||}$, $t > 0$

Pitágoras:
$||u||^2 = ||tv||^2 + ||u - tv||^2 = t^2 \cdot ||v||^2 + (u - tv) \cdot (u - tv)$
$= t^2 \cdot ||v||^2 + u \cdot u - 2u \cdot (tv) + (tv) \cdot (tv)$
$||u||^2 = t^2||v||^2 + ||u||^2 - 2u \cdot (tv) + ||tv||^2$
$2u \cdot (tv) = t^2||v||^2 + t^2||v||^2 = 2t^2||v||^2$
$t(u \cdot v) = t^2 \cdot ||v||^2$
$u \cdot v = t \cdot ||v||^2$

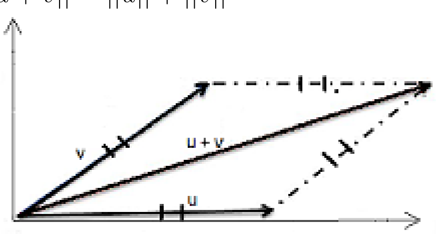
Então:
$cos\theta = \frac{t||v||}{||u||} = \frac{u \cdot v}{||v||^2} \frac{||v||}{||u||}$
$cos\theta = \frac{u}{||u||} \cdot \frac{v}{||v||}$
Logo, $cos\theta = 0 \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

Ou seja: dois vetores u e v são perpendiculares ($cos\theta = 0$, i.e, ângulo reto) se e somente se o produto interno é $u \cdot v = 0$.

Dessa forma: $u_1u_1 + \cdots + u_nu_n = 0$, e os vetores são ortogonais.

Exemplo: $(1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Uma implicação desse teorema é a desigualdade triangular:
$||u + v|| = ||u|| + ||v||$



A menor distância entre dois pontos é a reta.

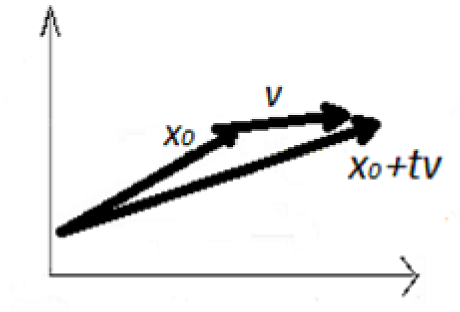
Corolário: $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$

Representações paramétricas

Representação tradicional de uma reta: $x_2 = ax_1 + b$: a é a inclinação,b é o intercepto vertical.

Alternativa: representação paramétrica: $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$: um ponto (x_1^*, x_2^*) pertence à reta se e somente se $\exists t/(x_1^*, x_2^*) = (x_1(t), x_2(t))$

Uma linha é inteiramente descrita por um ponto $x_0 \epsilon \mathbb{R}^2$ e uma direção $v \epsilon \mathbb{R}^2$.



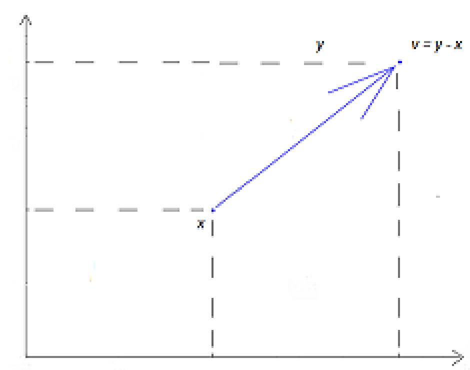
$x(t) = x_0 + tv$ →representação paramétrica

Exemplo:
$x_0 = (4, 2)$
$v = (1, 1)$

$x(t) = x_0 + tv = (4, 2) + t(1, 1) = (4, 2) + (t, t) = (4 + t, 2 + t)$

$$\begin{cases} x_1(t) = 4 + t \\ x_2(t) = 2 + t \end{cases}$$

Podemos determinar $x(t)$ a partir de dois pontos x e y:
$x(t) = x + t(y - x)$: ponto x, direção $v = y - x$



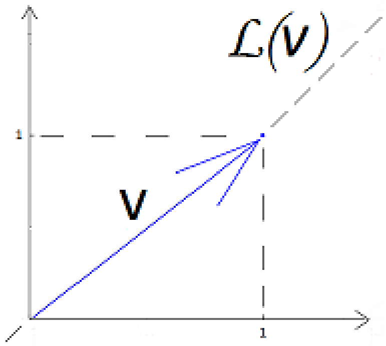
Podemos então passar da versão paramétrica para a versão não-paramétrica e vice-versa.

Vale raciocínio análogo para $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, $x_0 = (2, 1, 3)$, $v = (4, -2, 5)$.
$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$
$x_0 + tv = (2, 1, 3) + t(4, -2, 5) = (2 + 4t, 1 - 2t, 3 + 5t)$

Para representar um plano, precisamos de dois vetores direcionais v e w e, portanto, de dois parâmetros s e t (um para cada vetor direcional). Os dois vetores devem ter direções distintas; ou seja, um não pode ser múltiplo do outro. Um plano que passa por um ponto p qualquer é:
$x = p + sv + tw$.

INDEPENDÊNCIA LINEAR (SB.11)

Uma linha reta que passa pela origem é o conjunto de todos os múltiplos de um vetor v dado. Denote esse conjunto como$\mathcal{L}(v) = \{rv \,/\, r \in \mathbb{R}\}$: linha gerada pelo vetor v. Esse é o conjunto de todos os vetores da forma rv tal que v é um vetor fixo e r é um escalar que varia, assumindo todos os valores em $\mathbb{R}$.



Exemplos:

Se $v = (1, 0)$, $\mathcal{L}(v)$ é o eixo horizontal em $\mathbb{R}^2$: qualquer ponto $(x_1, 0)$ do eixo horizontal é múltiplo de $(1, 0)$, e portanto pode ser escrito como $r\,(1, 0) = (r, 0)$ para algum $r \in \mathbb{R}$: basta definir $r = x_1$. E nenhum ponto fora do eixo horizontal pode ser escrito como múltiplo de $(1, 0)$ porque a segunda coordenada precisa ser diferente de zero.

Se $v = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathcal{L}(v)$ é o eixo x_1 em $\mathbb{R}^n$.

Se $v = (1, 1)$, $\mathcal{L}(v)$ é a reta de 45^0 em $\mathbb{R}^2$.

É possível generalizar essa definição para conjuntos $\mathcal{L}(v_1, v_2, ..., v_k)$ construídos a partir de vários vetores , ao invés apenas um vetor. Para tanto, é necessário generalizar o conceito de "múltiplo de um vetor", o que leva ao conceito de combinação linear.

Definição: o vetor w é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ se existem escalares $r_1, r_2, ..., r_k$ tal que $w = r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_kv_k$.

Exemplos:

1) $(2, 3)$ é combinação linear de $(1, 1)$ e $(0, 1)$: $(2, 3) = 2 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (0, 1)$

2) $(2, 3, 4)$ é combinação linear de $(8, 8, 8)$, $(0, 1, 6)$ e $(0, 0, 2)$: $(2, 3, 4) = \frac{1}{4} \cdot (8, 8, 8) + 1 \cdot (0, 1, 6) - 2 \cdot (0, 0, 2)$

3) Qualquer vetor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é combinação linear dos vetores e_1, e_2,...,e_n, em que e_i é um vetor tal que a i-ésima coordenada é igual a 1 e as demais coordenadas são iguais a zero. Basta escrever $(x_1, ...x_n) = x_1 {\cdot} e_1 {+} ... {+} x_n {\cdot} e_n$

4) $(5, 0)$ é combinação linear do vetor $(1, 0)$: $(5, 0) = 5 \cdot (1, 0)$

O último exemplo ilustra que o múltiplo de um vetor (rv) é simplesmente uma combinação linear de um único vetor.

Considere agora dois vetores $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_2 \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as combinações lineares de v_1 e v_2 é:
$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{r_1v_1 + r_2v_2;\, r_1 \in \mathbb{R},\, r_2 \in \mathbb{R}\}$

Suponha que v_1 seja múltiplo de v_2: ou seja, $\exists r_2 \in \mathbb{R}/v_1 = r_2v_2$. Então $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}(v_2)$ e $v_1 - r_2v_2 = 0$ (eq. 1).

Note ainda que se v_1 é múltiplo de v_2, então necessariamente v_2 é múltiplo de v_1: $v_1 = r_2v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{r_2}\right)v_1$, e podemos escolher $r_1 = \left(\frac{1}{r_2}\right)$ para escrever $v_2 = r_1v_1$, ou $v_2 - r_1v_1 = 0$ (eq. 2).

Podemos passar da equação 1 para a equação 2 e vice-versa. Mais do que isso, podemos multiplicar qualquer uma dessas equações por qualquer escalar diferente de zero, sem alterar a relação que existe entre os vetores v_1 e v_2 (ou seja, um é múltiplo do outro). Ao fazer isso, apenas escolhemos coeficientes diferentes para v_1 e v_2: é uma outra representação da mesma relação. Por exemplo, ao multiplicar a equação 1 por 2, obtemos $2v_1 - 2r_2v_2 = 0$. Ao multiplicar a equação 2 por -5, obtemos $-5v_2 + 5r_1v_1 = 0$. Essas equações representam a mesma relação básica entre os vetores v_1 e v_2.

De forma geral, podemos representar essa relação por constantes $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ tal que $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$. Sempre que é possível encontrar constantes $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ tal que $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, concluímos que v_1 é múltiplo de v_2, pois $v_1 = -\frac{c_2}{c_1}v_2$ (ou, analogamente, v_2 é múltiplo de v_1). Dizemos então que os vetores v_1 e v_2 são linearmente dependentes, pois um pode ser escrito como múltiplo do outro. Ou seja, um é combinação linear do outro.

Podemos generalizar essa representação para mais que dois vetores. Se existem constantes $(c_1, c_2, ..., c_k) \neq (0, 0, ..., 0)$ tal que $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = 0$, então cada vetor pode ser escrito como combinação linear dos demais: por exemplo, $v_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}v_2 + ... + \frac{c_k}{c_1}v_k\right)$. Dizemos então que os vetores $v_1, ..., v_k$ são linearmente dependentes.

Definimos então vetores linearmente independentes por exclusão. Ou seja: os vetores $v_1, ..., v_k$ são linearmente independentes quando não existem constantes $(c_1, ..., c_k) \neq (0, ..., 0)$ tal que $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = 0$. Isso pode ser reescrito da seguinte forma: se $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = 0$, então $(c_1, ..., c_k) = (0, ..., 0)$.

Resumindo:
v_1,...,v_k são L.D. se e só se $\exists(c_1, ..., c_k) \neq (0, ..., 0)/c_1v_1 + ... + c_kv_k = 0$
v_1,...,v_k são L.I se e só se $c_1v_1 + ... + c_kv_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Exemplo 1: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: são L.I:

$$c_1e_1 + c_2e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1.1 + c_2.0 = 0 \\ c_1.0 + c_2.1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{L.I}$$

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ são L.D

$$\begin{cases} c_1.1 + c_2.2 = 0 \\ c_1.2 + c_2.4 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -2c_2. \text{ Uma possibilidade: } \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3: $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

w_1, w_2, w_3 são L.I ou L.D ?

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1c_1 \\ 2c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4c_2 \\ 5c_2 \\ 6c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7c_3 \\ 8c_3 \\ 9c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1c_1 + 4c_2 + 7c_3 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 + 8c_3 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 + 9c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esse é um Sistema Linear (S.L) homogêneo nas variáveis c_1, c_2 e c_3, e portanto admite *necessariamente* ao menos uma solução: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, chamada solução trivial. Se essa for a *única* solução, os vetores são L.I. Se houver outras soluções (ou seja, infinitas soluções, diferentes da trivial), então os vetores são LD.

Como já visto, há algumas formas para determinar se um sistema possui uma ou infinitas soluções. Uma forma é calcular o posto da matriz de coeficientes.

Forma escalonada de A: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: posto $2 < 3 = \#$ linhas.

A matriz tem posto menor que o número de linhas; logo, não pode ter solução única. Há então infinitas soluções, e portanto há infinitas soluções diferentes de $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Logo, os vetores são L.D.

De forma geral: os vetores $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n \in \mathbb{R}^n$ são L.I se e somente se o seguinte sistema linear homogêneo admitir apenas a solução trivial $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$.

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos definir uma matriz $A \doteq \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$ e reescrever o sistema acima como $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $n = k$ (matriz quadrada), então os vetores são L.I se e somente se $det(A) \neq 0$.

Se $k > n$ (mais colunas do que, então os k vetores são L.D: por exemplo, três vetores ($k = 3$) em $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$) são necessariamente L.D. O sistema linear tem mais variáveis do que equações, e portanto tem necessariamente variáveis livres.

Se $k < n$, os vetores podem ser LI ou LD. Só serão LI se posto $=$ número de colunas $= \#$ vetores $= k$ (posto máximo que a matriz A pode ter, uma vez que $k < n$).

Notação:

k é o número de vetores (ou seja, o número de colunas da matriz A).

n é o número de coordenadas em cada vetor (ou seja, o número de linhas da matriz A).

Conjunto Gerador

Seja v_1,v_2,..., v_k um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ (i.e, $v_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$).

Como visto, o conjunto de todas as combinações lineares de v_1,v_2,..., v_k é $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) = [c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \ : \ c_1, \ldots, c_k$
Esse é o conjunto *gerado* por v_1,v_2,..., v_k.

Seja um conjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Questão: existe um conjunto de vetores v_1,v_2,..., $v_k$$\in \mathbb{R}^n$ tal que cada vetor em V possa ser escrito como uma combinação linear de v_1,v_2,..., v_k ? Ou seja, existem constantes $c_1, c_2, ..., c_k$ tal que$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$ para todo vetor w em V?

Nesse caso, $V = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$: os vetores v_1,v_2,..., v_k *geram* V.

Exemplo: qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser gerado pelos vetores
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:
$(x_1, x_2) = x_1 . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$ é gerado por e_1 e e_2.

Exemplo: qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser gerado pelos vetores
$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_2}{2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ geram $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geram $\mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ é gerado por e_1, e_2,...,e_n ou múltiplos de e_1, e_2,...,e_n. Mais geralmente, $\mathbb{R}^n$ é gerado por n vetores L.I em $\mathbb{R}^n$.

Teorema: seja v_1,v_2,..., $v_k \in \mathbb{R}^n$ um conjunto de k vetores em $\mathbb{R}^n$ que forme a matriz $A_{(nxk)}$:
$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$
O sistema linear $Ac = b$ tem solução única c^* se e somente se $b \ \epsilon \ \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$.
Ou seja: um conjunto de vetores v_1,v_2,..., v_k ϵ $\mathbb{R}^n$ gera $\mathbb{R}^n$ se e somente se o sistema $Ax = b$ possuir solução $\forall b$ $\in \mathbb{R}^n$.

Corolário: um conjunto de vetores que gera $\mathbb{R}^n$ deve conter, no mínimo, n vetores.

Base e Dimensão em $\mathbb{R}^n$

Considere três vetores v_1, v_2, v_3 tal que $v_3 = v_1 + v_2$. Então: $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$

Se um vetor $w \in \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, então por definição w é uma combinação linear de v_1, v_2, v_3: $w = av_1 + bv_2 + cv_3$.
Mas $v_3 = v_1 + v_2$. Logo:
$w = av_1 + bv_2 + c(v_1 + v_2)$
$w = (a + c)v_1 + (b + c)v_2$

Assim, w é uma combinação linear de v_1 e v_2 apenas: $w \epsilon \mathcal{L}(v_1, v_2)$.

De forma geral, se v_3 é uma combinação linear de v_1 e v_2, então:
$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$

Portanto:
$w = av_1 + bv_2 + cv_3$
$w = av_1 + bv_2 + c(\alpha v_1 + \beta v_2)$
$w = (a + \alpha c)v_1 + (b + \beta c)v_2$

Dessa forma: v_3 é dispensável para a apresentação de w.

O objetivo aqui é definir o *menor conjunto de vetores que gera um espaço V*. Ou seja: esse conjunto não deve conter vetores que sejam combinações lineares uns dos outros. Ou seja: não deve conter vetores L.D. Ou seja: deve conter apenas vetores L.I. Define-se então uma base para um espaço V.

Definição: o conjunto de vetores $v_1, \ldots, v_k$ é uma *base* do espaço V se:
(i) $v_1, \ldots, v_k$ geram V : todo $w \in V$ é uma combinação linear de $v_1, ..., v_k$.
(ii) $v_1, \ldots, v_k$ são L.I.

Exemplo: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
formam uma base de $\mathbb{R}^n$

Uma base de $\mathbb{R}^n$ deve necessariamente conter n vetores.

Considere os vetores $v_1, \ldots, v_n$ em $\mathbb{R}^n$. Forme a matriz $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$.
As afirmações a seguir são equivalentes:
$(i)v_1, \ldots, v_n$ são L.I
$(ii)v_1, \ldots, v_n$ geram $\mathbb{R}^n$
$(iii)v_1, \ldots, v_n$ são uma base de $\mathbb{R}^n$
$(iv)det(A) \neq 0$

A dimensão de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é o número de vetores numa base de V. Note que uma base nunca é única, mas todas as bases para um dado espaço têm o mesmo número de vetores.

Autovalores e Autovetores

Considere uma matriz quadrada A_{mxm}. Considere um escalar $r \in \mathbb{R}$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^m$ com a seguinte propriedade:

$A.v = r.v$

Então r é um autovalor e v é um autovetor da matriz A.

(Atenção: v é um vetor, e portanto não podemos 'cortar' v dos dois lados dessa equação: 'cortar' é uma operação de divisão, que na álgebra matricial corresponde a multiplicar por uma inversa, mas vetores não admitem inversa.)

Note que $v = (I.v)$: a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação matricial. Logo, $A.v = r.(I.v)$

Portanto,:

$A.v - r(I.v) = 0$
$(A - r.I)v = 0$

Se $v \neq 0$, então a matriz $(A - r.I)$ não pode admitir inversa ($A - rI$ deve ser portanto uma matriz *singular*). Caso contrário, poderíamos multiplicar os dois lados da equação acima pela inversa $(A-r.I)^{-1}$, levando ao seguinte resultado absurdo:

$0 \neq v = (A - r.I)^{-1} \cdot 0 = 0$

(A última igualdade ocorre porque qualquer matriz multiplicada por um vetor de zeros gera um vetor de zeros). Para que a matriz $A - rI$ não admita inversa, então necessariamente $det(A - r.I) = 0$. Para calcular esse determinante, construa explicitamente a matriz $A - rI$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$A - r.I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} - r. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - r.I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r \end{pmatrix}$$

$$A - r.I = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} - r \end{pmatrix}$$

Ou seja: o autovalor $r \in \mathbb{R}$ é um número que quando subtraído da diagonal principal de uma matriz, a transforma em uma matriz singular.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$r = 2 \rightarrow A - r.I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: singular : $r = 2$ é auto valor de A.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$r = 2 \rightarrow A - r.I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r = 3 \to A - r.I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Logo, $r = 2$ e $r = 3$ são autovalores de A.

Os elementos da diagonal principal de uma matriz diagonal são os próprios autovalores. Note que $r = 0$ sempre é autovalor de uma matriz singular.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ singular.
$r = 0 \to A - r.I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ singular

Para encontrar os autovalores de uma matriz qualquer, usamos o <u>polinômio característico</u> dessa matriz.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$A - r.I = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{pmatrix}$
$det(A - r.I) = 0$ é a condição para r ser autovalor:

$$(a_{11} - r)(a_{22} - r) - a_{12}a_{21} = 0$$
$$\underbrace{r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\text{polinômio característico.}} = 0$$

Uma equação de 2º grau tem até duas raízes distinas; logo, uma matriz 2x2 tem até dois autovalores distintos. Uma matriz $m\,x\,m$ tem até m autovalores distinos: as raízes do polinômio característico de ordem m.

Para encontrar o autovetor v^* associado ao autovalor r^*, basta resolver o S.L $(A - r^*I)v^* = 0$ para $v^* \neq 0$

Exemplos:
(i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
$det(A - r.I) = det \begin{pmatrix} -1 - r & 3 \\ 2 & -r \end{pmatrix} = r^2 + r - 6$: polinômio característico.
$r^2 + r - 6 = 0$: condição para r ser autovalor.
Raízes: $r_1 = -3$, $r_2 = 2$: autovalores (reais e distintos) de A.

Autovetor v_1 associado a r_1:
$(A - r_1 I) = \begin{pmatrix} -1 - (-3) & 3 \\ 2 & -(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1^1 + 3v_1^2 = 0 \Rightarrow v_1^2 = -\frac{2}{3}v_1^1$: todos os pares (v_1^1, v_1^2) que respeitem essa equação são um autovetor da matriz A associado ao autovalor -3.
Em particular, $v_1^1 = 1 \Rightarrow v_1^2 = -\frac{2}{3}$: $v_1 = (1, -\frac{2}{3})$ é um autovetor associado a $r_1 = -3$. Qualquer múltiplo de v_1 é um autovetor associado a r_1 (há sempre infinitos autovetores associados a um dado autovalor).

Autovetor v_2 associado a r_2:
$(A - r_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 - 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3v_2^1 + 3v_2^2 = 0 \Rightarrow v_2^2 = v_2^1$
Em particular, $v_2^1 = 1 \Rightarrow v_2^2 = 1$: $v_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado a $r_2 = 2$. Qualquer múltiplo de v_2 é um autovetor associado a r_2.

Conclusão: autevetor não é único.

(ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$det(B - r.I) = det \begin{pmatrix} 1 - r & 0 & 2 \\ 0 & 5 - r & 0 \\ 3 & 0 & 2 - r \end{pmatrix} = (1 - r)(5 - r)(2 - r) - 3.(5 - r).2$

$= -r^3 + 8r^2 - 11r - 20 = (5-r)(r-4)(r+1)$
Autovalores: $r_1 = 5$, $r_2 = 4$, $r_3 = -1$

Autovetor associado a $r_1 = 5$:
$$(B - r.I)v = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4v_1^1 + 2v_1^3 = 0 \\ 3v_1^1 - 3v_1^3 = 0 \end{cases}$$
Em qualquer solução, deve valer $v_1^1 = v_1^3 = 0$.
Logo, o autovetor é $(0, v_1^2, 0)$ para $\forall v_1^2$; em particular, $(0,1,0)$ é autovetor.

Defina o traço de uma matriz como a soma dos elementos da diagonal principal:
$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}$

Teorema: Seja $A_{(mxm)}$ com autovalores $r_1, \ldots, r_m$.
(i) $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm} = Tr(A)$
$(ii) r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_m = det(A)$

Espaço Vetorial (SB 27)

$\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial porque admite duas operações naturais: soma e multiplicação por escalar, que respeitam as propriedades básicas.

Seja V um espaço vetorial qualquer. Sejam u, v, w elementos desse espaço: $u, v, w \in V$. Sejam r e s escalares:$r, s, \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades devem valer para que V seja um E.V:

(i) $u + v \in V$: V é fechado para adição
$(ii) u + v = v + u$
$(iii) u + (v + w) = (u + v) + w$
(iv) Existe um elemento nulo 0 / $v + 0 = v$
(v) para todo v, existe um elemento $-v \in V$ / $v + (-v) = 0$
(vi)para todo escalar r, $r.v \in V$: V é fechado para multiplicação por escalar.
$(vii) r.(u + v) = r.u + r.v$
$(viii)(r + s)u = r.u + s.u$
$(ix) r.(s.u) = (r.s)u$
$(x) 1.u = u$

Um sub-espaço vetorial é um subconjunto $V_0 \subset V$ que também possui as mesmas propriedades acima.

Exemplo de sub-E.V: $V_0 = \{(x_1, x_2, 0),\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$
Já $V_1 = \{(x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço !

Na prática: se um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ for fechado para adição e para multiplicação por escalar, então V é um sub-E.V.
Ou seja: se $V \subset \mathbb{R}^n$ for tal que todas as combinações lineares $r.v + s.u \in V$, então V é sub-E.V.

Exemplos:

(1) $w = (1, 1, 1)$
$V_2 = \mathcal{L}(w) = \{r.(1, 1, 1),\, r \in \mathbb{R}\} = \{r.(1, 1, 1),\, r \in \mathbb{R}\}$ é sub-E.V de $\mathbb{R}^3$.

(2) Sejam $w_1, \ldots, w_k$ k vetores em $\mathbb{R}^n$.
$V_3 = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k) = \{r_1 w_1, \ldots, r_k w_k : r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}\}$:
conjunto de C.L's de $w_1, \ldots, w_k$ é sub-E.V.

(3) $V_0 = \{0\}$ é sub-E.V.

Se m vetores $u_1, \ldots, u_m$ formam base do sub-E.V V, então qualquer sub conjunto com mais de m vetores é L.D. Qualquer base de V tem o mesmo número m de vetores, e esse número é a dimensão do sub-espaço V.

Espaço-linha de uma matriz

Considere uma matriz $A_{(n\,x\,m)}$. Cada uma das m linhas de A pode ser vista como um vetor em $\mathbb{R}^m$.

Considere o espaço gerado por esses vetores (ou seja, pelas n as linhas de A): $Row(A) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$

$a_1, \ldots, a_n$ são as linhas de A. $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ é o conjunto de C.L's dessas linhas. Operações elementares com linhas mudam as linhas $a_1, \ldots, a_n$, mas não mudam o espaço gerado por elas!

Se $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ são linhas da matriz $\widetilde{A}$ gerada a partir de operações elementares sobre A, então: $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$. Em particular, isso vale para a forma escalonada de A.

Se os espaços gerados são os mesmos, então a dimensão deles é sempre a mesma. A dimensão não depende das operações elementares efetivadas sobre as linhas de A.

O posto de A é a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, e portanto é invariante a operações elementares com linhas.

Espaço Coluna

$A_{(n\,x\,m)}$: m vetores em $\mathbb{R}^n$: $a_1, \ldots, a_m$.
Espaço coluna de A: $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$

Definição: uma coluna é dita *básica* se a coluna correspondente na matriz escalonada tiver um pivô.

Resultado: as colunas básicas de A forma um subespaço para o espaço coluna de A.

Então:

$$
\begin{aligned}
Dim(E.L) &= \#linhas \neq 0 \text{ na forma escalonada}\\
&= \#\text{pivôs na forma escalonada}\\
&= Dim(E.C)
\end{aligned}
$$

Então: $Dim(E.C) = Dim(E.L) = posto$

Sabemos que $Ax = b$ possui solução se e somente se $b \in E.C(A)$:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}
$$

$\therefore x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m = b$

O lado esquerdo dessa equação é uma combinação linear das colunas da matriz A.

Logo, $Ax = b$ possui solução $\forall b \in \mathbb{R}^m$ se e somente se $E.C(A) = \mathbb{R}^n$; i.e, a dimensão de $E.C(A)$ é m.

Espaço Nulo

O conjunto V de todas as soluções do S.L $Ax = b$ é um espaço vetorial. É chamado espaço nulo de A: $N(A)$. Um *espaço afim* é um deslocamento paralelo de um E.V: ou seja, é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^m : x = c + v\ ,\ v\epsilon\ V\}$. Espaços-afins são soluções para sistemas não-homogêneos $Ax = b \neq 0$.

Teorema Fundamental da Álgebra Linear

Qual a relação entre $Dim(N(A))$ e $Posto(A)$?

$Posto(A) + Dim(N(A)) = \#colunas$ de A

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$: $Posto(A) = 2 = \#linhas \rightarrow Dim(N(A)) = 0$: $\exists!$ solução.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$: $Posto(A) = 1$, $\#linhas = 2 \rightarrow Dim(N(A)) = 1$: reta.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: $Posto(A) = 1$,$\#linhas = 3 \rightarrow Dim(N(A)) = 2$: plano.