Jogos Dinâmicos de Informação Completa

Dinâmico, em oposição a estático, significa que os jogadores não decidem suas estratégias simultaneamente. Os payoffs, porém, são recebidos apenas no final do jogo, para todos os jogadores. Informação completa significa que todos os jogadores sabem o payoff que será atingido pelos demais jogadores para cada combinação possível de estratégias. Faremos adiante uma distinção entre informação perfeita e imperfeita; tenha em mente que é um conceito distinto.

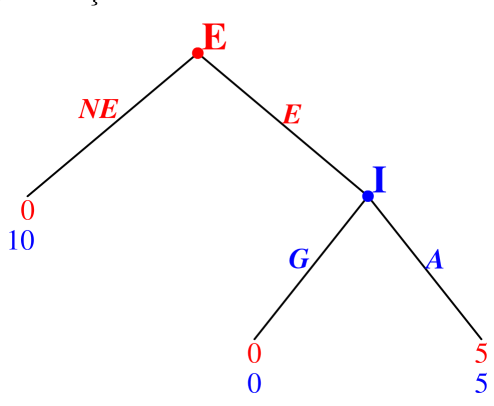
Considere o seguinte exemplo de organização industrial. Há duas firmas potenciais: uma incumbente (I) que a princípio opera sozinha no mercado, e uma entrante potencial (E). No primeiro período, a entrante decide se entra ou não entra no mercado. No segundo período, condicional à entrante de fato entrar, a incumbente decide se faz guerra de preços ou se acomoda. Em caso de entrada e guerra de preços, a incumbente e a entrante tem lucro zero. Em caso de entrada e acomodação, elas dividem o mercado com lucro individual igual a 5. Em caso de não-entrada, a incumbente mantém o lucro de monopólio igual a 10 e a entrante fica com lucro zero. A forma normal desse jogo é:

	Guerra	*Acomoda*
Entra	$\underline{0}, 0$	$\underline{5}, \underline{5}$
Não Entra	$\underline{0}, \underline{10}$	$0, \underline{10}$

Há dois equilíbrios de Nash nesse jogo: entrada e acomodação, ou não entrada e (ameaça de) guerra de preços. Todavia, o Equilíbrio de Nash sem entrada está baseado em uma ameaça não-crível: vale a pena para a incumbente ameaçar fazer uma guerra de preços, mas em caso de entrada da concorrente, o melhor é acomodar. A despeito de "não entra / faz guerra" ser equilíbrio de Nash, pois não há incentivo unilateral ao desvio nessa combinação de estratégias, essa solução parece frágil. O problema é que ela não leva em consideração a dimensão temporal. Para tanto, precisamos usar a forma extensiva do jogo, que especifica:

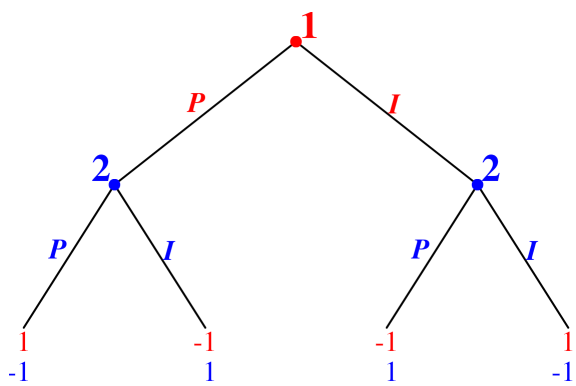
1- os jogadores
2a- quando cada jogador pode jogar (nó de decisão)
2b- o que cada jogador pode fazer em cada nó de decisão
2c- o que cada jogador sabe sobre a evolução do jogo em cada nó de decisão
3- os payoffs obtidos nos nós terminais

Assim como a forma normal em geral é apresentada como uma matriz, usamos para a forma extensiva uma representação em árvore.



Resolvemos então o jogo por indução retroativa: a partir do último período, buscamos o que é melhor para cada jogador, e seguimos assim retroativamente. Dessa forma, eliminamos as estratégias não-críveis: estamos supondo que as estratégias são sequecialmente ótimas, ou sequencialmente racionais, ou seja, são ótimas a partir de qualquer nó em que se inicie a análise do jogo. (O equilíbrio de Nash considere estratégias ótimas para o jogo todo, ou seja, apenas para o nó inicial.)

Para um jogo na forma normal, uma estratégia deve definir o que o jogador faz em cada cada contingência em que pode ser chamado a jogar - mesmo que seja um nó que não possa ser atingido pela decisão do próprio jogador. Para ilustrar, considere uma versão sequencial (e um tanto ingênua) do jogo de par ou ímpar. Primeiro, o jogador 1 escolhe par ou ímpar. O jogador 2 observa o que o jogador 1 fez e, depois, escolhe par ou ímpar. A forma extensiva desse jogo é a seguinte.



Para escrever esse jogo na forma normal, precisamos conhecer as estratégias de cada jogador. O jogador 1 possui apenas um nó de decisão, e duas ações possíveis nesse nó - logo, o total é de duas estratégias, sem maiores preocupações: "par" e "ímpar". O jogador 2 , porém, tem dois nós de decisão, com duas escolhas possíveis em cada um. Cada estratégia sua precisa especificar o que ele fará em cada um desses nós. Suas estratégias são "par e par" (joga par se estiver no primeiro nó, joga par se estiver no segundo nó), "par e ímpar", "ímpar e par", "ímpar e ímpar". A forma normal é:

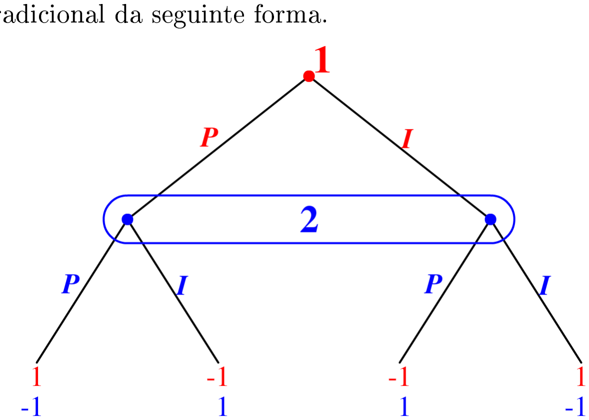
	PP	PI	IP	II
P	$1,-1$	$1-,1$	$-1,1$	$-1,1$
I	$-1,1$	$1,-1$	$-1,1$	$1,-1$

Exercício: quais são os Equilíbrios de Nash do par ou ímpar sequencial? E os equilíbrios obtidos por indução retroativa?

Essa representação pode parecer exagerada, mas é essencial para permitir que se entenda o papel de ameaças não-críveis, tema central de jogos dinâmicos.

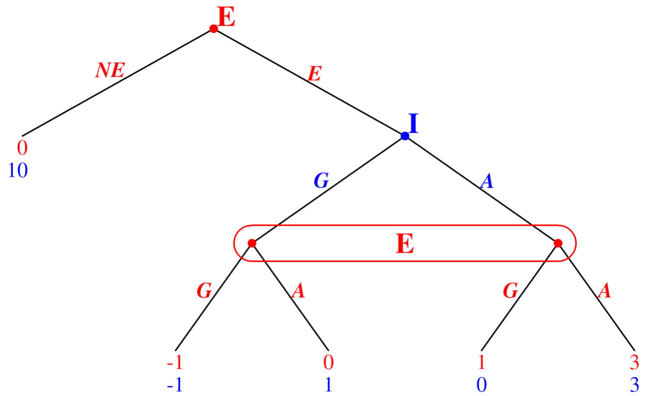
Essa representação do jogo de par ou ímpar é, como dito, um tanto ingênua: o jogador 2 tem uma vantagem óbvia sobre o jogador 1 . Como podemos recuperar a simetria entre os jogadores? Ou seja, como representar um "par ou ímpar sequencial" em que o jogador 2 joga depois do jogador 1 , mas sem observar o que foi escolhido? Para tanto, usamos o conceito de conjunto de informação.

Um conjunto de informação é um conjunto de nós de decisão para um determinado jogador tal que o jogador não saiba diferenciar em qual dos nós ele está. Ou seja, o jogador não conhece perfeitamente a história do jogo: não sabe que caminho fez com que o conjunto de informação fosse atingido. Podemos representar o par ou ímpar tradicional da seguinte forma.



Quando um jogo tem ao menos um conjunto de informação não-unitário, dizemos que é um jogo de informação imperfeita. Quando todos os conjuntos de informação são unitários (e portanto os jogadores conhecem a história do jogo em cada nó), o jogo é de informação perfeita. Note a diferença entre informação completa e informação perfeita: o primeiro conceito diz respeito ao conhecimento sobre payoffs, o segundo se refere ao conhecimento sobre a história do jogo.

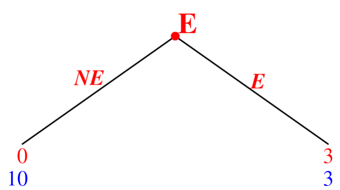
Note ainda que todos os nós em um mesmo conjunto de informação devem permitir as mesmas ações, ou o jogador seria capaz de diferenciar os nós a partir das possibilidades de escolha. Temos então uma forma de representar um jogo na forma normal ou na forma estratégica. Isso será útil também para trechos de um jogo, como ilustrado na seguinte versão do jogo da entrante visto acima. Considere um jogo que começa da mesma forma - a entrante escolhe entre “entrar” e “não entrar” e, no caso de entrada, a entrante e a incumbente escolham simultaneamente entre “acomodar” e “fazer guerra de preços”.



Não podemos usar diretamente o processo de indução retroativa porque a firma 1 , que joga no último período, não sabe em que nó está, e portanto não temos informação suficiente para determinar sua decisão ótima. Podemos porém usar o fato de que existe um “subjogo estático” após a entrada, com a seguinte representação na forma normal.

	Guerra	*Acomoda*
Guerra	$-1, -1$	$1, 0$
Acomoda	$0, 1$	$3, 3$

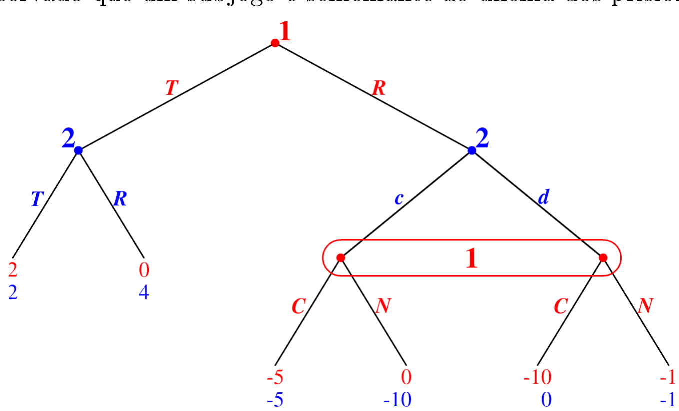
O equilíbrio desse subjogo é ambas acomodarem. Usando ainda a ideia de racionalidade sequencial, a firma 1 antecipa no primeiro período que esse será o resultado do subjogo no segundo período, e pode reescrever a árvore da seguinte forma.



Podemos aplicar agora diretamene a indução retroativa, e concluir que, no equilíbrio, a entrante de fato entra, escolhe acomodação após a entrada, e a incumbente também acomoda.

Exercício: escreva a forma normal desse jogo. Identifique os equilíbrios de Nash. Identifique os equilíbrios que envolvem ameaças não-críveis.

Exercício: encontre os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos do jogo abaixo. Ofereça uma interpretação, observado que um subjogo é semelhante ao dilema dos prisioneiros.



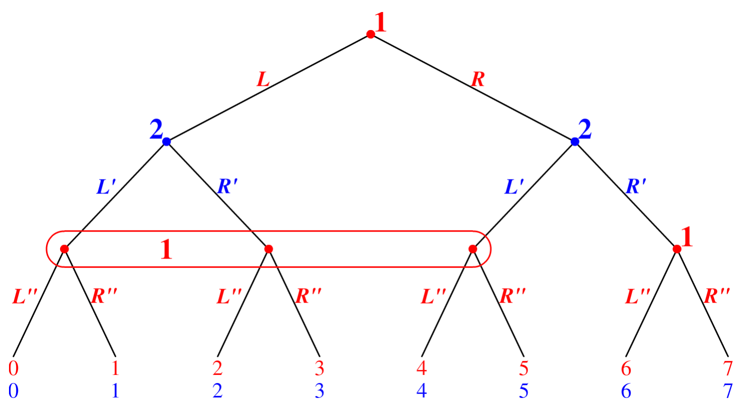
Os equilíbrios de Nash que atendem também ao critério de racionalidade sequencial são ditos Equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos. Ou seja: devem não apenas atender ao requisito para ser Equilíbrio de Nash (ausência de incentivo unilateral ao desvio), mas devem também atender ao critério de racionalidade sequencial: não pode haver ameaças não críveis; cada jogador acha ótimo manter a estratégia em qualquer evolução do jogo. Em outras palavras, o Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos é equilíbrio de Nash para o jogo como um todo (a partir do nó inicial) mas também em todos os demais subjogos.

Formalmente, um subjogo é um conjunto de nós que:

1- começa em um conjunto de informação unitário;
2- inclui todos os nós subsequentes;
3- inclui todos os nós de todos os conjuntos de informação subsequentes ao nó inicial (ou seja, não "corta" um conjunto de informação).

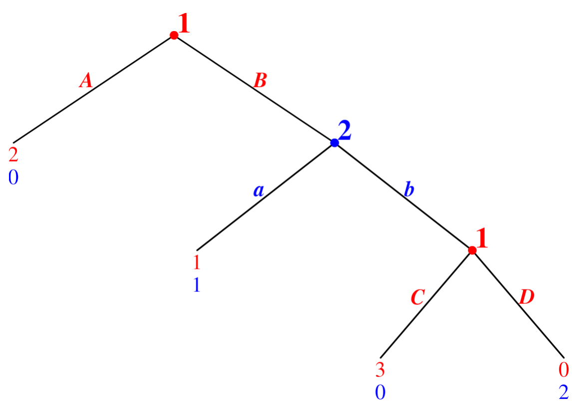
Quando um jogo não tem subjogos além do jogo inteiro, todo equilíbrio de Nash é perfeito em subjogos: nesse caso, a imposição de racionalidade sequencial em subjogos não restringe o conceito de equilíbrio.

Exercício: encontre os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos do jogo abaixo.



É importante diferenciar "equilíbrio" de "caminho de equilíbrio" em jogos dinâmicos. Caminho de equilíbrio inclui apenas os nós que são efetivamente atingidos. O equilíbrio, porém, deve necessariamente informar o que ocorreria fora do caminho de equilíbrio, pois ameaças não-críveis fora do caminho de equilíbrio podem afetar o que acontece no equilíbrio, e portanto devem também respeitar o requisito de racionalidade sequencial.

Exercício: encontre os equilíbrios de Nash e os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos do jogo abaixo.



Aplicação a Organização Industrial: o modelo de Stackelberg

O modelo de Stackelberg é semelhante ao modelo de Cournot, mas as firmas jogam em instantes diferentes. No primeiro período, a firma 1 (Líder) escolhe sua quantidade $q_1 \geq 0$. No segundo período, a firma 2 (Seguidora) observa q_1, e escolhe então sua quantidade $q_2 \geq 0$. Os payoffs são os mesmos do modelo de Cournot.

Para encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, usamos a indução retroativa: é necessário determinar a quantidade ótima q_2 que a Seguidora vai escolher no segundo período. Para tanto, ela resolve o seguinte problema:

$$\underset{q_2 \geq 0}{Max}\,(a - q_1 - q_2)\,q_2 - cq_2$$

A condição de primeira ordem é igual à obtida anteriormente:

$$q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

Ou seja: para cada quantidade q_1 que a firma 1 escolha no primeiro período, a firma 2 deve escolher q_2 no segundo período de acordo com a expressão acima: essa é a quantidade que maximizará seu lucro. Qualquer quantidade diferente dessa seria sub-ótima, e portanto o anúncio de qualquer quantidade diferente dessa seria não-crível.

A firma 1 sabe que a firma 2 escolherá q_2 acima, e usa essa informação para escolher sua quantidade no primeiro período:

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max} \left(a - q_1 - q_2\right) q_1 - cq_1$$

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max} \left(a - q_1 - \left(\frac{a - q_1 - c}{2}\right)\right) q_1 - cq_1$$

Essa expressão pode ser simplificada:

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max} aq_1 - q_1^2 - \frac{aq_1}{2} + \frac{q_1^2}{2} + \frac{cq_1}{2} - cq_1$$

A condição de primeira ordem é:

$$a - 2q_1 - \frac{a}{2} + q_1 + \frac{c}{2} - c = 0$$

Resolvendo, encontramos:

$$q_1 = \frac{a - c}{2}$$

Usando a expressão para q_2 encontrada acima, obtemos:

$$q_2 = \frac{a - c}{4}$$

Compare com o resultado de Cournot, em que $q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3}$. A firma líder tem posição vantajosa porque a firma seguidora não pode se comprometer com uma quantidade que, após a escolha da líder, seria sub-ótima. A firma 1 pode se comprometer com uma quantidade qualquer pois joga primeiro; a firma 2 só pode se comprometer com a quantidade ótima em resposta a q_1. Note que a firma seguidora é negativamente afetada ao receber informação sobre a escolha da líder: se pudesse, ela preferiria não saber o que a líder escolheu. Em problemas de escolha individual, ter mais informação não pode ser prejudicial: o tomador de decisão pode simplesmente ignorá-la. Em jogos, informação adicional pode causar dano.

Exercício: compare a quantidade total, o lucro total e o preço de mercado em Cournot e Stackelberg.

Exercício: em Stackelberg, a informação recebida pela firma 2 diminui seu payoff. Podemos generalizar esse resultado, e afirmar que, em jogos dinâmicos de informação completa e perfeita, quem joga depois fica necessariamente pior do que se o jogo fosse estático?

Aplicação: Barganha Sequencial

Considere uma situação em que dois jogadores fazem propostas alternadas para dividir um determinado valor (para simplificar, suponha que esse valor seja \$1). Na primeira rodada, o jogador 1 faz uma proposta $(s_1, 1 - s_1)$ ao jogador 2: cabe uma parcela s_1 ao jogador 1 e $(1 - s_1)$ ao jogador 2. O jogador 2 aceita ou rejeita. Se aceitar, o valor é distribuído como acordado e o jogo termina com payoffs $(s_1, 1 - s_1)$. Se rejeitar, passa para a segunda rodada, em que o jogador 2 faz uma contra-proposta $(s_2, 1 - s_2)$ ao jogador 1: cabe uma parcela s_2 ao jogador 1 e $(1 - s_2)$ ao jogador 2 (atenção à notação: s_i é a oferta do jogador i ao jogador 1). Se o jogador 1 aceitar, a barganha é realizada e os jogadores ficam com payoffs $(\delta s_2, \delta(1 - s_2))$: há um custo de espera capturado pelo fator de desconto $\delta \in (0, 1)$. Ou seja, *o adiamento da resolução do negócio gera custo para os jogadores.* Se o jogador 1 não aceitar, o jogo termina no período seguinte com uma distribuição exógena $(s, 1 - s)$ e payoffs $\left(\delta^2 s, \delta^2(1 - s)\right)$.

Podemos novamente resolver o jogo por indução retroativa. Na última oferta, o jogador 2 sabe que o jogador 1 pode rejeitar e obter payoff $\delta^2 s$. Para que o jogador dois aceite, a oferta s_2 deve ser tal que o payoff do jogador 1 não seja inferior a esse valor: $\delta s_2 \geq \delta^2 s$, ou $s_2 \geq \delta s$. Como o jogador 2 quer maximizar sua parte, ele faz a menor oferta possível que o outro jogador pode aceitar: $s_2 = \delta s$. Se aceita, essa oferta gera os payoffs $(\delta(\delta s), \delta(1-\delta s)) = (\delta^2 s, (\delta - \delta^2 s))$. O jogador 1 antecipa essa oferta no primeiro período.

O jogador 2 pode então garantir um payoff $(\delta - \delta^2 s)$. Para que o jogador 2 aceite a oferta $(1 - s_1)$ do jogador 1 no primeiro período, portanto, s_1 deve ser tal que $(1 - s_1) \geq (\delta - \delta^2 s)$, ou $1 - \delta + \delta^2 s \geq s_1$. Para maximizar seu payoff, o jogador 1 escolhe exatamente $s_1 = 1 - \delta + \delta^2 s$. O jogador 2 aceita e o jogo é encerrado na primeira rodada.

Note então que, com informação completa, uma barganha sempre termina no primeiro período. (Barganhas de longa resolução podem ser causadas por informação incompeta.) A distribuição do valor inicial depende: (i) da taxa de desconto δ (quanto mais se desconta o futuro, maior o poder de barganha do primeiro jogador); e (ii) dos payoffs exógenos em caso de não-resolução.

Exercício: resolva a barganha sequencial com taxas de desconto distintas δ_1 e δ_2 para cada um dos jogadores. Interprete o resultado.

Aplicação (informação imperfeita): corrida bancária

Considere um jogo de dois períodos ($t = 1, 2$) e dois jogadores ($i = 1, 2$), interpretados como correntistas de um banco. Cada um deles depositou um valor $D > 0$ no banco, que usou o total $2D$ em um projeto de longo prazo: o investimento matura em $t = 2$, com retorno total $2R > 2D$. Se houver algum saque em $t = 1$, o banco é obrigado a liquidar o investimento antecipadamente, com retorno $2r < 2D$ tal que $2r > D$: ou seja, o retorno de curto prazo é suficiente para pagar apenas o depósito de um dos correntistas, não de ambos.

Se ambos sacarem no primeiro período, cada um recebe r, e o jogo acaba. Se um sacar e o outro não, quem sacou obtém D, e quem não sacou é prejudicado: fica com $2r - D < D$. Se ninguém sacar no primeiro período, o jogo vai para o segundo período, no qual o investimento gera um retorno $2R$. Se ambos sacarem em $t = 2$, cada um fica com R. Se nenhum deles sacar, o banco distribui o resultado, e novamente cada um fica com R. Se um sacar e o outro não, quem sacou obtém $2R - D$, e o outro obtém apenas D (note que o lucro do banco é sempre zero - estamos supondo que o mercado bancário tem concorrência perfeita).

Exercício: escreva a forma extensiva da corrida bancária.

No segundo período, resolvemos um jogo na forma estática::

	S	NS
S	R, R	$2R - D, D$
NS	$D, 2R - D$	R, R

O equilíbrio de Nash nesse subjogo é ambos sacarem, com payoff (R, R). Os jogadores antecipam isso no primeiro período, que pode ser escrito da seguinte forma:

	S	NS
S	r, r	$D, 2r - D$
NS	$2r - D, D$	R, R

Esse jogo tem dois equilíbrios de Nash: (S, S) (ambos sacam no primeiro período e o jogo acaba) e (NS, NS) (nenhum saca no primeiro período, e o jogo continua no segundo período). O primeiro período é interpretado como corrida bancária.

Exercício (Gibbons 2.6). Três oligopolistas operam em um mercado com demanda inversa $P = a - (q_1 + q_2 + q_3)$. Cada firma tem custo marginal de produção igual a c, sem custo fixo. No primeiro período, a firma 1 escolhe sua quantidade $q_1 \geq 0$. No segundo período, as firmas 2 e 3 observam q_1 e escolhem, simultaneamente, suas quantidades $q_2 \geq 0$ e $q_3 \geq 0$. Encontre o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Indicação de resposta. No segundo período, resolva um duopólio de Cournot entre as firmas 2 e 3, como já visto, tomando q_1 como um parâmetro exógeno. Encontra-se então um equilíbrio que dependerá de q_1: $\{q_2(q_1), q_3(q_1)\}$. Substitua então na função lucro da firma líder (assim como, no modelo visto de Stackelberg, substituímos $q_2(q_1)$). O restante segue igual.

Jogos Repetidos

É um caso específico de jogo dinâmico: temos um jogo estático, que é repetido a cada período. É portanto um jogo de informação imperfeita. Note de início que repetir o equilíbrio de Nash do jogo estático em todos os períodos é, por definição, um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, pois em qualquer subjogo os jogadores estarão jogando um equilíbrio de Nash. O objetivo é encontrar circunstâncias em que podemos obter um resultado diferente da mera repetição do equilíbrio de Nash estático.

Considere por exemplo o dilema dos prisioneiros repetido duas vezes. Para resolver, começamos pelo último período, que é simplesmente um jogo estático, já que o jogo não continua posteriormente. O equilíbrio de Nash é conhecido: ambos confessam. E ambos antecipam, no primeiro período, que ambos vão confessar no segundo, independente do que ocorrer no primeiro período. Logo, a decisão do primeiro período não tem qualquer impacto sobre as escolhas do segundo, e portanto o primeiro (ou "penúltimo") período pode novamente ser tratado como um jogo estático, pois o que segue não é afetado pelo que é decidido neste momento. Novamente, ambos os jogadores confessam. O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é "ambos confessam no primeiro período; no segundo, ambos confessam, qualquer que tenha sido o resultado no primeiro período" (note que é necessário ter cuidado ao definir a estratégia, informando uma ação para cada contingência).

De forma geral, se um jogo estático com um único equilíbrio de Nash é resolvido por um número finito T de vezes, o único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é jogar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos em todos os períodos.

É um caso específico de jogo dinâmico: temos um jogo estático, que é repetido a cada período. É portanto um jogo de informação imperfeita.

Logo, há apenas duas formas de obter um resultado diferente da repetição do equilíbrio de Nash do jogo estático

1- há múltiplos equilíbrios de Nash no jogo estático

2- há infinitos períodos

Jogos Repetidos Finitas Vezes

Considere inicialmente a primeira possibilidade através do exemplo abaixo. Suponha que esse jogo seja repetido duas vezes, sem desconto.

	L_2	M_2	R_2
L_1	$1,1$	$5,0$	$0,0$
M_1	$0,5$	$4,4$	$0,0$
R_1	$0,0$	$0,0$	$3,3$

O jogo estático tem dois equilíbrios de Nash: (L_1, L_2) e (R_1, R_2). Logo, é possível condicionar o equilíbrio de Nash jogado no segundo período ao resultado do jogo no primeiro período (com apenas um equilíbrio de Nash no jogo estático, esse condicionamento não é possível).

Temos então os seguintes equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos:

1- Jogar L_i no primeiro período; jogar L_i em todos os períodos posteriores para qualquer história do jogo;

2- Jogar R_i no primeiro período; jogar R_i em todos os períodos posteriores para qualquer história do jogo;

3- Jogar M_i no primeiro período; se observar (M_1, M_2) no primeiro período, jogar R_i no segundo período; caso contrário, jogar L_i no segundo periodo.

Os dois primeiros equilíbrios são apenas a repetição de um equilíbrio de Nash estático em todos os períodos, como já discutido. O terceiro equilíbrio, porém, envolve escolher no primeiro período uma ação que não faz parte do equilíbrio de Nash estático: M_i, que oferece o maior payoff agregado mas tem incentivo individual ao desvio. É possível porém sustentar essa ação em um jogo repetido, dado o condicionamento do segundo período. Para verificar que é de fato um equilíbrio, observe inicialmente que as combinações de estratégias no segundo período constituem um equilíbrio de Nash do subjogo (ou seja, do jogo estático). Para que seja ótimo individualmente jogar M_i no primeiro período, observe que:

$$4 + 3 > 5 + 1$$

O lado esquerdo é o payoff de seguir a estratégia, obtendo 4 no primeiro período e 3 no segundo. O lado direito é o payoff do desvio: o jogador que desvia obtém 5 no primeiro período, mas é penalizado no segundo, recebendo apenas 1. Como o payoff da cooperação é maior que o payoff do desvio, os jogadores conseguem sustentar um acordo que não envolve repetir o equilíbrio do jogo estático em todos os períodos.

De forma geral, pode ser possível sustentar estratégias que não sejam equilíbrio de Nash em todos os períodos $t < T$ desde que seja possível punir desvios de forma crível (ou seja, jogando algum equilíbrio de Nash estático) no período final T.

Nota à margem: um problema que pode restringir a aplicação das estratégias de cooperação identificadas acima é a possibilidade de renegociação. No último período, ambos preferem o equilíbrio de Nash (R_1, R_2), e podem ignorar a história pretérita - e quaisquer desvios - uma vez que já ocorreram. Em outras palavras, o jogador é obrigado a se punir para punir também o adversário que desviou. Porém, isso destrói o incentivo a cooperar no primeiro período. Uma solução (nem sempre possível) é um contrato em que o jogador se compromete a jogar determinada ação em função de uma história (commitment device). Em diversas contextos relevantes, essa possibilidade não está presente, o que está relacionado à própria ideia de ameaças não-críveis - ou os jogadores gostariam de utilizá-la, como em Stackelberg. (Estritamente, o problema é distinto, dada a multiplicidade de equilíbrios no jogo estático, mas a possibilidade de comprometimento tem valor em qualquer contexto). Em alguns jogos, porém, há diversas possibilidades de punição, sem prejudicar o responsável por aplicá-la:

	L_2	M_2	R_2	P_2	Q_2
L_1	$1,1$	$5,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$
M_1	$0,5$	$4,4$	$0,0$	$0,0$	$0,0$
R_1	$0,0$	$0,0$	$3,3$	$0,0$	$0,0$
P_1	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$4,\frac{1}{2}$	$0,0$
Q_1	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$\frac{1}{2},4$

Exercício: encontre os equilíbrios de Nash do jogo estático e construa equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos dojogo repetido finitas vezes (para simplificar, $T = 2$) em que a punição por desvio pode ser aplicada sem prejudicar o próprio responsável por implementar a punição.

Jogos Repetidos Infinitas Vezes

Nota preliminar: um jogo com incerteza sobre a data final pode escrito como um jogo repetido infinitamente. De forma geral, trata-se obviamente de uma aproximação para jogos com horizonte muito longo e/ou incerto.

Nesse caso, não existe um único período. Logo, a punição a desvios pode ser feita após qualquer período. Logo, é possível sustentar um resultado diferente do equilíbrio de Nash em *todos* os períodos.

Exemplo: Dilema dos Prisioneiros repetido infinitas vezes (seja C a estratégia 'cooperar', ou 'não delatar' e N 'não cooperar, ou 'delatar'). Considere os seguintes payoffs no jogo estático:

	C	N
C	$4,4$	$0,5$
N	$5,0$	$1,1$

Considere que os jogadores têm um fator de desconto comum $\delta \in (0,1)$. Seja uma sequência de payoffs $\pi_1, \pi_{2,...}$. O valor presente dessa sequência é:

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + ... = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_t$$

Esse jogo tem diversos equilíbrios: diversas estratégias podem ser sustentadas. Uma possibilidade é construir um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos em que os jogadores cooperam em todos os períodos. Considere então a seguinte estratégia:

- jogar C_i no primeiro período. Jogar N_i no período t se todos tiverem jogado C_i em todos os períodos anteriores. Caso contrário, jogar N.

Essa é a chamada estratégia de gatilho. Os jogadores começam cooperando, e continuam assim enquanto todos cooperarem, e passam a não cooperar nunca mais se houver qualquer desvio.

Considere o payoff de jogar a estratégia de gatilho, se o outro jogador também estiver jogando gatilho:

$$\pi_C = 4 + \delta \cdot 4 + \delta^2 \cdot 4 + ... = \frac{1}{1-\delta} \cdot 4$$

Considere a estratégia de desviar. Nesse caso, o jogador que desvia obtém $5 > 4$ no primeiro período, mas apenas 1 em cada período subsequente:

$$\pi_N = 5 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + ... = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot 1$$

Logo, jogar a estratégia de gatilho vale a pena se:

$$\frac{1}{1-\delta} \cdot 4 \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot 1$$

O lado esquerdo é o payoff da cooperação, e o lado direito é o payoff do desvio. obtemos então:

$$4 \geq 5 (1 - \delta) + \delta \cdot$$

Rearranjando, obtemos $\delta \geq \frac{1}{4}$. Ou seja: se os jogadores forem suficientemente pacientes (valor de δ alto), o gatilho é equilíbrio. Como isso vale para todos os períodos, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos: em cada subjogo, ou os jogadores jogam o equilíbrio de Nash estático (não cooperam), ou jogam o que acabamos de mostrar ser também um equilíbrio de Nash (ausência de incentivo unilateral ao desvio).

Note que cada estratégia precisa especificar uma ação para cada contingência - ou seja, para cada história possível do jogo. Cada história até um período t qualquer determina um subjogo a partir de $t + 1$.

A estratégia de gatilho é apenas uma que pode ser sustentada em um jogo infinitamente repetido. Como há tipicamente muitas estratégias que podem ser sustentadas, em geral discutimos que payoffs podem ser obtidos. Para tanto, defina inicialmente o payoff médio obtido por um jogador:

Definição: dado o fator de desconto $\delta \in (0, 1)$, o ***payoff médio*** da sequência de payoffs $\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...$ é $(1 - \delta) \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_t$.

Temos então o seguinte resultado, conhecido como "teorema popular" (folk theorem).

Teorema (Friedman 1971): Seja G um jogo finito e estático com informação completa. $(e_1, e_2, ..., e_N)$ são os payoffs de um equilíbrio de Nash desse jogo, e $(x_1, x_2, ..., x_N)$ são outros payoffs quaisquer. Se $x_i > e_i$ para todo i e δ for suficientemente próximo de 1, então existe um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo infinitamente repetido que atinge $(x_1 x_2, ..., x_N)$ como payoff médio.

Observação. No dilema dos prisioneiros, os jogadores podem garantir ao menos o payoff do Equilíbrio de Nash ao jogar "cooperar", que é estritamente dominante. Em outros jogos, o jogador pode não conseguir garantir esse payoff. Em geral, o payoff mínimo que o jogador consegue garantir, denotado r_i e chamado "payoff de reserva", "utilidade de reserva" ou "opção de fora", é menor que o payoff obtido no equilíbrio de Nash: $r_i < e_i$, para todo i (note que necessariamente $r_i \leq e_i$: se algum jogador pudesse obter $r_i > e_i$, então e_i não poderia ser o payoff associado a um equilíbrio de Nash, que por hipótese é uma melhor resposta. No dilema dos prisioneiros, $r_i = e_i$.). Sob algumas condições, qualquer payoff $x_i > r_i$ pode ser sustentado para δ suficientemente próximo de um.

Note ainda que a maneira mais fácil de sustentar cooperação em um jogo repetido é implementando o "pior equilíbrio de Nash possível" em caso de desvio: ou seja, a punição para desvio deve ser crível e, além disso, tão rigorosa quanto possível, para facilitar a sustentação da cooperação ('facilitar' = tornar a cooperação possível para valores baixos de δ, ou seja, para jogadores não tão pacientes.)

Aplicação: Cartel tácito

Considere o duopólio de Cournot repetido infinitas vezes. As firmas têm a mesma função custo $c(q_i) = cq_i$ e a demanda é $P = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$. Há um fator de desconto $\delta \in (0, 1)$. Sob que condições é possível sustenar o cartel (conluio, cooperação) entre as firmas, ao invés de repetir o equilírio de Cournot em todos os períodos? Cartel significa que as firmas produzem, conjuntamente, a quantidade de monopólio, obtendo o lucro máximo que pode ser obtido nesse mercado.

Considere a seguinte estratégia de gatilho. Cada firma joga a quantidade determinada pelo cartel no primeiro período. Em todos os demais períodos, ela joga a quantidade de cartel se observar cooperação em toda a história do jogo (ou seja, a firma joga cartel se ninguém jamais desviou, incluindo ela própria). Caso contrário, joga Cournot.

Seja π^M o lucro total do monopólio:

$$\pi^M = \underset{Q \geq 0}{Max}\,(a-Q)\,Q - cQ$$

A condição de primeira ordem é $a - 2Q^M - c = 0$, e portanto $Q^M = \frac{(a-c)}{2}$ e $\pi^M = \frac{(a-c)^2}{4}$. As firmas podem dividir o mercado, produzir $q_i^M = \frac{Q^M}{2} = \frac{(a-c)}{4}$ e obter $\pi_i^M = \frac{\pi^M}{2} = \frac{(a-c)^2}{8}$.

O valor presente do payoff do cartel é:

$$\frac{\pi_i^M}{2} + \delta\frac{\pi_i^M}{2} + \delta^2\frac{\pi_i^M}{2} + ... = \frac{1}{1-\delta}\pi_i^M$$

Como já encontrado, a quantidade individual em Cournot é $q_i^C = \frac{(a-c)}{3}$, e portanto o lucro de cada firma é $\pi_i^C = \frac{(a-c)^2}{9} < \pi_i^M$.

Precisamos ainda calcular o payoff de desvio π_i^D: quanto uma firma obtém se maximiza seu payoff imediato e a outra mantém sua quantidade de cartel π_i^M?

$$\pi_i^D = \underset{q_i \geq 0}{Max}\left[a - q_i - q_j^M\right] q_i - cq_i$$

$$\pi_i^D = \underset{q_i \geq 0}{Max}\left[a - q_i - \left(\frac{(a-c)}{4}\right)\right] q_i - cq_i$$

A condição de primeira ordem é $a - c - 2q_i^D - \frac{(a-c)}{4} = 0$, e portanto a quantidade ótima no desvio é $q_i^D = \frac{3}{8}(a-c)$, com payoff $\pi_i^D = \frac{9}{64}(a-c)^2$.

O valor do presente do desvio é:

$$\pi_i^D + \delta\pi_i^C + \delta^2\pi_i^C + ... = \pi_i^D + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i^C$$

O cartel é mantido se gerar payoff individual maior que no desvio:

$$\frac{1}{1-\delta}\pi_i^M \geq \pi_i^D + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i^C$$

Rearranjando, obtemos a seguinte condição:

$$\delta \geq \frac{\pi_i^M - \pi^D}{\pi_i^C - \pi_i^D}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente, encontramos:

$$\delta \geq \frac{9}{17}$$

Exercício. Considere a seguinte variação do modelo anterior de sustentabilidade de cartel. A cada período, a demanda pode ser alta ($P = A - Q$, com probabilidade 0.5) ou baixa ($P = a - Q$, também com probabilidade 0.5), $A > a$. Mostre que é mais fácil sustentar o cartel quando a demanda é baixa - ou seja, carteis devem se formar em períodos de recessão e se desfazer em períodos de crescimento.

Indicação de resposta: basta tomar o valor esperado do lucro em cada período: $0.5 \times (lucro\,com\,P = A - Q) + 0.5 \times (lucro\,com\,P = a - Q)$. O restante segue igual.

Exercício (Gibbons 2.11). O jogo simultâneo abaixo é jogado duas vezes. O resultado da primeira rodada é observado antes que se jogue novamente. Não há desconto. O payoff (4,4) pode ser alcançado como o primeiro estágio de uma estratégia pura de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos? Caso possa, encontre as estratégias. Caso contrário, prove por que não pode. O que muda na resposta se o jogo for repetido infinitas vezes, com uma taxa de desconto $\delta \in (0,1)$?

	L	C	R
T	$3,1$	$0,0$	$5,0$
M	$2,1$	$1,2$	$3,1$
B	$1,2$	$0,1$	$4,4$

Exercício. Considere o duopólio de Bertrand em que as firmas possuem custo zero de produção. A demanda é $P = 10 - Q$, em que $Q = q_1 + q_2$ é a quantidade total produzida pelas firmas. Suponha que esse jogo seja repetido infinitas vezes, com fator de desconto $\delta \in (0, 1)$. Fazer preço igual a zero em todos os períodos é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos? É possível sustentar um equilíbrio em que as firmas cobrem $p = 1$ em todos os períodos? Se for possível, construa esse equilíbrio e determine para que taxas de desconto ele é sustentável. Se $p = 10$, como sua resposta mudaria?

Indicação de resposta: é uma versão mais simples de Cournot repetido. No equilíbrio de Nash estático, as firmas fazem preço igual a custo marginal (ou seja, preço igual a zero) e tem lucro zero em todos os períodos. Existe um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos que consiste na repetição do equilíbrio estático em todos os períodos (i.e., fazer preço zero em todos os períodos é um ENPS). É possível porém sustentar preços mais altos com uma estratégia de gatilho. Ao fazer $p = 1$, a quantidade é $Q = 10 - 1 = 9$, e o lucro é $P \times Q = 1 \times 9 = 9$ (não há custo, e portanto o lucro é igual à receita). As firmas podem dividir o mercado e obter um lucro individual $\frac{9}{2} = 4.5$. Ao desviar, cobrando um preço marginalmente menor $9 - \varepsilon$, 'roubam' todo o mercado e ficam com todo o lucro, e ficam com lucro zero em todos os períodos subsequentes. Logo, o conluio é sustentável se:

$4.5 + \delta \times 4.5 + \delta^2 \times 4.5 + ... \geq 9$

$\Rightarrow \frac{4.5}{1-\delta} \geq 9 \Rightarrow 9 - 9\delta \leq 4.5 \Rightarrow 9\delta \geq 4.5 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$.

Exercício. Duas firmas produtoras de bens homogêneos se defrontam com a demanda inversa $p = 20 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, sendo q_i a quantidade ofertada pela firma i. Os custos marginais são constantes e iguais para as duas firmas, sem custo fixo: $c = 3$.

a) Derive o equilíbrio de Cournot.

b) Derive a situação em que as duas empresas se comportam como um só monopolista, dividindo igualmente as cotas de produção e venda.

c) O resultado de algum item (a ou b) é Pareto superior ao outro? Caso seja, é sustentável em equilíbrio? Explique.

d) Suponha que esse jogo seja repetido $N < \infty$ vezes. Suponha que as duas firmas possuam a mesma taxa de desconto δ para trazer o lucro de amanhã para valor presente. Para que valores de δ o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos será repetir o equilíbrio de Cournot em todos os períodos?

e) Suponha que esse jogo seja repetido infinitas vezes. Suponha que as duas firmas possuam a mesma taxa de desconto δ para trazer o lucro de amanhã para valor presente. Para que valores de δ o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos será repetir o equilíbrio de Cournot em todos os períodos?

Indicação de resposta: é apenas uma ilustração numérica do modelo básico. Basta substituir os valores dados no enunciado.