Notas de Aula - Teoria dos Jogos - FCE/UERJ 2016.2
(Versão preliminar - favor não circular)
Professor Pedro Hemsley
Horário: xxxx
Sala: xxxx
Ementa e informações relevantes: página do curso

1 Jogos Estáticos de Informação Incompleta

Informação completa ou incompleta diz respeito a conhecimento sobre *payoffs*. Sob informação completa, *todos* os jogadores conhecem os payoffs de *todos* os demais jogadores para *todas* as combinações possíveis de estratégias. Com informação incompleta, ao menos um jogador não conhece o payoff de ao menos um outro jogador para ao menos uma combinação possível de estratégias.

Exemplo: Cournot com informação incompleta

Considere a seguinte variação do duopólio de Cournot. A firma 1 tem uma função custo $c_1(q_1) = cq_1$. Já a firma 2 pode ter uma função custo $c_2(q_2) = c_h q_2$, com probabilidade $\theta \in [0,1]$, ou $c_2(q_2) = c_l q_2$, com probabilidade $(1-\theta)$, e $c_h > c_l$: ou seja, ela pode ter um custo de produção alto $(c_h q_2)$ ou baixo $(c_l q_2)$. A A firma 2 conhece o seu próprio custo e conhece também o custo da firma 1. Já a firma 1 conhece seu próprio custo mas não conhece o custo da firma 2: sabe apenas que pode ser custo alto com probabilidade θou baixo com probabilidade $1-\theta$. Mantemos a demanda linear $P = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$, e os espaços de estratégias: $q_i \in [0, \infty)$. A estrutura do jogo é common knowledge.

A firma 2 pode *condicionar* sua produção ao seu custo: $q_2(c_h)$ e $q_2(c_l)$ podem ser distintos. Caso a firma 2 tenha custo alto, ela resolverá o seguinte problema de maximização de lucro:

$$\underset{q_2 \geq 0}{Max} \left(a - q_1^* - q_2\right) q_2 - c_h q_2$$

Como visto no modelo básico de Cournot, isso gera a seguinte função de reação:

$$q_2^*(c_h) = \frac{a - q_1^* - c_h}{2}$$

Analogamente, a firma 2 resolve o seguinte problema quando tem custo baixo:

$$\underset{q_2 \geq 0}{Max} \left(a - q_1^* - q_2\right) q_2 - c_h q_2$$

E obtém a seguinte função de reação:

$$q_2^*(c_l) = \frac{a - q_1^* - c_l}{2}$$

Note que a função de reação é condicional ao custo - alto ou baixo. Já a firma 1 não sabe se a firma 2 joga $q_2^*(c_h)$ ou $q_2^*(c_l)$; sabe apenas as probabilidades θ e $1-\theta$. Logo, ela deve maximizar seyu payoff *esperado*:

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max} \theta \left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_h)\right) q_1 - cq_1\right] + (1-\theta)\left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_l)\right) q_1 - cq_1\right]$$

Podemos rearranjar os termos da seguinte forma:

$$\underset{q_1 \geq 0}{Max} \underbrace{\theta \left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_h)\right) q_1\right] + (1-\theta)\left[\left(a - q_1 - q_2^*(c_l)\right) q_1\right]}_{Receita\,Esperada} - cq_1$$

Ou seja: a receita é estocástica (porque depende de q_2), mas o custo cq_1 é determinístico. A condição de primeira ordem é:

$$\theta \left[a - 2q_1 - q_2^*(c_h)\right] + (1-\theta)\left[a - 2q_1 - q_2^*(c_l)\right] - c = 0$$

Rearranjando:

$$\underbrace{\theta\left[a-2q_1-q_2^*\left(c_h\right)\right]+\left(1-\theta\right)\left[a-2q_1-q_2^*\left(c_l\right)\right]}_{Receita\,Marginal\,Esperada}=\underbrace{c}_{Custo\,Marginal}$$

Em teoria da firma, a solução (interior) do problema da firma é geralmente caracterizada pela condição "receita marginal igual a custo marginal" (em um mercado competitivo, a receita marginal é simplesmente o preço, e obtemos o resultado tradicional "preço igual a custo marginal"). Esse resultado também é obtido em Cournot: como há incerteza, substituímos "receita marginal" pelo valor esperado da receita marginal. (Observe que se $\theta=0$ ou $\theta=1$, a incerteza desaparece, e obtemos novamente receita marginal igual a custo marginal, como no Cournot básico). Essa condição de primeira ordem permite calcular a seguinte função de reação:

$$q_1^*=\frac{a-\left[\theta q_2^*\left(c_h\right)+\left(1-\theta\right)q_2^*\left(c_l\right)\right]-c}{2}$$

Observe que $\left[\theta q_2^*\left(c_h\right)+\left(1-\theta\right)q_2^*\left(c_l\right)\right]=E\left(q_2^*\right)$.

Temos então um sistema (linear) de três equações e três variáveis: $q_1^*, q_2^*\left(c_h\right), q_2^*\left(c_l\right)$. Resolvendo, obtemos:

$$q_2^*\left(c_h\right)=\frac{a-2c_h+c}{3}+\frac{\left(1-\theta\right)}{6}\left(c_h-c_l\right)$$

$$q_2^*\left(c_l\right)=\frac{a-2c_l+c}{3}+\frac{\theta}{6}\left(c_h-c_l\right)$$

$$q_1^*=\frac{a-2c+\theta c_h+\left(1-\theta\right)c_l}{3}$$

Note que $q_2^*\left(c_h\right)$ e $q_2^*\left(c_l\right)$ têm estrutura semelhante. O primeiro termo é exatamente o mesmo de Cournot com custos diferentes: $\frac{a-2c_i+c_j}{3}$. Já o segundo termo se deve à informação incompleta. Se $c_h=c_l$, a informação é completa, e recupera-se o resultado de Cournot com custos distintos. Se c_h-c_l é pequeno, o resultado é quase igual ao de Cournot com custos distintos: $\left(c_h-c_l\right)$ é uma medida de ignorância da firma 1 sobre o custo da firma 2, ou seja, é uma medida de incompletude informacional. Ou seja, a firma 2 condiciona a produção ao custo (alto ou baixo) ***e também ao desconhecimento da firma*** 1 sobre seu custo. Se $\theta=1$, a informação incompleta é irrelevante, $q_2^*\left(c_l\right)$ se torna irrelevante e, novamente, $q_2^*\left(c_h\right)$ passa a ser o resultado de Cournot com custos distintos (é análogo se $\theta=0$). Já a escolha da firma 1 é igual à que faria com custos distintos, bastando tomar o valor esperado: note que $\theta c_h+\left(1-\theta\right)c_l=E\left(\theta\right)$.

Exercício. Considere um oligopólio de Cournot com duas empresas. Sejam c_1 e c_2 os custos marginais das empresas 1 e 2, respectivamente (não há custo fixo). Cada firma tem informação privada sobre seu custo e tem uma distribuição de probabilidade sobre o custo da concorrente: para $i=1,2$, $c_i\in\{10,20\}$, $Prob(c_i=10)=\frac{1}{3}$, $Prob(c_i=20)=\frac{2}{3}$. A função demanda é $p=100-Q$, em que $Q=q_1+q_2$. Encontre o equilíbrio de Nash Bayesiano.

Indicação de resposta: note que a estrutura é exatamente a mesma do problema resolvido anteriormente, mas agora ambas as firmas têm incerteza a respeito do custo da rival. Temos então de encontrar quatro quantidades em equilíbrio: q_1^h, q_1^l, q_2^h, q_2^l (pois são duas firmas, e cada uma tem dois tipos possíveis). Podemos escrever o problema da firma $i\in\{1,2\}$ com custo $k\in\{h,l\}$. (Notação: i,j são as firmas.)

$$\underset{q_i^k}{Max}Prob\left(c_j=c_k\right)\left[\left(a-q_i^k-q_j^h\right)q_i^k-c_kq_i^k\right]+Prob\left(c_j=c_l\right)\left[\left(a-q_i^k-q_j^l\right)q_i^k-c_kq_i^k\right]$$

A condição de primeira ordem é:

$$a-2q_i^k-E\left(q_j^h\right)-c_k=0$$

Em que $E\left(q_j^h\right)=Prob\left(c_j=c_k\right)q_j^h+Prob\left(c_j=c_l\right)q_j^h$ (observe ainda que $Prob\left(c_j=c_l\right)=1-Prob\left(c_j=c_k\right)$).

Essa condição de primeira ordem vale para $k=h$ e $k=l$: ou seja, representa duas equações. Podemos resolver o mesmo problema para a firma $j\neq i$, obtendo duas equações adicionais. Teremos então um sistema de quatro equações (as condições de primeira ordem) para determinar quatro variáveis: q_1^h, q_1^l, q_2^h, q_2^l, o que permite computar o equilíbrio. Note que, nesse caso específico, as firmas são simétricas, o que permite simplificar o problema: $q_1^h=q_2^h$ e $q_1^l=q_2^l$. Logo, passamos para um sistema de apeans duas equações e duas variáveis.

Para resolver o problema com os valores específicos dados no enunciado, basta substituí-los onde necessário.

Exercício. Considere a seguinte versão do duopólio de Cournot. A demanda é $p=a-Q$, $Q=q_1+q_2$. As firmas têm a mesma função custo: $c_i\left(q_i\right)=cq_i$, e portanto o custo marginal (comum e conhecido) é c. A demanda, porém, é incerta: pode ser alta ($a = a_h$) com probabilidade θ e baixa ($a = a_l < a_h$) com probabilidade $1-\theta$. Apenas a firma 1 conhece a demanda de mercado; a firma 2 conhece apenas a distribuição de probabilidade. Encontre o equilíbrio de Nash Bayesiano. (Suponha que os parâmetros são tais que todas as quantidades produzidas são estritamente positivas.)

Indicação de resposta: o problema é semelhante ao resolvido anteriormente. Novamente, a firma 1 tem dois tipos, pois tem informação privada. Considere o problema da firma 1 quando sabe que a demanda é alta:

$$\underset{q_1^h}{Max} \left(a^h - q_1^h - q_2 - c\right) q_1^h$$

Analogamente, podemos escrever o problema da firma 1 quando ela sabe que a demanda vai ser baixa:

$$\underset{q_1^l}{Max} \left(a^l - q_1^l - q_2 - c\right) q_1^l$$

A firma 2 tem apenas um tipo, e deve usar maximizar o lucro esperado:

$$\underset{q_2}{Max} \theta \left(a^h - q_1^h - q_2 - c\right) q_2 + (1-\theta) \left(a^l - q_1^l - q_2 - c\right) q_2$$

Obtemos então três condições de primeira ordem, e resolvemos o problema como no caso original.

Exercício. Considere a seguinte versão do duopólio de Bertrand com produtos diferenciados. A demanda pelo bem da firma i é $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b_i p_j$. Os custos das firmas são iguais a zero. A sensibilidade da demanda da firma i ao preço da firma j pode ser alta ($b = b_h$), com probabilidade θ, ou baixa ($b = b_l < b_h$), com probabilidade $1-\theta$. Cada firma $i = 1, 2$ conhece b_i mas não b_j, e as distribuições de probabilidade são independentes. Encontre o equilíbrio de Nash Bayesiano.

Indicação de resposta: análogo ao modelo de Cournot em que ambas as firmas possuem informação privada.

Forma Normal de Jogos Estáticos Bayesianos

A forma normal de um jogo de informação completa deve especificar jogadores, estratégias e payoffs: $G = \{S_1, ..., S_N; u_1, ..., u_N\}$. Com informação completa, o payoff depende não apenas das estratégias $(s_1, ..., s_N)$, mas também do tipo t_i do jogador i: $u_i(s_1, ..., s_N; t_i)$. O tipo t_i é informação privada do jogador i.

No exemplo de Cournot em que a firma 2 tem informação privada sobre seu tipo, $t_1 \in \{c\}$ e $t_2 \in \{c_l, c_h\}$.

De forma geral, cada jogador conhece seu próprio tipo e atribui probabilidades aos tipos possíveis dos demais jogadores: $p_i(t_{-i}/t_i)$ é a probabilidade que o jogador i atribui a que os demais jogadores (denotados $-i$) tenham tipos t_{-i} quando seu próprio tipo é t_i. Note que essa probabilidade é condicional porque, em alguns casos, o tipo do jogador gera informação sobre a distribuição de probabilidade dos tipos dos demais jogadores. Por exemplo: se a minha firma tem determinado custo de produção, e a tecnologia da minha competidora é mais ou menos parecida com a minha, posso inferir que o custo dela seja mais ou menos parecido com o meu, ainda que eu não saiba exatamente qual é.

No equilíbrio de Nash Bayesiano, cada tipo de jogador deve escolher sua estratégia de forma ótima: ou seja, tratamos cada tipo como um jogador à parte. Ou seja: a estratégia ótima é condicional ao tipo (é uma função do tipo).

Aplicação: Leilões

Um leilão é um mecanismo de alocação alternativo ao mercado competitivo, que é anônimo: os jogadores interagem apenas através dos preços. Em mercados com menos transações e menos participantes, tipicamente cada parte terá mais informação sobre os demais jogadores, e poderá ser útil fazer uso dessa informação. Esse é o caso dos leilões, que são aplicados para concessões, privatização, regulação, etc. Vamos supor que há N participantes do leilão (não vamos modelar o jogador $N+1$, que é o próprio leiloeiro - para tanto, precisamos estudar desenho de mecanismo, que faremos na parte de teoria de contratos). Cada jogador (participante) i atribui um valor s_i ao bem, único e indivisível, a ser leiloado. s_i é informação privada de cada jogador. Vamos supor que s_i é uma variável aleatória com densidade contínua f sobre um suporte $[\underline{s}, \overline{s}]$, com distribuição F. (Lembrando: $F(x) = Prob(s_i \leq x)$.) Supomos ainda que os tipos são independentes e identicamente distribuídos.

No leilão de primeiro preço, o vencedor é aquele que anuncia o maior lance, e o pagamento é exatamente o lance vencedor. No leilão de segundo preço, o vendedor é novamente aquele que anuncia o maior lance, mas nesse caso o pgamento é o segundo maior lance dado. Vamos encontrar o equilíbrio

Leilão de Primeiro Preço.

O payoff é:

$$u_i = \begin{cases} s_i - b_i & , se\, b_i \geq b_j \ \forall j \neq i \\ 0 & , caso\, contrário \end{cases}$$

Ou seja, o jogador i tem payoff $s_i - b_i$ em caso de vitória, e zero caso contrário: podemos interpretar s_i como o preço de reserva, e $s_i - b_i$ como benefício líquido. O payoff esperado é portanto:

$$U_i^e(b_i, s_i) = (s_i - b_i) \cdot Prob\,(jogador\, i\, ganha\, o\, leilão) + 0 \cdot Prob\,(jogador\, i\, perde\, o\, leilão)$$

$$U_i^e(b_i, s_i) = (s_i - b_i) \cdot Prob\,(jogador\, i\, ganha\, o\, leilão)$$

Para encontrar o equilíbrio, vamos supor que todos os jogadores usam uma mesma "função-lance", ou seja, todos usam a mesma regra para determinar o lance a partir do tipo: $b_i(s_i) = b(s_i)$. (Por exemplo: todos usam a regra "vou dar como lance $\frac{s_i}{2}$, metade do valor que atribuo ao bem", o que naturalmente gera lances distintos quando os tipos s_i são distintos). Vamos supor ainda que essa função $b()$ é diferenciável e $b' > 0$: ou seja, é estritamente crescente. Logo, essa função admite uma inversa b^{-1}, também crescente.

Precisamos inicialmente calcular a probabilidade de vitória do jogador i ao dar um lance b_i qualquer.

$Prob\,(jogador\, i\, ganha\, o\, leilão) =$

$Prob\,(jogador\, i\, dá\, o\, maior\, lance) =$

$Prob\,(b_i \geq b_j,\ \forall j \neq i) =$

$Prob\,(b_i \geq b(s_j),\ \forall j \neq i) =$(suponha que os demais jogadores estão jogando a estratégia de equilíbrio $b(s_j)$)

$Prob\left(b^{-1}(b_i) \geq b^{-1}(b(s_j)),\ \forall j \neq i\right) =$(passe a inversa b^{-1} dos dois lados da inequação, cuja direção é preservada porque b^{-1} é crescente)

$Prob\left(b^{-1}(b_i) \geq s_j,\ \forall j \neq i\right) =$(note que a inversa b^{-1} da própria função b é apenas seu argumento original)

$Prob\left(s_j \leq b^{-1}(b_i),\ \forall j \neq i\right) =$(apenas troque os termos de lado)

$Prob\left(s_1 \leq b^{-1}(b_i), s_2 \leq b^{-1}(b_i), ..., s_{i-1} \leq b^{-1}(b_i), s_{i+1} \leq b^{-1}(b_i), .., s_N \leq b^{-1}(b_i)\right) =$ (outra forma de escrever "para todo $j \neq i$)

$Prob\left(s_1 \leq b^{-1}(b_i)\right) \cdot Prob\left(s_2 \leq b^{-1}(b_i)\right) \cdot ... \cdot Prob\left(s_{i-1} \leq b^{-1}(b_i)\right), Prob\left(s_{i+1} \leq b^{-1}(b_i)\right) \cdot .. \cdot Prob\left(s_N \leq b^{-1}(b_i)\right) =$ (use o fato de que as variáveis aleatórias s_i são independentes: $Prob(XY) = Prob(X) \cdot Prob(Y)$ sob independência)

$F_1\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot F_2\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot ... \cdot F_{i-1}\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot F_{i+1}\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot ... \cdot F_N\left(b^{-1}(b_i)\right) =$ (Note que cada uma das probabilidades acima é exatamente a distribuição F)

$F\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot F\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot ... \cdot F\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot F\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot ... \cdot F\left(b^{-1}(b_i)\right) =$ (os tipos são identicamente distribuídos)

$F\left(b^{-1}(b_i)\right)^{N-1}$

Logo, o payoff esperado do jogador i é $(s_i - b_i)\, F\left(b^{-1}(b_i)\right)^{N-1}$. O jogador i resolve:

$$\underset{b_i}{Max}\,(s_i - b_i)\, F\left(b^{-1}(b_i)\right)^{N-1}$$

Para encontrar a condição de primeira ordem, devemos usar a regra do produto, a regra da cadeia e a derivada da função inversa:

CPO:

$$(s_i - b_i) \cdot (n-1) \cdot F^{N-2}\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot f\left(b^{-1}(b_i)\right) \cdot \frac{1}{b'\left(b^{-1}(b_i)\right)} - F^{N-1}\left(b^{-1}(b_i)\right) = 0$$

Note então que $b^{-1}(b_i) = s_i$. Buscamos então um equilíbrio simétrico, pois $b_i(s_i) = b(s_i)\ \forall i$, em que o subscrito i não é explicitado apenas por simplicidade:

$$(s - b) \cdot (n-1) \cdot F^{N-2}(s) \cdot f(s) \cdot \frac{1}{b'(s)} = F^{N-1}(s)$$

Podemos reescrever essa expressão como:

$$(s - b) \cdot (n-1) \cdot F^{N-2}(s) \cdot f(s) \cdot = b'(s)\, F^{N-1}(s)$$

E portanto:

$$s \cdot (n-1) \cdot F^{N-2}(s) \cdot f(s) = b'(s)\, F^{N-1}(s) + b\,(n-1) \cdot F^{N-2}(s) \cdot f(s)$$

Essa é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Note que o lado direito da equação é simplesmente a derivada $\frac{db(s)F^{N-1}(s)}{ds}$. Logo, trocando os lados da equação, obtemos:

$$\frac{db\left(s\right)F^{N-1}\left(s\right)}{ds} = s\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(s\right)\cdot f\left(s\right)$$

Podemos então escrever:

$$db\left(s\right)F^{N-1}\left(s\right) = s\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(s\right)\cdot f\left(s\right)ds$$

Integramos então dos dois lados entre $\underline{s}$ e s (temos então que substituir a variável de integração por uma dummy qualquer $\tilde{s}$):

$$\int_{\underline{s}}^{s} db\left(\tilde{s}\right)F^{N-1}\left(\tilde{s}\right) = \int_{\underline{s}}^{s} \tilde{s}\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}$$

O lado esquerdo se torna:

$$b\left(\tilde{s}\right)F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)\Big|_{\underline{s}}^{s} = b\left(s\right)F^{N-1}\left(s\right) - b\left(\underline{s}\right)F^{N-1}\left(\underline{s}\right)$$

O último termo do lado direito é igual a zero, pois $F\left(\underline{s}\right)=0$: a distribuição é zero no limite inferior (veja acima a definição da distribuição). Então:

$$b\left(s\right)F^{N-1}\left(s\right) = \int_{\underline{s}}^{s} \tilde{s}\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}$$

$$b\left(s\right) = \frac{\int_{\underline{s}}^{s} \tilde{s}\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}}{F^{N-1}\left(s\right)}$$

É possível provar que essa expressão é crescente em s: quanto maior a valoração, maior o lance, como suposto ($b'>0$). Prova-se ainda que o lado direito é igual a $E\left[s^{(2)}/s=s^{(1)}\right]$, o valor esperado da segunda maior valoração ($s^{(2)}$) condicional ao jogador ter a valoração mais alta ($s=s^{(1)}$), e portanto ser o vencedor do leilão (se o jogador supuser que não tem a valoração mais alta, ele nem participa do leilão). Ou seja, o lance vencedor é exatamente o valor esperado da segunda maior valoração: o jogador tenta vencer dando o menor lance possível.

Podemos ainda integrar o numerador dessa última expressão por partes para obter uma relação mais clara entre o lance $b\left(s\right)$ e a valoração s.[1]

$$\int_{\underline{s}}^{s} \tilde{s}\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s} = \tilde{s}\cdot F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)\Big|_{\underline{s}}^{s} - \int_{\underline{s}}^{s} F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s} = s\cdot F^{N-1}\left(s\right) - \underline{s}\cdot\underbrace{F^{N-1}\left(\underline{s}\right)}_{0} - \int_{\underline{s}}^{s} F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}$$

Temos então:

$$b\left(s\right) = \frac{\int_{\underline{s}}^{s} \tilde{s}\cdot\left(n-1\right)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}}{F^{N-1}\left(s\right)} = \frac{s\cdot F^{N-1}\left(s\right) - -\int_{\underline{s}}^{s} F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}}{F^{N-1}\left(s\right)}$$

Ou seja:

$$b\left(s\right) = s - \frac{\int_{\underline{s}}^{s} F^{N-1}\left(\tilde{s}\right)d\tilde{s}}{F^{N-1}\left(s\right)}$$

O lance $b\left(s\right)$ é igual à valoração s menos um termo estritamente positivo: como dito, o jogador tenta ganhar o leilão com o menor lance possível.

[1] Integral por partes: $\int_a^b f(\tilde{s})g'(\tilde{s})d\tilde{s} = f(\tilde{s})g(\tilde{s})\mid_a^b - \int_a^b f'(\tilde{s})g(\tilde{s})d\tilde{s}$. Faça $f(\tilde{s})=\tilde{s}$ e $g'(\tilde{s})=(n-1)\cdot F^{N-2}\left(\tilde{s}\right)\cdot f\left(\tilde{s}\right)$, notando então que $g(x)=F(\tilde{s})^{N-1}$.

Leilão de Segundo Preço.

Nesse caso, é possível provar que existe um equilíbrio (há outros) em que $b_i(s_i) = s_i$ para todo jogador i: dar como lance a própria valoração é uma estratégia fracamente dominante. Considere as alternativas:

i. $\hat{b} > b_i, s_i$: o payoff de $b_i = s_i$ é igual a zero pois o jogador perde o leilão.

ii. $b_i > \hat{b} > s_i$: payoff negativo $s_i - \hat{b}$, e há incentivo a desviar para $b_i = s_i$ e obter payoff zero.

iii. $b_i, s_i > \hat{b}$: o jogador ganha o bem e tem payoff $s_i - \hat{b}$ para $b_i = s_i$ ou $b_i \neq s_i$: não há incentivo ao desvio a partir de $b_i = s_i$.

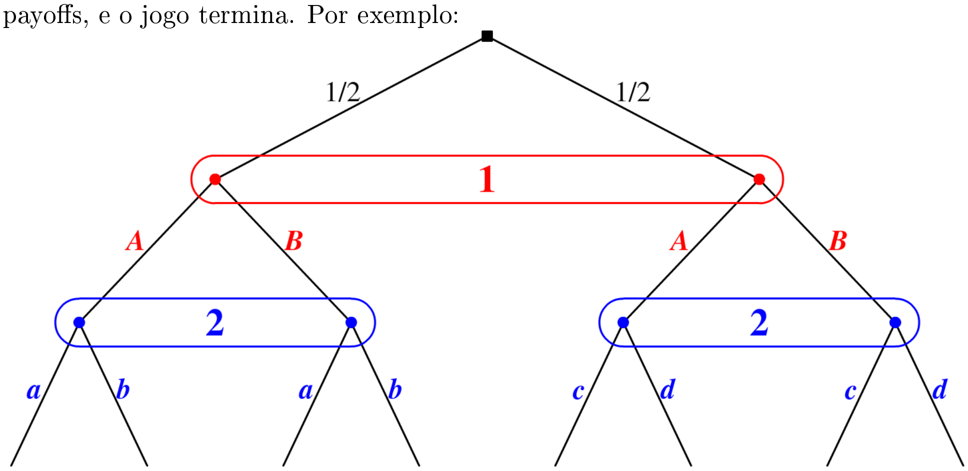
É possível provar que os leilões de primeiro e segundo preço geram a mesma receita esperada para o leiloeiro. O leilão de primeiro preço gera lances menores mas pagamentos maiores, dado o lance. O leilão de segundo preço faz o contrário: lances mais altos mas pagamentos menores, dados os lances. Os dois efeitos se cancelam exatamente: a receita esperada é a mesma.

Exercício. Encontre os lances ótimos nos leilões de primeiro e segundo preço com distribuição de tipos for uniforme no intervalo $[0,1]$. O que ocorre se $N = 2$? E se $N \to \infty$? Interprete.

Indicação de resposta: basta substituir a densidade $f(x) = 1$ e a distribuição $F(x) = x$ nos resultados encontrados anteriormente.

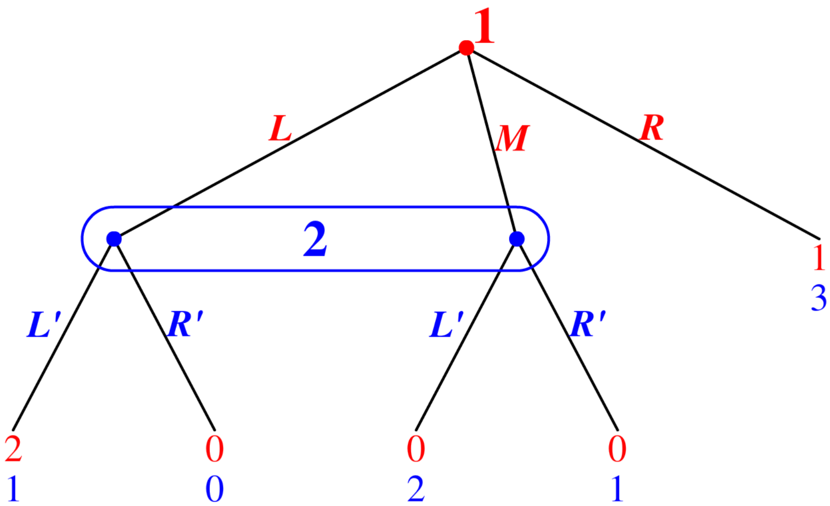
Representação de Jogos de Informação Incompleta como Jogos de Informação Imperfeita

Estamos supondo implicitamente que os jogos de informação incompleta admitem a seguinte representação. Há um jogador adicional ("natureza") que joga antes de todos, e sua jogada é escolher os tipos dos jogadores; cada jogador observa seu próprio tipo, mas não o dos demais. Depois os jogadores escolhem suas ações simultaneamente, recebem os payoffs, e o jogo termina. Por exemplo:



2 Jogos Dinâmicos de Informação Incompleta

Para esse tipo de jogo, é necessário desenvolver uma noção de equilíbrio que elimine ameaças não-críveis, assim como nos jogos dinâmicos de informação completa. O conceito de perfeição em subjogos, porém, é insuficiente, como ilustrado no exemplo abaixo.



A forma normal desse jogo é a seguinte.

$Jog.1/Jog.2$	L'	R'
L	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
M	$0, 2$	$0, 1$
R	$1, 3$	$\underline{1}, \underline{3}$

Os equilíbrios de Nash são (L, L') e (R, R'). Todavia, há um problema com o equilíbrio (R, R'): envolve uma ameaça não-crível. Caso o jogador 2 possa jogar (ou seja, caso o jogador 1 escolha L ou M), então o jogador 2 necessariamente vai preferir jogar L' a R'. Se o jogador 1 tiver jogado L, o jogador 2 prefere jogar L' e ficar com 1 a jogar R' e ficar com zero. Se o jogador 1 tiver jogado M, o jogador 2 prefere novamente jogar L' e ficar com 2 a jogar R' e ficar com 1. Em qualquer hipótese, o jogador 2 prefere L' se for chamado a jogar, e portanto R' é uma ameaça não-crível.

A princípio, podemos tentar resolver esse problema como a ideia de perfeição em subjogos - ou seja, devemos buscar equilíbrios de Nash do jogo que induzam um equilíbrio de Nash em cada subjogo, o que impõe racionalidade sequencial e evita ameaças não-críveis. Esse método, porém, não é útil nesse exemplo, pois o único subjogo é o jogo inteiro. Logo, todo equilíbrio de Nash é perfeito em subjogos.

Precisamos então impor alguns requisitos adicionais para evitar ameaças não-críveis:

1- Cada jogador deve ter uma distribuição de probabilidade em cada conjunto de informação (ou seja, deve atribuir uma probabilidade para cada nó no conjunto).

2- As estratégias devem ser sequencialmente ótimas *dadas* as probabilidades.

No exemplo acima, vamos supor que, quando o jogador 2 é chamado a jogar, ele atribui uma probabilidade p a estar no nó da esquerda (ou seja, probabilidade p de que o jogador 1 escolheu L) e uma probabilidade $1-p$ a estar no nó da direita desse conjunto informacional. Podemos então montar a utilidade esperada do jogador 2 para cada estratégia (L' ou R') em função *da probabilidade* p:

$$U_2^e(L'/p) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 2 = 2 - p$$

$$U_2^e(R'/p) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 = 1 - p$$

Concluímos então que o jogador 2 prefere jogar L' a R' para todo valor de p, pois $\forall p \in [0,1], U_2^e(L'/p) > U_2^e(R'/p)$. Logo, o equilíbrio (R, R') não atende aos requisitos 1 e 2 acima.

Resta ainda a questão sobre que distribuições de probabilidade são adequadas - no exemplo anterior, isso não era relevante porque o jogador 2 preferia a mesma estratégia independente da probabilidade. De forma geral, porém, estratégias pouco atraentes para o jogador podem ser artificialmente sustentadas com distribuições de probabilidade pouco razoáveis. Para evitar esse problema, definimos inicialmente um caminho de equilíbrio em jogos dinâmicos de informação imperfeita.

Definição. Caminho de equilíbrio inclui todos os caminhos de equilíbrio (unitários ou não) atingidos com probabilidade estritamente positiva, dadas as estratégias do equilíbrio.

Ou seja, a probabilidade de atingir um nó fora do caminho de equilíbrio é igual a zero. Impomos então o terceiro requerimento:

3- para todo conjunto de informação no caminho de equilíbrio, as probabilidades são calculados de acordo com a regra de Bayes.

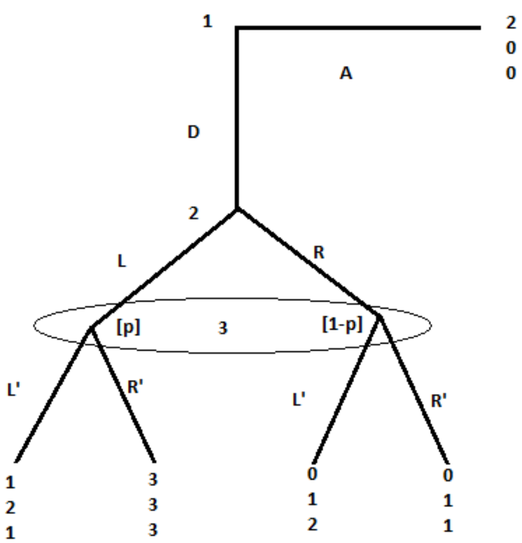
No exemplo anterior, a distribuição $p = 1$, $1 - p = 0$ atende a esse requisito. De forma geral, a distribuição de probabilidade é tão importante quanto a estratégia, e deve ser restrita por otimalidade.

Às vezes, é necessário adicionar um quarto requisito.

4- Fora do caminho de equilíbrio, a distribuição de probabilidades é determinada pela regra de Bayes sempre que possível. (Ou seja, quando não houver denominador igual a zero.)

Definição. Equilíbrio Bayesiano Perfetito é um perfil de estratégias que atende aos quatro requisitos acima.

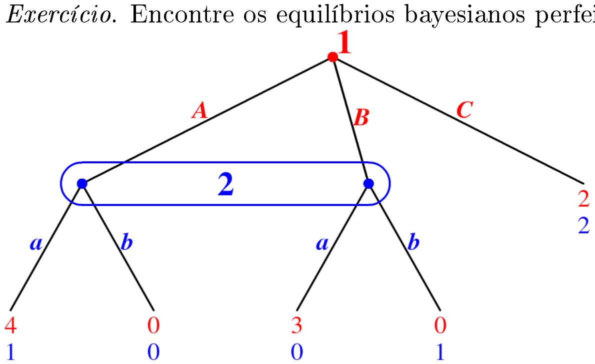
Exemplo:

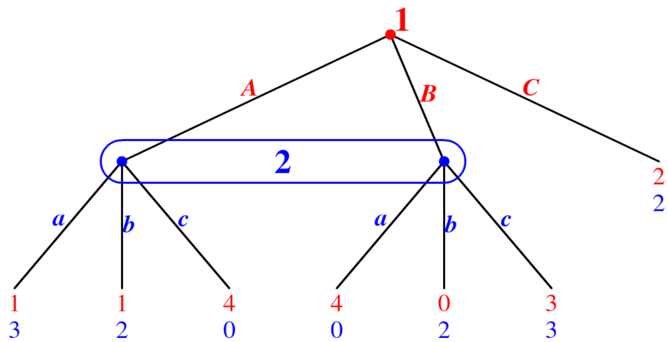


O subjogo que começa no nó de decisão do jogador 2 possui apenas um equilíbrio de Nash (L, R'). Logo, Podemos calcular o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos: (D, L, R'). Fazendo $p = 1$, então esse também é um equilíbrio bayesiano perfeito: note que o requerimento 4 é atendido.

Considere agora o perfil de estratégias (A, L, L') e a probabilidade $p = 0$.Dada essa probabilidade, as estratégias são ótimas, e os requisitos 1, 2 e 3 são atendidos. Porém, a probabilidade $p = 0$ é inconsistente, e portando o requisito 4 é violado: se o próprio equilíbrio prevê que o jogador 2 jogue L, então o jogador 3 deve atribuir probabilidade um de estar no nó da esquerda - ou seja, deve fazer $p = 1$.

Exercício. Encontre os equilíbrios bayesianos perfeitos dos jogos abaixo.




1
A
B
C
2
2
2
a
b
c
a
b
c
1
3
1
2
4
0
4
0
0
2
3
3