Notas de Aula - Teoria dos Jogos - FCE/UERJ 2016.2
(Versão preliminar - favor não circular)
Professor Pedro Hemsley
Horário: xxxx
Sala: xxxx
Ementa e informações relevantes: página do curso

1 Contexto

Teoria dos Jogos nasceu como uma área da matemática: como formular e resolver problemas de escolha ótima (otimização) quando há interdependência entre as escolhas de diferentes agentes? Exemplo: guerra fria. 'Escolha ótima' é o problema típico de microeconomia, que passou a utilizar e a desenvolver o instrumental de Jogos em diversos problemas: competição de firmas, relação entre regulador e empresa regulada, finanças corporativas, economia do trabalho, política monetária, e praticamente tudo em economia.

O método da microeconomia tem três princípios:

1- *O indivíduo é a instância decisória relevante em diversos problemas importantes de ciência econômica* (isso não significa 'agentes econômicos são egoístas' - instância decisória é diferente de objetivos da instância decisória). Em diversos problemas há outras instâncias decisórias relevantes: a família decide conjuntamente para onde vai viajar no fim de semana, o board de uma firma toma as decisões de investimento, o congresso toma decisões políticas. Em geral, a microeconomia estuda esses processos decisórios de forma desagregada, tentando entender a escolha coletiva a partir do comportamento individual dos membros. Note ainda que esse princípio supõe implicitamente que *é possível fazer escolhas*, limitadas que sejam, o que distingue a teoria econômica de teorias determinísticas sobre o comportamento.

2- *As decisões individuais são tomadas a partir de algum critério* - ou seja, não são puramente aleatórias. Podem ser imperfeitas, podem estar sujeitas a diversas restrições informacionais e cognitivas, podem ter erros, mas há algum critério, vago que seja. Ou seja, os indivíduos tomam decisões buscando *otimizar* alguma coisa.

3- Para passar do estudo de decisões individuais para o comportamento de um grupo de indivíduos (board de diretores, mercado, sociedade, etc), há um requisito de consistência: se o hipótese inicial é "indivíduos otimizam", a análise de um grupo de indivíduos exige que todos otimizem, ou a hipótese inicial não estaria de fato sendo usada. Esse requisito de consistência é uma condição de *equilíbrio*. Note que 'equilíbrio' não é definido como 'ausência de movimento': é uma imposição de consistência. É perfeitamente possível definir trajetórias de equilíbrio em modelos dinâmicos; e mudanças em decisões quando um indivíduo recebe novas informações, ou aprende algo, ou esquece algo. Equilíbrio, portanto, é uma situação em que, dadas as informações disponíveis e as condições de cada indivíduo, *não existe incentivo unilateral ao desvio*. Ou seja: dadas as variáveis exógenas e dadas as decisões dos demais agentes, nenhum agente tem interesse em mudar sua decisão *individual*. (Exercício: verifique que 'oferta = demanda' é o único ponto que atende a essa definição de equilíbrio no modelo básico de mercados perfeitamente competitivos, e portanto é o único equilíbrio nesse modelo.)

Estudamos então a interação entre os agentes econômicos, que pode ser estratégica ou não-estratégica.

Interação não-estratégica: o exemplo mais importante são os modelos de equilíbrio geral. A interação ocorre através dos preços, que não são variável de escolha individual de nenhum agente (o impacto da ação individual sobre os preços é negligenciável.) A interação é portanto apenas indireta.

Interação estratégica: a ação de um agente afeta *diretamente* a decisão ótima de outros agentes.

A Teoria dos Jogos estuda a interação estratégica. Algumas aplicações:

- Eleições
- Oligopólios
- Lobby
- Par ou ímpar
- Guerra
- Relação de emprego
- Finanças corporativas
- Regulação
- Organização industrial

Todos esses exemplos podem ser estudados como jogos, que são classificados a partir de duas dimensões:

- Temporal: jogos estáticos x jogos dinâmicos
- Informacional: jogos de informação completa x jogos de informação incompleta

Há portanto quatro combinações possíveis, com conceitos de equilíbrio específicos:

1- Jogos estáticos de informação completa: equilíbrio de Nash

2- Jogos dinâmicos de informação completa: equilíbrio de Nash perfeito em subjogos

3- Jogos estáticos de informação incompleta: equilíbrio de Nash Bayesiano

4- Jogos dinâmicos de informação incompleta: não há um único conceito de equilíbrio útil para essa classe de jogos, mas veremos o equilíbrio Bayesiano Perfeito

Como aplicação fundamental dos jogos de informação incompleta, veremos também os modelos de Teoria de Contratos: seleção adversa, moral hazard e sinalização.

2 Jogos Estáticos de Informação Completa

Exemplo básico: Dilema dos Prisioneiros. Considere a seguinte *matriz de payoffs*:

$Jog.1/Jog.2$	$Delatar$	$Não - Delatar$
$Delatar$	$-5,-5$	$0,-10$
$Não - Delatar$	$-10,0$	$-1,-1$

Esse jogo pode modelar a seguinte situação. Dois criminosos foram presos pelo delegado - que sabe que eles cometeram um crime maior, mas não tem informação suficiente para prendê-los por isso. Sem uma delação, pode prendê-los apenas por uma infração menor. O delegado tenta então induzir cada um a delatar o colega, fazendo a seguinte proposta. Se nenhum delatar, eles são presos por apenas um ano cada (punição da infração menor). Se ambos delatarem, ambos são presos por cinco anos cada. Se um delatar e o outro não, o delator é solto imediatamente. Ou seja: a delação é premiada, mas depende do quanto de cooperação se obtém de cada prisioneiro.

A teoria econômica deve ser capaz, como a ciência como um todo, de gerar informação - o que significa estabelecer causalidades e oferecer uma predição que possa ser testada empiricamente. "Se A, então B", "se chove, então molha", ou "se dois priosioneiros estão sujeitos a determinadas circunstâncias, então observaremos tal comportamento". Para usar ciência econômica, vamos recorrer aos princípios elencados anteriormente. Primeiro: cada jogador toma sua decisão individualmente - não estão sujeitos a nenhuma imposição externa além do que está descrito no modelo, e não há uma decisão 'conjunta'. Segundo: existe um critério que norteia essa escolha - a saber, cada prisioneiro busca minimizar o tempo que passará preso (pode-se alterar essa hipótese, gerando outros jogos). Terceira: a predição da teoria exige, como requisito de consistência com a hipótese comportamental de otimização, que ambos os prisioneiros estejam otimizando. Ou seja, a predição deve ser um par de escolhas tal que nenhum priosioneiro tenha incentivo unilateral ao desvio na solução proposta - o equilíbrio.

Aplicando então esses três princípios, encontra-se facilmente a solução do jogo. Suponha que o jogador 2 escolha "delatar": o jogador 1 escolherá então entre "delatar" e ficar cinco anos preso ou "não delatar" e ficar dez anos preso. Para minimizar o tempo na cadeia, ele escolhe "delatar". Se o jogador 2 escolhe "não delatar", então o jogador 1 escolherá entre "delatar" e ser liberado imediatamente ou "não delatar" e ficar um ano preso. Para minimizar o tempo preso, ele escolhe "delatar". Ou seja, em qualquer hipótese o jogador 1 escolhe a estratégia "delatar". Argumento análogo vale para o jogador 2. Conclui-se então que o equilíbrio do jogo é ambos delatarem. Como resultado, cada um fica cinco anos preso.

Note-se que o equilíbrio não maximiza o *payoff* agregado: se pudessem se coordenar (ou seja, se a instância decisória fosse a dupla de prisioneiros), a escolha seria "ambos escolhem não delatar". Esse porém não pode ser o equilíbrio, pois ambos teriam incentivo a delatar. Em suma: a partir do par de estratégias "delatar/delatar", nenhum jogador pode aumentar seu payoff (diminuir o tempo na cadeia) se mudar de estratégia, mas a partir do par de estratégias "não delatar / não delatar" (ou de qualquer outro ponto), haveria incentivo unilateral ao desvio. Em outras palavras, *o equilíbrio do jogo não é eficiente de Pareto*: há outra alocação (não delatar, não delatar) em que o payoff de cada um é mais alto. Portanto, o primeiro teorema do bem-estar social ("se os mercados forem completos e todos os agentes forem tomadores de preços, então o equilíbrio de mercado é eficiente de Pareto") não se aplica. A primeira hipótese do teorema é violada: há uma *externalidade* (e portanto falta um mercado), pois a ação de um jogador afeta o bem-estar de outro.

(Pode haver cooperação entre os jogadores no dilema dos prisioneiros, como será visto em jogos dinâmicos.)

O dilema dos prisioneiros apresenta todas as informações necessárias a respeito da estrutura do jogo e do conceito de equilíbrio. A representação de um jogo estático de informação completa exige as seguintes informações, que constituem a *forma normal* de um jogo:

1- *Jogadores*: $\{jogador\,1,\, jogador\,2\}$.

2- *Estratégias*: para cada jogador $i = 1, 2$, o conjunto de estratégias é $\{delatar, não\,delatar\}$.

3- *Payoffs*: para cada jogador $i = 1, 2$, o payoff de delatar é -5 (se o jogador $j \neq i$ delatar) ou 0 (se o jogador $j \neq i$ não delatar); o payoff de não delatar é -10 (se o jogador $j \neq i$ delatar) ou -1 (se o jogador $j \neq i$ não delatar).

Essas três informações estão presentes na *matriz de payoffs* acima.

Outro exemplo: par ou ímpar.

Jogadores: $\{P, I\}$.

Estratégias: para cada jogador, o conjunto de estratégias é $\{p, i\}$, em que 'p' representa "jogar número par" e 'i' representa "jogar número ímpar".

Payoffs:

$$\begin{bmatrix} & P & I \\ (p,p) & 1 & -1 \\ (p,i) & -1 & 1 \\ (i,p) & -1 & 1 \\ (i,i) & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercício: faça a representação matricial do jogo de par ou ímpar.

Em um jogo estático de informação completa, supõe-se que os jogadores escolhem suas ações individualmente e de forma simultânea; depois, cada um recebe seu payoff (o jogo é estático). A matriz de payoffs é conhecida por todos os jogadores (o jogo é de informação completa): cada jogador conhece o payoff dos demais jogadores para cada combinação de estratégias. A representação de um jogo na forma normal pode escrita de forma geral da seguinte forma:

1- Jogadores: $i = 1, 2, ..., N$.

2- Estratégias: para cada jogador i, S_i é o espaço de estratégias disponíveis. Se $s_i \in S_i$, então s_i é uma estratégia factível para o jogador i. (Caixa alta é o conjunto de estratégias, caixa baixa é um elemento desse conjunto.) O conjunto de estratégias de todos os jogadores é $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$.

3- Payoffs: para cada jogador i, há uma função payoff $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, para cada vetor de estratégias $(s_1, s_2, ..., s_N) \in S$ que determine uma estratégia para cada jogador, determina-se um payoff $u_i(s_1, s_2, ..., s_N)$. Fica novamente claro que a estratégia de um jogador pode afetar o payoff de qualquer outro jogador.

A forma normal é portanto $G = \{(S_1, ..., S_N), (u_1, ..., u_N)\}$.

Atenção a uma notação que será bastante utilizada: $(s_i, s_{-i}) \doteq (s_1, ..., s_N)$, ou seja, $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_N)$. Ou seja, s_{-i} é o vetor de estratégias de $N-1$ jogadores, pois exclui-se o jogador i. Define-se S_{-i} e u_{-i} analogamente.

Conceitos de Solução

Diz-se que uma estratégia s_i é *estritamente dominada* para o jogador i se houver uma outra estratégia s_i' que gere um payoff estritamente maior para o jogador i do que a estratégia s_i *para todas as escolhas* s_{-i} *dos demais jogadores.* Formalmente: s_i é estritamente dominada se existe s_i' tal que $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. Intuitivamente, uma estratégia é estritamente dominada se existir uma opção melhor para o jogador, qualquer que seja a escolha dos demais. (Pode-se definir a partir daí uma estratégia estritamente dominante: todas as demais estratégias são estritamente dominadas por ela. Mas não é um conceito útil na prática.)

Exercício: há alguma estratégia estritamente dominada no dilema dos prisioneiros?

A aplicação do conceito de estratégia estritamente dominada é direta: se um jogador é racional (ou seja, se ele busca otimizar seu payoff), ele jamais jogará uma estratégia estritamente dominada. Podemos então excluir tais estratégias do seu espaço de escolhas, e fazer a análise para os demais jogadores, criando assim um processo iterativo para tentar solucionar jogos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} J1/J2 & L & M & R \\ U & 1,0 & 1,2 & 0,1 \\ D & 0,3 & 0,1 & 2,0 \end{bmatrix}$$

Não existe estratégia estritamente dominada para o jogador 1. Porém, R é estritamente dominada para o jogador 2: qualquer que seja a escolha de 1, M gera um payoff estritamente maior do que R. Se o jogador 1 souber que o jogador 2 é racional, então o jogador 1 pode eliminar a estratégia R das escolhas possíveis de 2, e a matriz de payoffs se reduz:

$$\begin{bmatrix} J1/J2 & L & M \\ U & 1,0 & 1,2 \\ D & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Agora D é estritamente dominada por U para o jogador 1. Se o jogador 2 souber que o jogador 1 é racional, e, além disso, *souber que o jogador* 1 *sabe que ele (jogador* 2*) é racional*, então ele sabe que D não será jogada, e pode excluí-la do espaço de estratégias:

$$\begin{bmatrix} J1/J2 & L & M \\ U & 1,0 & 1,2 \end{bmatrix}$$

Seguindo o raciocínio, o jogador 2 escolhe M, e a solução do jogo é (U, M). Esse é o equilíbrio do jogo por *eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas*.

Para usar esse procedimento, é necessário supor que os jogadores são racionais, que todos sabem que todos são racionais, que todos sabem que todos sabem que são racionais, e assim indefinidamente. Se essas 'rodadas de conhecimento sobre racionalidade' forem infinitas, diz-se que a estrutura do jogo é *conhecimento comum* (common knowledge).

Esse procedimento nem sempre gera predições únicas, ou ao menos vagamente precisas.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} J1/J2 & L & C & R \\ T & 0,4 & 4,0 & 5,3 \\ M & 4,0 & 0,4 & 5,3 \\ D & 3,5 & 3,5 & 6,6 \end{bmatrix}$$

Exercício: verifique que não há estratégias estritamente dominadas nesse jogo, e portanto não equilíbrio por eliminação iterada de estratégias estritamente dominantes.

Precisamos de um conceito de equilíbrio para esse tipo de jogo. Suponha que a teoria dos jogos faça uma predição única sobre o resultado de um jogo. Se a predição é correta, então os jogadores devem querer escolher a estratégia prevista pela teoria. Ou seja: nenhum dos jogadores pode ter incentivo a desviar, individualmente, da estratégia prevista: não pode haver incentivo unilateral ao desvio. Essa é a definição do equilíbrio de Nash.

Considere o jogo $G = \{(S_1, ..., S_N), (u_1, ..., u_N)\}$. As estratégias $(s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*)$ são um equilíbrio de Nash se e só se, para todo jogador i, a estratégia s_i^* for a *melhor resposta* para as estratégias s_{-i}^* dos demais jogadores. Formalmente:

$$\forall i, \forall s_i \in S_i, u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$$

Ou seja: para todo jogador i, a estratégia s_i^* é solução para o problema de otimização $\underset{s_i \in S_i}{max} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$.

Portanto, se um perfil de estratégias (s_i, s_{-i}) não é equilíbrio de Nash, existe pelo menos um jogador que gostaria de desviar individualmente.

Exercício: encontre os equilíbrios de Nash nos exemplos anteriores.

Exemplo: Batalha dos Sexos

$$\begin{bmatrix} J1/J2 & C & F \\ C & 2,1 & 0,0 \\ F & 0,0 & 1,2 \end{bmatrix}$$

Há dois equilíbrios de Nash: (C, C) e (F, F). Quando há múltiplos equilíbrios, o poder preditivo da teoria fica reduzido.

Note-se que se apenas um perfil de estratégias sobrevive à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas, então esse perfil é o único equilíbrio de Nash do jogo. Além disso, o equilíbrio de Nash sempre sobrevive à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (por quê?).

Exercício. Que estratégias sobrevivem à eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas no jogo abaixo? Qual é (são) o(s) equilíbrio(s) de Nash?

	L	C	R
T	2,0	1,1	4,2
M	3,4	1,2	2,3
B	1,3	0,2	3,0

Exercício. Encontre os equilíbrios de Nash do jogo abaixo.

	c	b
c	$2,0$	$3,1$
b	$0,2$	$1,3$

Aplicação: Modelo de Cournot

Essa é o primeiro exemplo de organização industrial. Estuda-se a concorrência entre duas firmas oligopolistas em um dado mercado. Supõe-se que cada firma $i = 1,2$ escolhe uma quantidade não-negativa quantidade q_i a produzir de um bem homogêneo (por exemplo, soja), vendido no mesmo mercado. Ou seja, o espaço de estratégias é $[0, \infty)$. A quantidade total vendida no mercado é $Q = q_1 + q_2$. Quanto maior a quantidade total, menor é o preço de mercado, pois a demanda é negativamente inclinada. Por simplicidade, vamos supor uma demanda linear $P = a - Q$. As duas firmas operam com o mesmo custo unitário constante, sem outros custos: a função custo é $c_i(q_i) = cq_i$ para $c > 0$. O payoff da firma1 é o seu lucro, denotado π_1:

$\pi_1 = Receita\, -\, Custo$

$\pi_1 = Preço \times Quantidade\, -\, Custo$

$\pi_1 = P \times q_1\, -\, cq_1$

$\pi_1 = (a - Q) \times q_1\, -\, cq_1$

$\pi_1 = (a - q_1 - q_2) \times q_1\, -\, cq_1$

Analogamente, obtém-se o payoff da firma 2:

$\pi_2 = (a - q_1 - q_2) \times q_2\, -\, cq_2$

Exercício: escreva a forma normal do modelo de Cournot.

R. Jogadores: firmas 1 e 2. Estratégias: $q_i \in [0, \infty)$, $i = 1,2$. Payoffs: $\pi_i = (a - q_i - q_j) \times q_i\, -\, cq_i$, $i = 1,2$.

Supõe-se ainda que as firmas escolham suas estratégias (ou seja, as quantidades) simultaneamente, e toda a estrutura do jogo, em particular os payoffs, seja common knowledge. Trata-se portanto de um jogo estático de informação completa.

Para encontrar o equilíbrio de Nash (q_1^*, q_2^*), supomos inicialmente que uma das firmas (por exemplo, a firma 2) está jogando a quantidade de equilíbrio, e calculamos a resposta ótima da outra firma. Ou seja, buscamos q_1^* tal que $\pi_1(q_1^*, q_2^*) \geq \pi_1(q_1, q_2^*)$, para todo $q_1 \in [0, \infty)$. A solução desse problema é obtida maximizando-se o lucro da firma 1 , ou seja, resolvendo-se o problema $\underset{q_1 \geq 0}{Max} \pi_1(q_1, q_2^*)$

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max}(a - q_1 - q_2^*) \times q_1\, -\, cq_1$$

Basta então derivar e igualar a zero para encontrar a condição de primeira ordem (é fácil verificar que a condição de segunda ordem é sempre atendida, e portanto a condição de primeira ordem é não apenas necessária mas também suficiente):

$$a - 2q_1^* - q_2^* - c = 0$$

(Estamos supondo implicitamente que a solução é interior, ou seja, não precisamos nos preocupar com a restrição de desigualdade $q_1 \geq 0$. Basta supor, por exemplo, que a é suficientemente grande - tente interpretar.)

O que pode ser reescrito como:

$$q_1^* = \frac{a - q_2^* - c}{2}$$

Essa é a *melhor resposta* da firma 1 à estratégia q_2^* da firma 2 (e pode ser usada para calcular a resposta ótima da firma 1 a qualquer outra quantidade $q_2 \neq q_2^*$ da firma 2). A melhor resposta também é chamada *função de reação.* Ela deixa explícita a interdependência: a escolha ótima da firma 1 depende da estratégia da firma 2.

Analogamente, obtemos a melhor resposta da firma 2:

$$q_2^* = \frac{a - q_1^* - c}{2}$$

Temos então um sistema linear de duas equações (as funções de reação) e duas variáveis (q_1^* e q_2^*). Resolvendo, obtemos:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

A solução (q_1^* e q_2^*) do sistema linear é, por construção, um ponto onde as duas funções de reação são simultaneamente atendidas. Ou seja, q_1^* é a melhor resposta para q_2^*, e q_2^* é a melhor resposta para q_1^*. Logo, nesse ponto nenhuma firma tem incentivo a desviar: é o equilíbrio de Nash.

Exercício: verifique que, no equilíbrio de Nash do modelo de Cournot, temos $P = \frac{a+2c}{3}$ e $Q = \frac{2(a-c)}{3}$. Encontre o lucro individual e o lucro agregado. Verifique que, sob monopólio, a solução seria $Q = \frac{a-c}{2}$. Calcule o lucro de monopólio. Verifique que, sob concorrência perfeita, o preço seria $P = c$, com lucro zero. Calcule a quantidade ótima. Compare preços, quantidades totais e lucros totais nos três modelos de concorrência: Cournot, monopólio e concorrência perfeita. Explique a diferença. Por que as firmas em Cournot não se coordenam para atingir a solução de monopólio?

R. Para encontrar a quantidade total, basta somar as quantidades individuais determinadas acima. Para encontrar o preço, basta substituir a quantidade total na demanda. Para encontrar o lucro individual, basta substituir o preço de mercado e a quantidade individual no payoff de cada firma (e somar os lucros individuais para obter o lucro total). Para encontrar a solução de monopólio, resolva o problema $\underset{Q\geq 0}{Max}(a-Q)\times Q - cQ$. Substituindo a quantidade encontrada nessa expressão, obtém-se o lucro de monopólio. Sob concorrência perfeita, sabemos (de Micro 2) que o preço é igual ao custo marginal, e a quantidade competitiva é encontrada ao substituir esse preço na função demanda: $c = a - Q \Rightarrow Q = a - c$. Encontramos então $\frac{\pi^M}{2} > \pi^C > 0$ (supondo sempre $a > c$, ou a quantidade ótima seria zero), $p^M > p^C$ >0, e $Q^M < Q^C < Q^{competitiva}$. A quantidade de monopólio maximiza o lucro agregado, mas há incentivo unilateral ao desvio, e portanto não é equilíbrio de Nash.

Exercício: encontre o equilíbrio do modelo de Cournot com demanda linear $P = a - bQ$ e N firmas. A função custo é a mesma para todas: $c(q_i) = cq_i$ (custo marginal constante, ou seja, retornos constantes de escala). O que acontece quando $N = 1$? E quando $N \longrightarrow \infty$? Interprete.

R. A função melhor resposta é:

$$a - 2bq_1^* - b\left(q_2^* + q_3^* + ... + q_N^*\right) - c = 0$$

Basta então notar que $q_i^* = q_j^*$ porque as firmas são simétricas (mesma função custo), e substituir na equação anterior. Quando $N = 1$, encontramos a solução de monopólio. Quando $N \longrightarrow \infty$, a economia se aproxima do equilíbrio competitivo.

Exercício: encontre o equilíbrio do modelo de Cournot com duas firmas com funções custos distintas: $c_1(q_1) = c_1q_1$ e $c_2(q_2) = c_2q_2$, $c_2 > c_1 > 0$. Suponha novamente uma demanda linear $P = a - bQ$.

R. Basta observar que as melhores respostas se tornam:

$$q_1^* = \frac{a - bq_2^* - c_1}{2b}$$

$$q_2^* = \frac{a - bq_1^* - c_2}{2b}$$

Novamente, o equilíbrio de Nash é encontrado ao resolver esse sistema de duas equações e duas variáveis.

Aplicação: Modelo de Bertrand

Trata-se de outro exemplo de organização industrial. A estrutura é semelhante à do modelo de Cournot, mas supõe-se que a competição seja em preços, ao invés de quantidades: ou seja, as firmas escolhem um preço não-negativo. É mantida a hipótese de produtos homogêneos e a função custo idêntica para as duas firmas.

O resultado, porém, é bastante distinto. O único equilíbrio de Nash do modelo de Bertrand é $p_1 = p_2 = c$, ou seja, a solução de competição perfeita: prelo igual a custo marginal para todas as firmas participantes.

Para provar que esse é o único equilíbrio de Nash, suponha que haja um outro equilíbrio com $p_1 = p_2 > c$. Nesse caso, as firmas dividiriam o mercado igualmente, e haveria incentivo unilateral ao desvio: uma firma poderia cobrar um preço ligeiramente menor $p-\varepsilon$, roubando assim todo o mercado da concorrente. Dessa forma, o lucro aumentaria: fazendo ε suficientemente pequeno, o impacto negativo sobre o lucro fica arbitrariamente próximo de zero, inferior portanto ao impacto positivo devido ao aumento da demanda (calcule explicitamente ambos os impactos para se convencer). Se $p_1 > p_2 > c$, a firma 2 teria demanda e lucro iguais a zero, e haveria incentivo unilateral ao desvio: fazendo $p_1 = p_2 - \varepsilon > c$, ela tomaria o mercado da concorrente e passaria a ter lucro estritamente positivo (seria análogo se $p_2 = p_1 > c$). Se algum preço fosse estritamente menor que o custo marginal c, a firma levaria prejuízo, e haveria incentivo unilateral para aumentar o preço para c e obter lucro ao menos igual a zero. Logo, resta apenas $p_1 = p_2 = c$.

A comparação dos modelos de Bertrand e Cournot mostra que o espaço de estratégias é um determinante fundamental do equilíbrio.

Vale registrar as limitações práticas do modelo de Bertrand: os produtos são homogêneos (substitutos perfeitos, portanto) e as firmas têm capacidade ilimitada de produção (retornos constantes de escala: custo marginal constante). Se qualquer uma dessas hipóteses fosse violada, o resultado deixaria de valer.

Exercício: encontre o equilíbrio do duopólio de Bertrand com produtos diferenciados. Ou seja, suponha que a demanda pelo produto da firma i seja dada por $q_i = a - bq_i + cq_j$: a demanda é decrescente no preço cobrado pela própria firma e decrescente no preço cobrado pela rival (os bens são substitutos imperfeitos). Verifique que a demanda de cada firma é contínua, ao contrário do modelo com bens homogêneos.

R. Note que o modelo se torna semelhante a Cournot, pois a demanda passa a ser 'bem-comportada' (não é mais descontínua no preço cobrado pelo concorrente, como no Bertrand básico, pois a firma consegue reter alguns consumidores mesmo cobrando um preço mais alto devido à diferenciação). Basta resolver da mesma forma, substituindo a variável de escolha de quantidade para preço.

Estratégias Mistas

Até aqui, consideramos apenas estratégias *puras*: o jogador escolhe uma ação possível, e os payoffs são computados. Nem sempre, porém, é possível encontrar um equilíbrio de Nash em estratégias puras, como ilustrado pelo jogo de par ou ímpar visto anteriormente:

$$\begin{bmatrix} J.1\,/\,J.2 & P & I \\ P & 1,-1 & -1,1 \\ I & -1,1 & 1,-1 \end{bmatrix}$$

Verifica-se facilmente que em qualquer combinação de estratégias puras, o jogador perdedor gostaria de mudar de estratégia. É possível estender o conceito de estratégia para considerar *distribuições de probabilidade* sobre as estratégias puras: ou seja, ao invés de jogar P ou I, o jogador escolhe uma probabilidade de jogar P e uma probabilidade de jogar I. Note que estratégias puras são casos particulares de estratégias mistas: são distribuições degeneradas, em que joga-se uma estratégia pura com probabilidade 1, e as demais com probabilidade zero. Diz-se então que o conjunto de estratégias mistas é $\triangle(S_i)$ para cada jogador i.

Para encontrar a solução, consideramos então que o jogador 1 escolhe uma probabilidade p_1 de jogar par, e portanto uma probabilidade $1 - p_1$ de jogar ímpar. Analogamente, o jogador 2 escolhe uma probabilidade p_2 de jogar par e uma probabilidade $1 - p_2$ de jogar ímpar.

Calculamos então o payoff esperado de cada jogador para cada estratégia *pura*, que dependerá das probabilidades escolhidas *pelo outro jogador*:

$$u_1(Par) = p_2 \times 1 + (1 - p_2) \times (-1)$$

$$u_1\left(Ímpar\right) = p_2 \times (-1) + (1 - p_2) \times 1$$

$$u_2(Par) = p_1 \times (-1) + (1 - p_1) \times 1$$

$$u_2\left(Ímpar\right) = p_1 \times 1 + (1 - p_1) \times (-1)$$

Para referência (não será usado agora), podemos calcular a utilidade de cada jogador dada sua própria escolha de probabilidades:

$$u_1 = p_1 u_1(Par) + (1 - p_1)\, u_1\left(Ímpar\right)$$

$$u_2 = p_2 u_2(Par) + (1 - p_2)\, u_2\left(Ímpar\right)$$

A solução do jogo são distribuições $\{(p_1^*, 1-p_1^*), (p_2^*, 1-p_2^*)\}$ tal que não haja incentivo unilateral a desvio. Esse será o *equilíbrio de Nash em estratégias mistas*. Note que obviamente basta calcular p_1 e p_2, e as demais probabilidades estarão determinadas.

Para encontrar (p_1^*, p_2^*), observe que devem valer, necessariamente, as duas condições abaixo:

$$u_1(Par) = u_1\left(\acute{I}mpar\right) \Rightarrow p_2 \times 1 + (1-p_2) \times (-1) = p_2 \times (-1) + (1-p_2) \times 1$$

$$u_2(Par) = u_2\left(\acute{I}mpar\right) \Rightarrow p_1 \times (-1) + (1-p_1) \times 1 = p_1 \times 1 + (1-p_1) \times (-1)$$

Ou seja: as estratégias puras que recebem probabilidade estritamente positiva no equilíbrio de Nash devem oferecer ao jogador a mesma utilidade esperada: caso contrário, o jogador poderia aumentar seu payoff esperado diminuindo a probabilidade de jogar uma estratégia com payoff inferior. Essas condições de indiferença geram a solução $(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: cada jogador escolhe "par" ou "ímpar" com probabilidade igual a $\frac{1}{2}$, como sugerido pela intuição (o que aconteceria se um jogador escolhesse uma probabilidade diferente?). Note ainda que a condição de indiferença do jogador 1 determina a probabilidade escolhida pelo jogador 2, e vice-versa: cada jogador escolhe sua probabilidade de maneira a deixar o outro indiferente entre as estratégias puras.

Exercício: encontre o equilíbrio de Nash em estratégias mistas na batalha dos sexos.

R. Análogo ao que foi feito acima, substituindo os payoffs.

Note que não há equilíbrio em estratégias mistas (não-degeneradas) no dilema dos priosioneiros: um jogador racional não atribui uma probabilidade estritamente positiva a uma estratégia estritamente dominada.

Note ainda que uma estratégia (pura ou mista) pode ser estritamente dominada por uma estratégia mista, mesmo que não seja estritamente dominada por nenhuma estratégia pura. Considere o seguinte jogo:

$$\begin{bmatrix} J.1/J.2 & L & R \\ T & 3,0 & 0,0 \\ M & 0,0 & 3,0 \\ B & 1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Exercício: verifique que a estratégia pura B é estritamente dominada para o jogador 1 pela estratégia mista $Prob(T) = Prob(M) = \frac{1}{2}$.

R. Considere uma estratégia mista qualquer (p,1-p) para o jogador 2: ou seja, joga L com probabilidade p, ,joga R com probabilidade 1-p. A utilidade da estratégia mista $(0.5T, 0.5M)$ é igual a $0.5*(p*3+(1-p)*0)+0.5*(p*0+(1-p)*3) = 1.5 > 1 =$ utilidade do jogador 1 ao jogar B, independente da estratégia $(p, 1-p)$ do jogador 2.

Pode ocorrer o oposto: uma estratégia mista pode ser estritamente dominada por uma estratégia pura, como no jogo abaixo (verifique as mesmas estratégias do exercício anterior).

$$\begin{bmatrix} J.1/J.2 & L & R \\ T & 3,0 & 0,0 \\ M & 0,0 & 3,0 \\ B & 2,0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

Exercício. Encontre os equilíbrios de Nash da "batalha dos sexos" em que cada jogador obtém payoff 10 caso vá ao seu programa favorito e encontre o outro jogador; 5 caso vá ao programa indesejado e encontre o outro jogador; e -8 se houver desencontro.

R. Análogo ao feito no par ou ímpar, substituindo apenas os payoffs.

Exercício. Duas empresas estão decidindo se adotam campanhas publicitárias agressivas, em que buscam roubar clientes da concorrente, ou moderadas, em que apenas divulgam seus produtos. Suas recompensas se encontram descritas no jogo abaixo. Encontre todos os equilíbrios de Nash.

	Campanha Agressiva	*Campanha Moderada*
Campanha Agressiva	$-100, -100$	$10, -10$
Campanha Moderada	$-10, 10$	$0, 0$

R. Análogo ao par ou ímpar, substituindo os payoffs.

Note que “jogar uma estratégia mista” não significa necessariamente aleatorizar a tomada de decisão: basta que o outro jogador tenha incerteza sobre a estratégia escolhida.

Notação: σ_i é uma estratégia mista para o jogador i (ou seja, uma distribuição de probabilidade sobre suas estratégias puras) e $\triangle(S_i)$ é o conjunto de estratégias mistas desse jogador (ou seja, é o conjunto de distribuições de probabilidade possíveis sobre seu conjunto de estratégias puras).

Existência de Equilíbrio

Alguns conceitos preliminares:

Correspondência é uma generalização de uma *função*. Uma função $f: X \longrightarrow Y$ associa a cada elemento de X um único elemento em Y, equanto uma correspondência $\Gamma: X \longrightarrow Y$ pode associar a cada elemento de X um ou mais elementos em Y. Ou seja, uma correspondência associa a cada elemento de X um subconjunto de Y. (Se o subconjunto for unitário para todo $x \in X$, então a correspondência é apenas uma função.)

Exercício: verifique que a demanda por substitutos perfeitos é uma correspondência, não uma função. Considere $u(x,y) = x + y$, $p_x = 1$, uma renda $M = 10$, e avalie a relação entre p_y e a escolha ótima de x.

R. Note que quando $p_y = 1$, a escolha ótima de x é qualquer coisa no intervalo $[0,10]$: ou seja, a escolha ótima não é única, e portanto a demanda não é uma função, mas uma correspondência (o restante é questão de Micro 1).

Como ilustrado no exercício anterior, é comum que uma correspondência represente a escolha ótima do consumidor quando há indiferença.

Ponto Fixo de uma função $f: X \longrightarrow X$ é simplesmente um ponto x tal que $f(x) = x$. Para uma correspondência, um ponto fixo é um elemento $x \in \Gamma(x)$: não faz sentido usar igualdade porque $\Gamma(x)$ pode não ser um elemento único, mas um conjunto de elementos do contra-domínio. Um *teorema de ponto fixo* é um resultado que estabelece que se a função ou correspondência tiver determinadas propriedades, então ela terá um ponto fixo.

Considere um jogo $G = \{(\triangle(S_1), ..., \triangle(S_N)), (u_1, ..., u_N)\}$: como sugerido pelo exemplo do par ou ímpar, precisamos considerar estratégias mistas para garantir existência de equilíbrio. Para cada vetor de estratégias σ_{-i} escolhidas pelos 'rivais' do jogador i, podemos definir a *melhor resposta* $MR_i(\sigma_{-i})$ como uma estratégia para o jogador i tal que:

$$u_i(MR_i(\sigma_{-i}), \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Ou seja, $MR_i(\sigma_{-i})$ dá ao jogador i o maior payoff possível quando os demais jogadores escolhem σ_{-i}. A melhor resposta pode ser uma função ou, mais geralmente, uma correspondência - ou seja, admitimos que o jogador i possa ser indiferente entre diferentes opções para algum vetor de estratégia dos demais jogadores. A melhor resposta é uma correspondência com domínio $\triangle(S_{-i})$ e contradomínio $\triangle(S_i)$.

A melhor resposta é individual para cada jogador $i = 1, ..., N$. Podemos colocá-las lado a lado:

$$MR = [MR_1(\sigma_{-1}), ..., MR_N(\sigma_{-N})]$$

Ou seja: a correspondência MR informa, para cada estratégia possível *de todos os jogadores*, qual é a melhor resposta *de todos os jogadores*. De fato, o lado direito da expressão acima está definido para cada vetor $(\sigma_1, ..., \sigma_N) \in \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$. Note então que essa correspondência associa *um vetor de estratégias para cada jogador* no domínio a *algum vetor de estratégias para cada jogador no contra-domínio*, em que esse último é a melhor resposta para todos os jogadores. Ou seja: $MR: \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N) \longrightarrow \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$. Para simplificar a notação, defina $\triangle(S) = \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$. A correspondência de melhor resposta passa então a ser escrita $MR: \triangle(S) \longrightarrow \triangle(S)$.

Exercício: escreva a função MR para o dilema dos priosioneiros.

Observe então que um equilíbrio de Nash é um vetor de estratégias $(\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$ tal que $MR(\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*) = (\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$. Ou seja: quando os jogadores escolhem $(\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$, a melhor resposta por cada um é exatamente $(\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$: não há portanto incentivo ao desvio por parte de nenhum jogador. Mas isso significa exatamente que $(\sigma_1^*, ..., \sigma_N^*)$ é um ponto fixo da correspondência de melhor resposta MR.

Provar a existência de equilíbrio de Nash equivale a provar que a correspondência de melhor resposta MR tem um ponto fixo. Para tanto, precisamos de um teorema do ponto fixo que se aplique à correspondência MR. Usaremos o teorema do ponto fixo de Kakutani:

Teorema (Kakutani). Seja $A \subseteq \mathbb{R}^l$ um subconjunto não-vazio de um espaço euclidiano de dimensão finita (ou seja, $l < \infty$). Seja $f: A \longrightarrow A$ uma correspondência. Suponha: (i) A é compacto e convexo; (ii) $f(x)$ é não-vazia para todo $x \in A$; (iii) $f(x)$ é convexa para todo $x \in A$; (iv) o conjunto $\{(x,y) \in A \times A : y \in f(x)\}$ é fechado. Então f tem ponto fixo: existe $x \in A$ tal que $x \in f(x)$.

Teorema (Nash, 1950): todo jogo G finito tem equilíbrio em estratégias mistas.

Para provar o teorema de Nash, basta mostrar que a correspondência MR atende a todas as hipóteses do teorema do ponto fixo de Kakutani.

- Resultado preliminar (recapitulação de cálculo): um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se for fechado (toda sequência convergente no conjunto tem o limite dentro do conjunto) e limitado (o conjunto cabe dentro de uma 'bola' com centro na origem e raio finito).
- Resultado preliminar (recapitulação de cálculo): toda função contínua definida num intervalo compacto atinge um ponto de máximo (Weierstrass).
- Resultado preliminar: o conjunto de estratégias mistas $\triangle(S_i)$ é convexo para todo jogador i. Se duas estratégias σ_1 e σ_2 pertencem a esse conjunto, então por definição a estratégia $\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2$ também pertence para todo $\lambda \in [0,1]$: é simplesmente uma estratégia mista que joga σ_1 com probabilidade λ e σ_2 com probabilidade $1-\lambda$.
- Resultado preliminar: o conjunto de estratégias mistas $\triangle(S_i)$ é não-vazio, pois estamos supondo que o conjunto de estratégias mistas é não-vazio (ou o jogador não faria parte do jogo). Logo, há no mínimo uma estratégia mista: a própria estratégia pura, vista como estratégia mista degenerada.
- Resultado preliminar: o payoff esperado u de cada jogador é linear (e portanto contínuo) na probabilidade escolhida. Considere por exemplo o jogo de par ou ímpar: a utilidade esperada de um jogador é:

$$u_1 = p_1 u_1(Par) + (1-p_1)\, u_1\left(\acute{I}mpar\right)$$

Logo, essa função é linear em p_1.

De posse desses resultados preliminares, passamos a verificar que a correspondência de melhor resposta atende às hipótese do teorema de Kakutani, e portanto tem ponto fixo - ou seja, existe equilíbrio de Nash.

(i) *O conjunto $\triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$ é compacto, convexo, e não-vazio.* Cada conjunto $\triangle(S_i)$ é apenas um conjunto de distribuições de probabilidade: se houver k estratégias puras em S_i, uma distribuição é um vetor $(p_1, ..., p_k)$ que atribui uma probabilidade para cada uma dessas estratégias tal que $\sum\limits_{m=1}^{k} p_m = 1$ e $p_m \geq 0$: ou seja, as probabilidades são não-negativas e somam 1. Logo, esse conjunto é fechado e limitado, e portanto compacto, assim como seu cartesiano. Esse conjunto é convexo e não-vazio, como estabelecido nos resultados preliminares.

(ii) *A correspondência $MR : \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N) \longrightarrow \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$ é não-vazia.* Para cada jogador i, um elemento da correspondência MR_i é uma solução para o problema:

$$\underset{s_i \in S_i}{Max}\, u_i(s_i, s_{-i})$$

Por hipótese, a função u é linear nas estratégias (probabilidades) e o espaço de estratégias é fechado e limitado (e portanto compacto, pois é um subconjunto de $\mathbb{R}^l$). Logo, pelo teorema de Weierstrass, este problema admite solução, e portanto a correspondência MR_i é não-vazia.

(iii) *A correspondência $MR : \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N) \longrightarrow \triangle(S_1) \times ... \times \triangle(S_N)$ é convexa.* Ou seja, cada correspondência individual $MR_i : \triangle(S_{-i}) \longrightarrow \triangle(S_i)$ é convexa. Considere dois elementos $\sigma_i^{'}$ e $\sigma_i^{''}$ pertencentes a MR_i: ou seja, dada uma escolha de estratégias σ_{-i} pelos demais jogadores, $\sigma_i^{'}$ e $\sigma_i^{''}$ geram a mesma utilidade para o jogador i, que portanto é indiferente entre elas (ou não estariam ambas na correspondência de melhor resposta). Para estabelecer a convexidade de MR_i, precisamos provar que para todo $\lambda \in [0,1]$, interpretado como uma probabilidade, a estratégia mista $\lambda\sigma_i^{'} + (1-\lambda)\sigma_i^{''}$ também pertence a MR_i - ou seja, gera o mesmo payoff esperado para o jogador i. Como $\sigma_i^{'}$ e $\sigma_i^{''}$ são melhores respostas quando os demais jogadores escolhem σ_{-i} , segue que, para qualquer outra estratégia $x_i \in \triangle(S_i)$, deve valer:

$$u_i\left(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right) \geq u_i(x_i, \sigma_{-i})$$

$$u_i\left(\sigma_i^{''}, \sigma_{-i}\right) \geq u_i(x_i, \sigma_{-i})$$

Podemos multiplicar a primeira equação por λe a segunda por $1-\lambda$para obter:

$$\lambda u_i\left(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}\right) \geq \lambda u_i(x_i, \sigma_{-i})$$

$$(1-\lambda)\,u_i\left(\sigma_i^{''},\sigma_{-i}\right)\geq(1-\lambda)\,u_i\left(x_i,\sigma_{-i}\right)$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$\lambda u_i\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)+(1-\lambda)\,u_i\left(\sigma_i^{''},\sigma_{-i}\right)\geq u_i\left(x_i,\sigma_{-i}\right)$$

Como o payoff esperado é uma função linear (resultado preliminar), podemos reescrever o lado esquerdo:

$$u_i\left(\lambda\sigma_i^{'}+(1-\lambda)\,\sigma_i^{''},\sigma_{-i}\right)\geq u_i\left(x_i,\sigma_{-i}\right)$$

Como isso vale para qualquer estratégia x_i factível para o jogador i, concluímos que a estratégia mista $\lambda\sigma_i^{'}+(1-\lambda)\,\sigma_i^{''}$ maximiza o payoff esperado do jogador i quando os demais jogadores escolhem σ_{-i}. Logo, essa estratégia pertecence à correspondência de melhor resposta $MR_i\left(\sigma_{-i}\right)$, que é, portanto, convexa.

(iv) *O conjunto* $\{(\sigma,\hat{\sigma})\in\triangle(S)\times\triangle(S):\,\hat{\sigma}\in MR(\sigma)\}$ *é fechado.* Suponha, por absurdo, que esse conjunto não seja fechado. Logo, existe uma sequência convergene $(\sigma_n,\hat{\sigma}_n)$ pertencente ao conjunto tal que seu limite $(\sigma,\hat{\sigma})$ esteja fora do conjunto. Ou seja: $\hat{\sigma}^n\in MR(\sigma^n)$ para todo n, mas $\hat{\sigma}\notin MR(\sigma)$. Logo, existe ao menos um jogador i com incentivo ao desvio: $\hat{\sigma_i}\notin MR(\sigma_i)$. Para esse jogador, existe uma outra estratégia $\sigma_i^{'}\in\triangle(S_i)$ tal que $u_i\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)>u_i\left(\hat{\sigma}_i,\sigma_{-i}\right)$. Podemos escrever então que, para todo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, $u_i\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)>u_i\left(\hat{\sigma}_i,\sigma_{-i}\right)+\varepsilon$. Ou, como ε é aleatório, podemos escrever $u_i\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)>u_i\left(\hat{\sigma}_i,\sigma_{-i}\right)+3\varepsilon$, ou ainda $u_i\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)-\varepsilon>u_i\left(\hat{\sigma}_i,\sigma_{-i}\right)+2\varepsilon$.

Além disso, sabemos que $\sigma_{-i}^n\longrightarrow\sigma_{-i}$ e u é uma função contínua (resultado preliminar). Logo, fixando $\sigma_i^{'}$, podemos escrever que $u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}^n\right)\longrightarrow u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)$. Isso implica que, para n suficientemente grande, $\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}^n\right)\in\left[u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)-\varepsilon,u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)+\varepsilon\right]$ e, em particular, $u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}^n\right)\geq u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}\right)-\varepsilon$.

Combinando as desigualdades enconradas nos parágrafos anteriores, obtemos:

$u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}^n\right)>u_i\left(\hat{\sigma}_i,\sigma_{-i}\right)+2\varepsilon\geq u_i\left(\hat{\sigma}_i^n,\sigma_{-i}^n\right)+\varepsilon$

A última desigualdade segue da continuidade de u. Logo, $u\left(\sigma_i^{'},\sigma_{-i}^n\right)>u_i\left(\hat{\sigma}_i^n,\sigma_{-i}^n\right)+\varepsilon$, o que contradiz $\hat{\sigma}_i^n\in MR_i\left(\sigma_i^n\right)$, o que conclui a demonstração.

Exercício. (Tragédia dos Comuns) Considere uma aldeia com $n>1$ pescadores. Cada um dos pescadores decide o número q_i de peixes que pretende alcançar. O volume total de pesca é $Q=\sum_{i=1}^n q_i$. O benefício que cada pescador obtém por unidade de pesca é $p=10$, que pode ser interpretado como o preço do peixe. O custo que cada pescador enfrenta para adquirir uma unidade é $c(Q)=\frac{Q}{n}$. Interprete esse jogo e encontre o equilíbrio de Nash. A quantidade de pesca é eficiente para a aldeia como um todo?

R. O problema individual é:

$\underset{q_i}{Max}10q_i-\frac{Q}{n}q_i$

$\underset{q_i}{Max}10q_i-\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n}q_i$

$\underset{q_i}{Max}10q_i-\frac{q_i+\sum_{j\neq i}^n q_j}{n}q_i$

A condição de primeira ordem é:

$10-\frac{2}{n}q_i-\frac{\sum_{j\neq i}^n q_j}{n}=0$

Obtém-se a solução notando que $q_i=q_j$ para todo i,j, pois os agentes são iguais, e portanto $\sum_{j\neq i}^n q_j=(n-1)q_i$.

A quantidade não é eficiente: há uma externalidaade, exatamente como nos exercícios de oligopólio - a decisão de um pescador afeta o custo dos demais.