Apostila de Métodos Quantitativos - UERJ
Professor: Pedro Hemsley

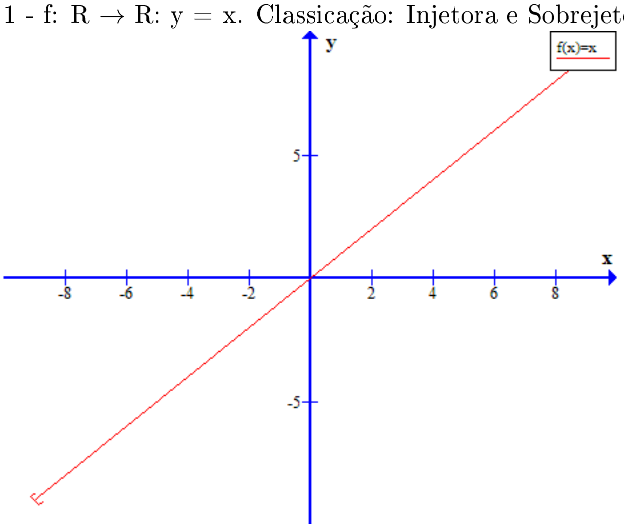
Funções:
f: X $\rightarrow$ Y : Associa a cada elemento do conjunto X um único elemento do conjunto Y.

Existem tres tipos específicos de funções: Sobrejetora, Injetora e Bijetora

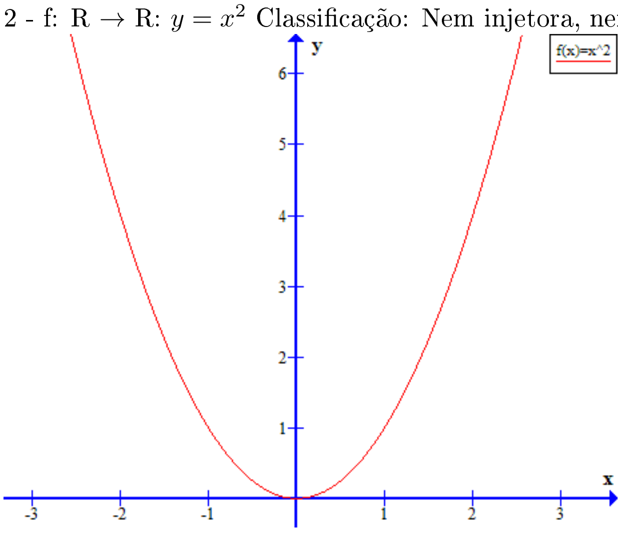
Sobrejetora: Associa todo elemento de Y a pelo menos um elemento de X.
Injetora: Associa a cada elemento de Y um único elemento de X.
Bijetora: sobrejetora e injetora.

Exemplos:

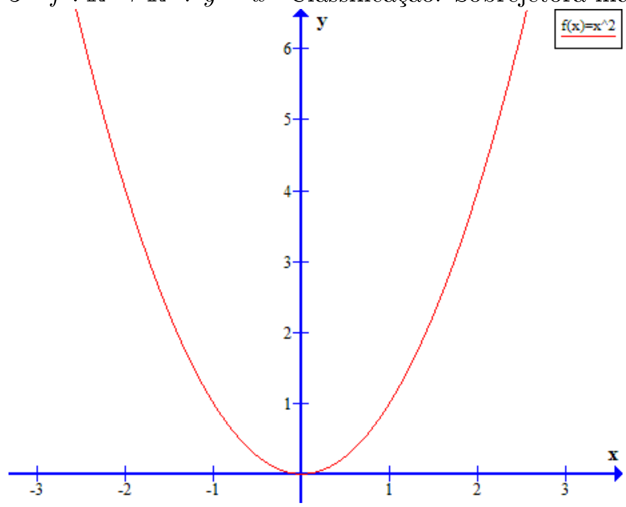
1 - f: R $\rightarrow$ R: y = x. Classicação: Injetora e Sobrejetora = Bijetora



2 - f: R $\rightarrow$ R: $y = x^2$ Classificação: Nem injetora, nem sobrejetora.

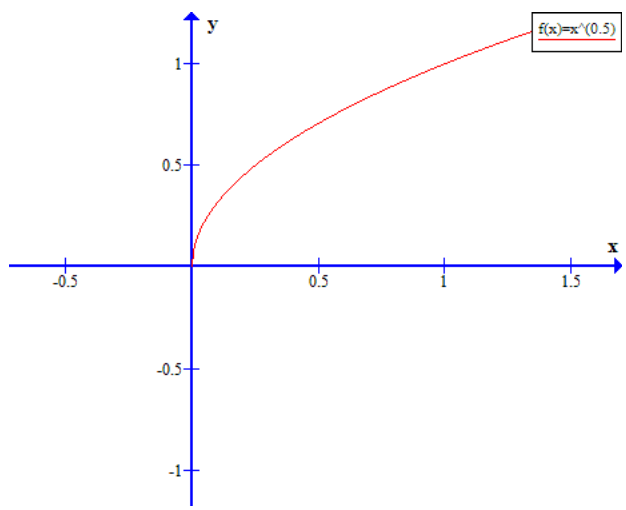


3 - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$: $y = x^2$ Classificação: Sobrejetora mas não injetora



OBS: Note a diferença entre os exemplos 2 e 3: no último, o contra-domínio inclui apenas os reais não-negativos.

4 - $f : R^+ \to \mathbb{R}$: $y = \sqrt{x}$ Classificação: Injetora mas não sobrejetora (pois não cobre os reais negativos no contra-domínio)



Apenas as funções bijetoras admitem função inversa, pois ligam *todos* os elementos do conjunto Y a *um único* elemento do conjunto X.

Função-Linear

Def: Função que preserva estrutura do espaço vetorial. É uma reta (ou plano, ou hiperplano) que passa pela origem.

f: $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^M / \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall$ x,y $\in R^K$, $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exemplos:
1 - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \quad y = 2x; \quad y = ax, \quad a \in \mathbb{R}$.
2 - f: $R^2 \to$ R: y = f(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2
3 - f: $R^k \to$ R: y = f(x_1,$\cdots$,x_k) = a_1x_1 + $\cdots$ + a_kx_k
4 - f: $R^2 \to R^2$: $y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$; $y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
ou:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
OBS: As matrizes são uma das formas de representação de funções lineares, ou sistemas de funções lineares.

5 - f: $R^3 \to R^2$: $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$; $y_2 = x_1 + 2x_2 - x_3$
ou:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

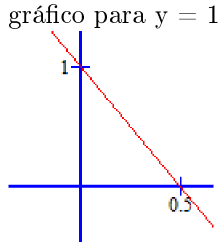
6 - f: $R^K \to R^M$: $y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k$; $y_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2k}x_k; \cdots; \quad y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k$
ou
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$
Toda função linear pode ser representada em forma matricial. Matrizes representam funções-lineares.

Curva de Nível

$f(x_1, \cdots, x_n) = b \in R^M$

Exemplo: f: $R^2 \to$ R: y = 2x_1 + x_2 : x_2 = y - 2x_1

gráfico para y = 1:



Forma Quadrática: extensão natural: generalização de equação de segundo grau.

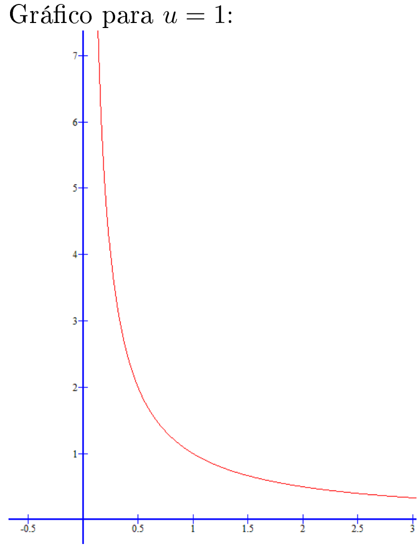
$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$: expoentes de cada termo somam 2.
$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

Forma Geral:
Q(x_1,$\cdots$,x_k) = $^k/_{i,j=1} \sum a_{ij}x_ix_j$

Curva de nível:

Exemplo: u(x_1,x_2) = x_1x_2
$x_1x_2 = u$⇒x_2 = $\frac{u}{x_1}$ para u exógeno, fixo.

Gráfico para $u = 1$:



Representação Matricial
$a_{11}x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2$= $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ou ainda (a representação matricial da forma quadrática não é única): $a_{11}x_1$ + $a_{12}x_1x_2$ + $a_{22}x_2$ = $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Forma Geral:

Q(x_1,⋯,x_m) = $_{i \leq j} \sum a_{ij}xx_j = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_{11}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1m} \\ \frac{1}{2}a_{12}a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

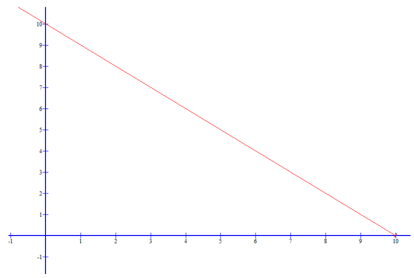
Ou seja: Q(x) = x^TAx, sendo x^T a transposta de x, x = $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$ e A uma matriz simétrica e única. Já que a forma quadrática admite mais de uma representação matricial, o melhor é escolher a representação simétrica.

Função contínua: existe um ponto $(x_0, f(x_0))$ no qual $f(x_0)$ existe e é igual ao valor do seguinte limite: $lim_{x \to x_0}$f(x_0) (ou seja, o limite deve existir e ser igual ao valor da função no ponto).

Inclinação
Seja y = f(x); y = ax ⇒$\triangle y = a\triangle x \Rightarrow a = \frac{\triangle y}{\triangle x}$: inclinação.
Em funções lineares, a inclinação é constante. Exemplo:

f(x) = 10 - x; inclinação: -1

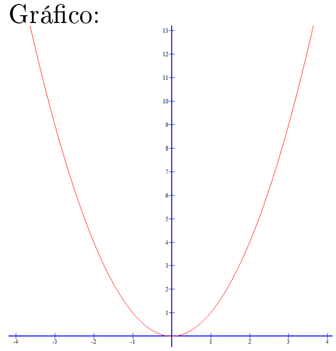
Gráfico:



Em funções não-lineares, a inclinação não é constante. A inclinação assume valores diferentes em pontos diferentes.

Exemplo: f(x) = x^2

Gráfico:



Como definir a inclinação para funções não-lineares ?

Usamos a derivada: $\frac{dy}{dx} = lim_{dx\to 0}(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx})$

Exemplo: y = x^2

$\frac{dy}{dx} = lim_{dx\to 0}(\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}) = lim_{dx\to 0}(\frac{x^2+dx^2+2xdx-x^2}{dx}) = lim_{dx\to 0}(\frac{dx^2+2xdx}{dx})$
$= lim_{dx\to 0}(dx+2x) = 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

Há formas mais fáceis de se calcular uma derivada do que fazendo uso da definição (limite). Para isso, existem algumas regras:

1 - y = $x^k \Rightarrow \frac{dy}{dx} = kx^{k-1}$

2 - y = ax, a constante $\Rightarrow \frac{dy}{dx}$ = a

3 - y = f(x) + g(x) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} + \frac{d(g(x))}{dx}$

4 - y = af(x) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a\frac{d(f(x))}{dx}$

5 - y = f(x)g(x)$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$g(x) + f(x)$\frac{d(g(x))}{dx}$

6 - y = $\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d(f(x))}{dx}g(x)-f(x)\frac{d(g(x))}{dx}}{g^2(x)}$

7 - y = $\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

8 - y = e$^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}$ = e^x

9 - y = a$^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}$ = a$^x \ln a$

<u>Regra da Cadeia</u>: usamos para derivar funções compostas

y = f(g(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$

Exemplos:
1 - y =ln(x^2) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}2 = \frac{2}{x^2}$
2 - y =(lnx)^2 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{2lnx}{x}$
3 - y = (f(x))$^k \Rightarrow \frac{dy}{dx}$ = kf(x)$^{k-1}$f'(x)

Derivada Parcial: Utilizamos a derivada parcial em funções com mais de uma varíavel. Deriva-se em relação a uma das variaveis, tomando as demais como constantes.

Exemplos:
1 - f(x,y) = $x^2y^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2xy^2$; $\frac{df}{dy} = 2yx^2$
2 - f(x,y) = $3x^2y^2 + 4xy^3 + 7y \Rightarrow \frac{df}{dx} = 6xy^2 + 4y^3$;$\frac{df}{dy} = 6x^2y + 12xy^2 + 7$

Aplicações:
Seja u(x_1,x_2) : utilidade, então$\frac{du}{dx_i}$: utilidade marginal do bem i.

Seja f(x_1,x_2) : função de produção, então $\frac{df}{dx_i}$: produto marginal do fator de produção i.

Exemplos:
1 - u = $4x_1^{\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}$
û = ln u = ln ($4x_1^{\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}$) = ln 4 + ln $(x_1)^{\frac{3}{4}}$+ ln $(x_2)^{\frac{1}{4}}$ = ln 4 + $\frac{3*lnx_1}{4}$ + $\frac{lnx_2}{4}$
$\frac{d\hat{u}}{dx_1} = \frac{3}{4}*\frac{1}{x_1} = \frac{3}{4x_1}$; $\frac{d\hat{u}}{dx_2} = \frac{1}{4}*\frac{1}{x_2} = \frac{1}{4x_2}$

2 - y = $4x_1^{\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}$
$\frac{dy}{dx_1} = 4*\frac{3}{4}*x_1^{\frac{-1}{4}}*x_2^{\frac{1}{4}} = 3(\frac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{4}}$; $\frac{dy}{dx_2} = 4*\frac{1}{4}*x_1^{\frac{3}{4}}*x_2^{\frac{-3}{4}} = (\frac{x_1}{x_2})^{\frac{3}{4}}$

Inclinação da Curva de Indiferença (TMS):
$$\frac{dx_2}{dx_1}\lfloor_y = \frac{UMG1}{UMG2} = \frac{\frac{3}{4x_1}}{\frac{1}{4x_2}} = \frac{3x_2}{x_1}$$

Inclinação da Isoquanta (TMST):
$$\frac{dx_2}{dx_1}\lfloor_y = \frac{PMG1}{PMG2} = \frac{3(\frac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{4}}}{(\frac{x_1}{x_2})^{\frac{3}{4}}} = \frac{3x_2}{x_1}$$

Derivada Total: com apenas uma varíavel: usamos a expansão de Taylor:
f(x) $\cong$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)
Ou seja: f(x) - f(x_0)$\cong$f'(x_0)(x - x_0) $\Rightarrow \triangle f$ = f'(x_0)*$\triangle x \Rightarrow \triangle f = \frac{df(x_0)}{dx}\triangle x$

Com várias váriaveis:
$\triangle f = \frac{df(x_0)}{dx_1}\triangle x_1 + \cdots + \frac{df(x_0)}{dx_m}\triangle x_m$

Ou seja: é a equação do plano tangente ao ponto (x_1^*, x_2^*, f(x_1^*, x_2^*)).

Equação Paramétrica de um plano tangente: precisamos de um ponto e de duas direções (i.e., dois vetores direcionais):

$x = p + su + tv; s,t \in R$; u,v vetores.

O ponto inicial é p = (x_1^*, x_2^*, f(x_1^*, x_2^*)). Os dois vetores são:

u = $(1{,}0,\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1})$ e v = $(0{,}1,\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2})$

Então:
x = (x_1^*, x_2^*, f(x_1^*, x_2^*)) + s * $(1{,}0,\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1})$ + t * $(0{,}1,\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2})$
x = (x_1^* + s, x_2^* + t, f(x_1^*, x_2^*) + s*$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1}$ + t*$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2}$)

Podemos escrever o plano tangente como uma função que, para cada par (s,t), associa o valor abaixo:
(s,t) $\longrightarrow$f(x_1^*, x_2^*) + s$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1}$ + t$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2}$

Ou seja: f(x_1^* + s, x_2^* + t) - f(x_1^*, x_2^*) $\cong$s$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1}$ + t$\frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2}$

Forma matricial: $\begin{pmatrix} \frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1} & \frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

Logo, a matriz acima representa uma aproximação linear da função f no ponto (x_1^*, x_2^*)
Defina então:
Df(x_1^*, x_2^*) = $\begin{pmatrix} \frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_1} & \frac{df(x_1^*,x_2^*)}{dx_2} \end{pmatrix}$
Df é a derivada de f, e representa uma aproximação linear de f em torno do ponto (x_1^*, x_2^*).
Podemos estender o mesmo raciocínio para mais de duas variáveis. Dessa forma, para funções f: $R^n \rightarrow R$, n > 2, temos:
Df = $\frac{df}{dx_1}dx_1 + \cdots + \frac{df}{dx_n}dx_n$
$\downarrow$
Diferencial Total.

O hiperplano tangente é o gráfico de uma função-afim. *Notação para o que se segue:* $(h_1, ..., h_m)$ *é a generalização para* $\mathbb{R}^n$ *do vetor* (s,t) *acima, que está em* $\mathbb{R}^2$ *por ter apenas duas coordenadas. Ou seja, interprete* $h_1 = s$, $h_2 = t$.

$(h_1, \cdots, h_m)\longrightarrow$f($x^*$) + $\frac{df(x^*)}{dx_1}h_1 + \cdots + \frac{df(x^*)}{dx_m}h_m$
$\downarrow$ $\downarrow$
Notação para variações Função linear

A matriz Df(x^*) = $\begin{pmatrix} \frac{df(x^*)}{dx_1} & \cdots & \frac{df(x^*)}{dx_m} \end{pmatrix}$ é a derivada de f no ponto x*. Quando f:$R^n \rightarrow R$ (Contradomínio é unidimensional), essa matriz é um vetor chamado GRADIENTE. No caso geral, f:$R^n \rightarrow R$, chama-se matriz JACOBIANA.

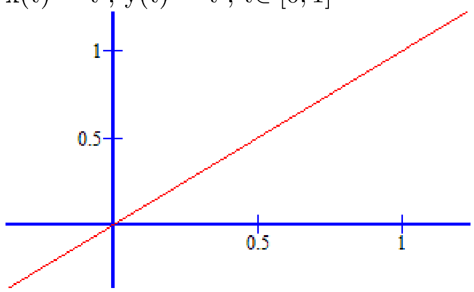
Regra da cadeia em R^n

Definição: Curva em R^n: Representação paramétrica: x(t) = (x_1(t),$\cdots$,x_n(t))
x_i é a função para a coordenada i.
t é o parâmetro.

Exemplos:

1 - x: vetor de n insumos
t: Instante no tempo: parâmetro
(x_1(t),$\cdots$,x_n(t)): quantidade de cada insumo utilizada em cada instante de tempo.

2 - Segmento de reta entre os pontos (0,0) e (1,1)
x(t) = t ; y(t) = t ; t$\in [0, 1]$



Assim como definimos a derivada x'(t) da função x(t) em R, definimos x'(t) = (x'$_1$(t) $\cdots$ x'$_n$(t)). Esse vetor é tangente à função x(t) em um ponto t qualquer.

Seja x_0 = x(t_0)
Seja {h_j} uma sequência / $h_j \to 0$ $\forall$ j = 1,$\cdots$,n
Então x(t_0 + h_j)$\to$x(t_0)

Logo:
x(t_0 + h_j) - x(t_0) = $\frac{1}{h_j}$ (x(t_0 + h_j) - x(t_0)) = $\frac{x(t_0+h_j)-x(t_0)}{h_j}$
Esse vetor é apenas a diferença x(t_0 + h_j) - x(t_0) multiplicada pelo escalar $\frac{1}{h_j}$. Dessa forma, temos que:
$\lim_{h_j\to 0}(\frac{x(t_0+h_j)-x(t_0)}{h_j}) = \frac{x_1(t_0+h_1)-x(t_0)}{h_1} \quad \cdots \quad \frac{x_j(t_0+h_j)-x(t_0)}{h_j} = x_1'(t_0) \quad \cdots \quad x'j(t_0) =$ x'(t_0)

Exemplos:
1 - Considere a curva z(t) = (x(t), y(t)), com x(t) = t^3, y(t) = t^2.

z'(t) = ($3t^2$, 2t)
z'(t = 1) = (3 , 2)
z'(t = 0) = (0,0) : Vetor zero: Não tem direção : a reta tangente não está bem definida neste ponto.

ATENÇÃO: a derivada é linear porque é sempre avaliada em um ponto! z'(t = 1) = (3,2), mesmo que z'(t) = ($3t^2$, 2t) seja não-linear !

Uma curva é dita REGULAR se todo x_i'(t) for contínuo em t e $\begin{bmatrix} x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\forall$ t.

Regra da Cadeia:
Seja(x_1(t), $\cdots$, x_n(t)) uma curva regular, t $\in$[a , b].
Pergunta típica: Como uma função f:$R^n \to R$ se comporta ao longo dessa curva ? Construímos assim uma função g: f:R$\to R$:

g(t) = f(x_1(t),$\cdots$,x_n(t)) , t $\in$[a , b].

Se n = 1, podemos utilizar a regra da cadeia já vista:
g'(t) = f'(x(t))x'(t)

Para n > 1, temos uma expressão análoga, usando o conceito de derivada total:

g'(t) = $\frac{dg}{dt}$ = $\frac{df}{dx_1}$(x(t)) $\frac{dx_1}{dt}$(t) + $\cdots$ + $\frac{df}{dx_n}$(x(t)) $\frac{dx_n}{dt}$(t)

Exemplo:

f(x,y) = x^2+ y^2
x(t) = t
y(t) = t

g(t) = f(x(t) , y(t)) é o quadrado da distância ao longo da reta de 45º. A derivada dessa função no ponto (1 , 1) é:

g'(t) = (x(t)^2 + y(t)^2)' = 2*x(t)*1 + 2*x(t)*1 = 2*(x(t) + y(t)) = 2*(t + t) = 4t.

g'(1) = 4

.