

Álgebra Linear: Teoria e prática ANPEC.

Rolando Gárciga Otero

26 de outubro de 2021

Sumário

1	Geometria no \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ...: Espaços Euclidianos.	7
1.1	Soma	8
1.2	Multiplicação por escalar	9
1.3	Produto interno Euclidiano	10
1.3.1	Norma Euclidiana	11
1.3.2	Distância Euclidiana	14
1.4	Equações da reta	15
1.4.1	Posição relativa entre retas no plano	16
1.4.2	Projeção ortogonal	17
1.5	Equações do plano	18
1.5.1	Equação geral do plano	19
1.5.2	Posição relativa entre planos no \mathbb{R}^3	22
1.5.3	Retas e planos no \mathbb{R}^n , $n > 2$ e $n > 3$ respectivamente.	23
1.6	Cônicas no plano.	24
1.7	Exercícios: Geometria Analítica.	27
1.7.1	Espaços Euclidianos.	27
1.7.2	Equações da reta.	29
1.7.3	Equações do Plano.	31
1.7.4	Cônicas	33
1.7.5	Questões da ANPEC	33
1.8	Gabarito: Geometria Analítica.	34
2	Matrizes e Sistemas de Equações Lineares	73
2.1	Conceito de matriz e classificação básica	73
2.2	Álgebra de matrizes	75
2.3	Transposição de matrizes	77
2.4	Produto de matrizes	77
2.5	Traço	79
2.6	Sistemas de Equações Lineares	80
2.6.1	Método de Eliminação Gaussiana	82
2.6.2	Sistemas homogêneos	86

2.7	Exercícios: Matrizes e S.E. Lineares.	88
2.7.1	Matrizes: introdução.	88
2.7.2	Sistemas de Equações Lineares.	89
2.7.3	Modelo Keynesiano de renda nacional.	91
2.7.4	Equilíbrio geral de mercado.	92
2.7.5	Questões da ANPEC	92
2.8	Gabarito: Matrizes e S.E. Lineares.	93
3	Determinante	105
3.1	Propriedades elementares do determinante.	107
3.2	Posto via determinante.	111
3.3	Matriz inversa	113
3.4	Regra da Cramer	115
3.5	Volume via determinante	117
3.6	Exercícios: Determinante e suas aplicações.	121
3.6.1	Propriedades básicas do determinante	121
3.6.2	A matriz inversa	123
3.6.3	Regra de Cramer	123
3.6.4	Posto via Determinante	124
3.6.5	Volume via Determinante	124
3.6.6	Questões da ANPEC	124
3.7	Gabarito: Determinante e suas aplicações.	125
4	Espaços Vetoriais Reais	145
4.1	Subespaços vetoriais	147
4.2	Independência/dependência linear	153
4.3	Base e dimensão	157
4.3.1	Uma aplicação em Equações diferenciais lineares	162
4.4	Mudança de base	163
4.5	Exercícios: Espaços vetoriais.	166
4.5.1	Coordenadas de um vetor e mudança de base	169
4.5.2	Questões da ANPEC	170
4.6	Gabarito: Espaços vetoriais.	171
4.6.1	Coordenadas de um vetor e mudança de base	175
4.6.2	Questões da ANPEC	176
5	Transformações Lineares	181
5.1	Núcleo e imagem	183
5.2	Matriz de representação	186
5.3	Operadores lineares: autovalores e autovetores	189
5.3.1	Diagonalização	191

5.3.2	Polinômio minimal	195
5.4	Exercícios: Transformações lineares.	199
5.4.1	Autovalores e autovetores.	201
5.4.2	Diagonalização.	202
5.4.3	Questões da ANPEC	204
5.5	Gabarito: Transformações lineares.	205
5.5.1	Autovalores e autovetores.	211
5.5.2	Diagonalização.	214
5.5.3	Questões da ANPEC	220
6	Espaços vetoriais com produto interno	251
6.1	Transformações autoadjuntas	255
6.2	Transformações ortogonais	258
6.3	Exercícios: Espaços Vetoriais com Produto Interno.	261
6.3.1	Questões da ANPEC	263
6.4	Gabarito: Espaços Vetoriais com Produto Interno.	264
6.4.1	Questões da ANPEC	268
7	Formas Quadráticas.	283
7.1	Formas Quadráticas em \mathbb{R}^n	285
7.1.1	Classificação	285
7.1.2	Menores principais de uma matriz	287
7.2	Exercícios: Formas Quadráticas.	290
7.2.1	Questões da ANPEC	290
7.3	Gabarito: Formas Quadráticas.	291
7.3.1	Questões da ANPEC	291

Capítulo 1

Geometria no \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \dots : Espaços Euclidianos.

Se \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais então $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais que identificamos geometricamente como o plano Cartesiano. De forma análoga, \mathbb{R}^3 representa o conjunto das ternas de números reais e assim sucessivamente para $n \in \mathbb{N}$ fixado

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Cada n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais pode ser associada ao segmento de reta que liga a origem $O = (0, \dots, 0)$ ao ponto x com uma seta sobre x para especificar o sentido do movimento nessa direção linear da origem até x . Dita direção orientada é também chamada de vetor e representada por \vec{x} , ou OX ou simplesmente x .

Exemplo 1.1. $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 1)$ são elementos de \mathbb{R}^2 (pares ordenados de números reais) e, por sua vez, representam vetores no plano (Vide Figura 1.1). Para movimentarmos de P até Q ao longo do caminho mais curto deveremos escolher o segmento de reta que liga esses dois pontos e no sentido de Q , ou seja, teremos de escolher direção, sentido e comprimento de um movimento linear: um vetor, que chamamos de \vec{PQ} . Observe então que dito movimento é de duas unidades positivas na horizontal e, uma negativa na vertical. De modo que poderíamos identificar \vec{PQ} com $(2, -1)$ ou também $(3 - 1, 1 - 2) = \text{“Q-P”}$, embora sejam segmentos de reta diferentes; diz-se que são vetores *equipolentes*: mesmo comprimento, sentido e direção. Essa operação de subtração justifica-se na seguinte álgebra de vetores passível de ser trabalhada em \mathbb{R}^n .

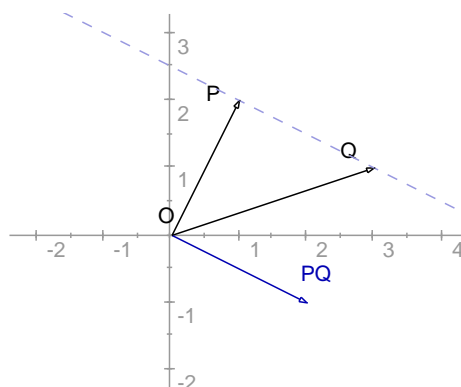


Figura 1.1: Vetores P, Q e PQ

1.1 Soma

Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n definimos a soma de x e y , denotada $x + y$, como sendo o vetor (ou n -upla)

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1)$$

Exemplo 1.2. Voltando ao caso de \mathbb{R}^2 e aos vetores $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 1)$, temos

$$P + Q = (1 + 3, 2 + 1) = (4, 3), \quad P + O = (1 + 0, 2 + 0) = P, \quad P + (-1, -2) = O.$$

Podemos então resumir as propriedades básicas da operação binária e fechada soma em \mathbb{R}^n começando pela identificação geométrica do vetor soma como a diagonal principal do paralelogramo gerado pelos vetores (Vide Figura 1.2) e seguindo pelas propriedades imediatas decorrentes da definição.

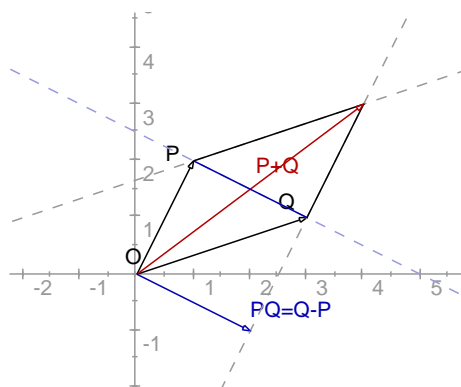


Figura 1.2: Soma e diferença dos vetores P e Q

Proposição 1.3. *Dados os vetores $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ temos*

1. $x + y = y + x$ (Comutativa).
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Associativa).
3. $x + O = O + x = x$ onde $O = (0, \dots, 0)$ (\exists neutro).
4. Existe inverso aditivo de x , denotado $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$, tal que $x + (-x) = O$.

Definição 1.4. Dados os vetores u e v em \mathbb{R}^n o vetor diferença (ou subtração) $u - v$, é definido como o vetor soma de u com o inverso aditivo de v , $-v$. Geometricamente corresponde à outra diagonal do paralelogramo trasladada até a origem (Vide Figura 1.2).

1.2 Multiplicação por escalar

Dados o vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e o número real α , a multiplicação do escalar α pelo vetor x é o vetor definido e denotado por

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Exemplo 1.5. Considere $x = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ então (Vide Figura 1.3)

$$2 \cdot x = (4, 2), \quad 1 \cdot x = x, \quad (-1) \cdot x = (-2, -1) = -x.$$

Desse modo, dados o vetor $x \neq O$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot x$ preserva a direção de x a menos que $\alpha = 0$ (fala-se em vetores *paralelos* ou *co-lineares*); preserva o sentido quando $\alpha > 0$; troca o sentido quando $\alpha < 0$; preserva o comprimento de x quando $\alpha = \pm 1$, em particular $(-1) \cdot x$ é o inverso aditivo de x ; e, amplia ou contrai o vetor x dependendo de $|\alpha| > 1$ ou $|\alpha| < 1$ respectivamente.

Proposição 1.6. *Dados os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos*

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
2. $1 \cdot x = x$.
3. $0 \cdot x = O$ onde $O = (0, \dots, 0)$.
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ e $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (propriedades distributivas).

A estrutura algébrica gerada em \mathbb{R}^n com estas operações $+$, \cdot é um caso particular do tipo de estrutura algébrica conhecida como espaço vetorial. Mais adiante definiremos formalmente este tipo de estruturas.

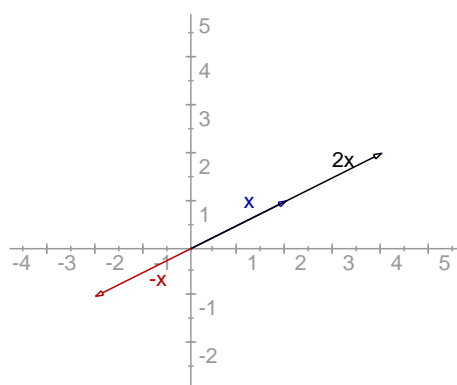


Figura 1.3: Multiplicação por escalar

1.3 Produto interno Euclidiano

Vejam os a seguir um outro tipo de produto em \mathbb{R}^n chamado de produto interno (ou produto escalar).

Definição 1.7. Dados os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno entre x e y como sendo o número real $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Este número será denotado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Notações: dentre $\langle x, y \rangle$, (x, y) , $x \cdot y$, $x'y$ etc, damos preferência à $\langle x, y \rangle$ para não confundir dito produto com um par ordenado ou produto numérico etc.

Exemplo 1.8. Considere os vetores $x = (4, -1, 2)$ e $y = (6, 3, -4)$ em \mathbb{R}^3 . Então

$$\langle x, y \rangle = 4 \cdot 6 + (-1)3 + 2(-4) = 24 - 3 - 8 = 13.$$

Proposição 1.9. A relação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associa o valor $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ é uma função que verifica as seguintes propriedades:

1. *Bilinear.* Ou seja, fixado $u \in \mathbb{R}^n$ a função $\langle u, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e, fixado $v \in \mathbb{R}^n$, a função $\langle \cdot, v \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ também é linear. Entenda-se que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle \quad \text{e} \quad \langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle.$$

2. *Simétrica:* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

3. Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então $\langle x, x \rangle = x_1x_1 + x_2x_2 + \dots + x_nx_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.
Consequentemente,

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{e} \quad (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = O).$$

1.3.1 Norma Euclideana

A partir da propriedade descrita no item 3 da proposição acima podemos definir a função conhecida como norma Euclideana.

Definição 1.10. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a norma Euclideana de x é o número real

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Em particular, em \mathbb{R}^2 , se $x = (x_1, x_2)$ então, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; que, pelo Teorema de Pitágoras, corresponde ao comprimento de segmento de reta que liga a origem ao ponto x , ou seja, o comprimento de vetor x . Logo, da definição decorrem as seguintes propriedades da função norma.

Proposição 1.11. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = O$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demonstração. Da definição de norma Euclideana tem-se

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \Leftrightarrow x = O.$$

Além disso,

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

A propriedade (3) da norma Euclideana, devida a Minkowsky, é conhecida como *desigualdade triangular* posto que num triângulo qualquer de lados \vec{x} , \vec{y} e $\vec{x + y}$ o comprimento de um dos seus lados, digamos o do lado $\vec{x + y}$, $\|x + y\|$, não ultrapassa a soma dos comprimentos dos outros dois lados, $\|x\| + \|y\|$ (consulte a Figura 1.4). Provaremos formalmente esta propriedade após a apresentação da desigualdade de Cauchy-Schwartz na Observação 1.17. \square

Definindo o ângulo entre dois vetores como o menor ângulo entre eles; lembre que ângulo é comprimento de arco encima do círculo trigonométrico orientado positivamente no sentido anti-horário (vide Figura 1.5), podemos estabelecer a seguinte propriedade geométrica do produto interno.

Teorema 1.12. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e θ o ângulo entre eles. Então

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta).$$

Demonstração. Desenvolvida a seguir até a Observação 1.16.

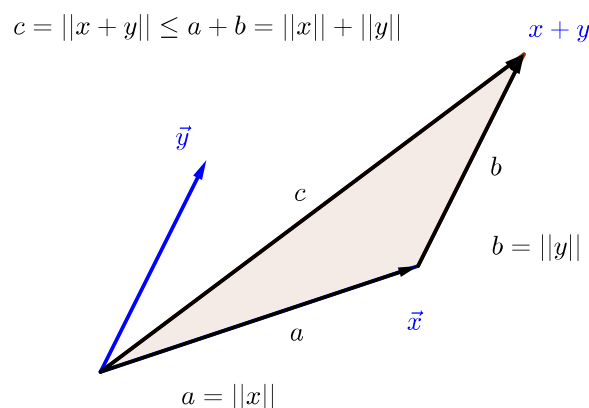


Figura 1.4: Desigualdade Triangular.

Exemplo 1.13. Sejam $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ em \mathbb{R}^2 . Então

$$\langle u, v \rangle = 1(0) + 0(1) = 0, \quad \|u\| = \sqrt{1+0} = 1, \quad \|v\| = \sqrt{0+1} = 1 \implies$$

$$0 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) = \cos(\theta) \implies \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ou seja, o menor ângulo entre estes vetores, orientado positivamente no sentido anti-horário, é $\theta = \pi/2$. Neste caso dizemos que u e v são *ortogonais*.

Exemplo 1.14. Sejam $u = (1, 0)$ e $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ em \mathbb{R}^2 . Então

$$\langle u, v \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|u\| = 1 = \|v\| \implies \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\theta).$$

Logo, o menor ângulo entre estes vetores, orientado positivamente no sentido anti-horário, é $\theta = \pi/4$. Note que a norma destes vetores é um (1). Quando a norma de um vetor é igual a um diz-se que é um vetor *unitário*.

Proposição 1.15. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ ou $\|x\| = 0$ ou $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$ é unitário.

Demonstração. Supondo que $x \neq O$, tem-se $c := \frac{1}{\|x\|} \in \mathbb{R}$ e

$$\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

□

Observação 1.16. Supondo $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e θ o ângulo entre eles. Então

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \langle x, y \rangle = \left\langle \frac{1}{\|x\|} x, \frac{1}{\|y\|} y \right\rangle,$$

onde a última igualdade decorre da bilinearidade do produto interno. Assim, o Teorema 1.12 pode ser enunciado, equivalentemente, da seguinte forma: se u e v são vetores unitários então $\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$ (consulte a Figura 1.5). Ora, rotacionando o sistema de coordenadas se necessário pode-se supor que $u = (1, 0)$ e, conseqüentemente, v é o vetor sobre o círculo trigonométrico de coordenadas $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ (consulte a Figura 1.6); assim,

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = \langle (\cos(\theta), \sin(\theta)), (1, 0) \rangle = \cos(\theta) \cdot 1 + \sin(\theta) \cdot 0 = \cos\theta$$

o que fecha a demonstração do Teorema 1.12.

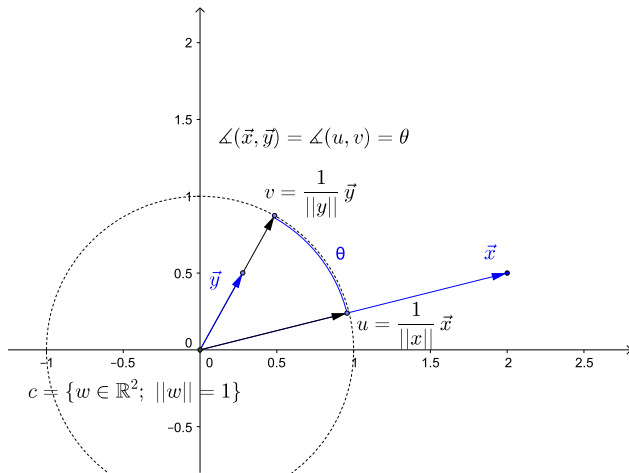


Figura 1.5: Ângulo entre \vec{x} e \vec{y} .

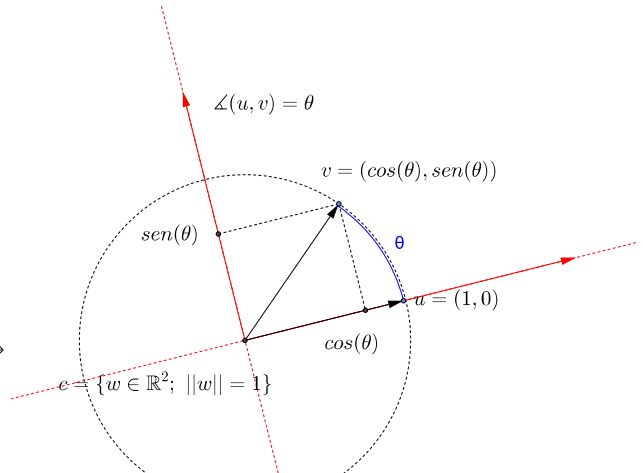


Figura 1.6: Ângulo entre u e v .

□

Note que qualquer que seja θ , $|\cos(\theta)| \leq 1$. Então, a partir de Teorema 1.12 obtemos a desigualdade

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \tag{1.2}$$

que é um caso particular da desigualdade de Cauchy-Schwartz. Observe que a igualdade se verifica apenas no caso em que $|\cos(\theta)| = 1$; ou seja, quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, correspondendo ao caso dos vetores serem co-lineares.

Observação 1.17. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a bilinearidade e simetria do produto interno e a definição de norma Euclideana obtém-se

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

e tirando a raiz quadrada obtém-se a desigualdade triangular. \square

1.3.2 Distância Euclideana

Um vez definida a norma Euclideana podemos estabelecer a distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ como sendo o comprimento (ou norma) do vetor diferença, ou seja, o comprimento do segmento de reta que liga esses dois pontos:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1.3)$$

Exemplo 1.18 ($n=1$). Dados $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x \geq y \\ y - x, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

Exemplo 1.19 ($n=2$). Dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo de lados de comprimento $|x_1 - y_1|$ e $|x_2 - y_2|$. Vide Figura 1.7.

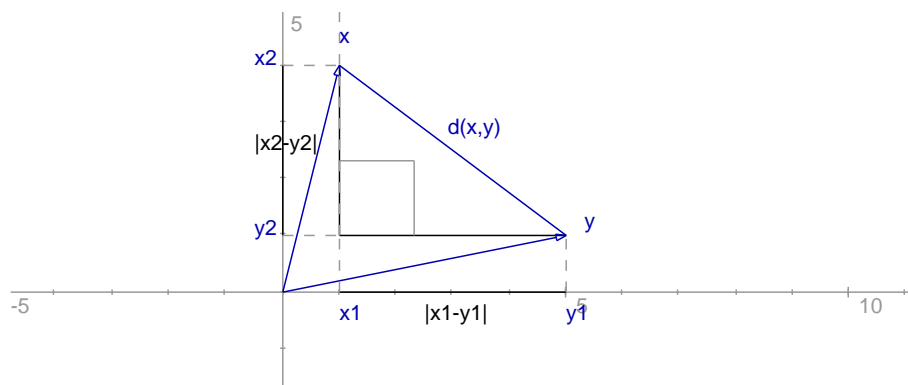


Figura 1.7: Distância Euclideana.

Exemplo 1.20. Para ilustrar numericamente

$$d((1, 2), (3, 4)) = \|(1, 2) - (3, 4)\| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}.$$

$$d((1, 2, 0), (-1, 2, 0)) = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 0 + 0} = 2.$$

$$d(1, 2), O) = \|(1, 2) - (0, 0)\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Decorrem da definição (1.3) as seguintes propriedades.

Proposição 1.21. A distância Euclidiana $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $(d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$).
2. $d(x, y) = d(y, x)$, (simétrica).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (desigualdade triangular).

1.4 Equações da reta

Dado um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ e uma direção $V \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ temos uma única reta definida pela equação (Vide Figura 1.8)

$$X = A + tV, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

O vetor V é chamado vetor diretor da reta. Fazendo $V = (v_1, v_2)$, $A = (a_1, a_2)$ e $X = (x, y)$

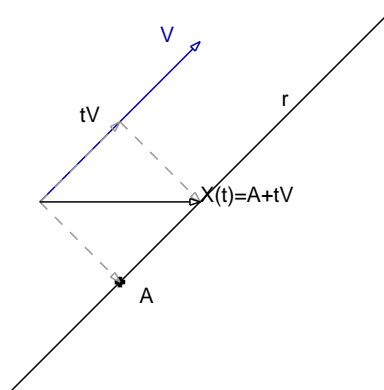


Figura 1.8: Equação vetorial da reta.

temos

$$X \in r = \{A + tV \mid t \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2) = (a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

conhecida como equação paramétrica da reta que passa pelo ponto A com vetor diretor V . Observe ainda que no caso em que $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, dita equação pode ser re-escrita na forma (dita simétrica ou simplificada)

$$t = \frac{x - a_1}{v_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{y - a_2}{v_2} \Leftrightarrow \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

que por sua vez equivale a

$$y = \left(\frac{v_2}{v_1} \right) (x - a_1) + a_2. \quad (1.5)$$

Ou seja, identificamos a reta r com o gráfico da função afim (1.5) que possui coeficiente angular (ou inclinação) $\frac{v_2}{v_1}$ (vide Figura 1.9).

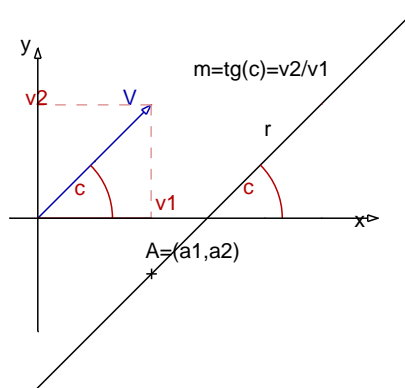


Figura 1.9: A reta r é o gráfico $y = m(x - a_1) + a_2$.

Exercício. Represente graficamente a reta descrita pela equação $y = x$. Descreva equações vetoriais e paramétricas para dita reta.

Exercício. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A = (0, 1)$ com vetor diretor $V = (1, 0)$. Descreva uma equação paramétrica para dita reta. Obtenha a equação na forma simétrica (ou simplificada).

1.4.1 Posição relativa entre retas no plano

Considere as retas r e s passando pelos pontos A e B respectivamente e com vetores diretores V e U respectivamente, descritas pelas suas equações vetoriais

$$\begin{aligned} r : \quad X &= A + tV, & t &\in \mathbb{R} \\ s : \quad Y &= B + \mu U, & \mu &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então temos as seguintes situações (excludentes) possíveis:

1. Concorrentes: retas não paralelas que se cruzam num único ponto. Ou seja, os vetores diretores não são co-lineares. Entenda-se:

$$\nexists \alpha \in \mathbb{R}; V = \alpha U.$$

2. Paralelas: $\exists \alpha \in \mathbb{R}; V = \alpha U$.

(a) Iguais (ou coincidentes) : $A \in s$.

(b) Diferentes: $A \notin s$.

Exercício. Determine a posição relativa entre as retas $y = 1$ e $y = x$.

Exercício. Descreva as construções análogas para representar as retas em \mathbb{R}^3 . Ou seja, as equações vetoriais, paramétrica e simplificada da reta que passa pelo ponto $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ com vetor diretor $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

1.4.2 Projeção ortogonal

Seja $r = \{t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, uma reta contendo a origem com vetor diretor v , e suponha que $u \in \mathbb{R}^2$ é um vetor qualquer do plano. Considere então o problema de achar aquele ponto w da reta r que esteja à distância mínima do ponto u (consulte a Figura 1.10). A condição da distância mínima implica que o vetor $wu = u - w$ seja ortogonal ao vetor v ,

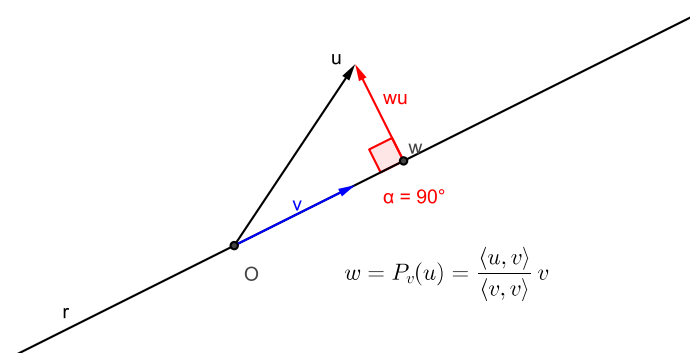


Figura 1.10: Projeção ortogonal.

ou seja,

$$0 = \langle u - w, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle w, v \rangle \implies \langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Por outro lado, $w \in \mathbb{R}$ implica $w = t^*v$ para algum $t^* \in \mathbb{R}$; assim,

$$\langle u, v \rangle = \langle t^*v, v \rangle = t^* \langle v, v \rangle \implies t^* = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Finalmente, w , usualmente denotado $P_v(u)$, verifica

$$w := P_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v.$$

Exemplo 1.22. Determine a projeção ortogonal de $u = (2, 3)$ sobre a reta suporte do vetor $v = (2, 1)$.

Solução. Note que $\langle v, v \rangle = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$ e $\langle u, v \rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$; logo, aplicando a fórmula acima,

$$P_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = \frac{7}{5} \cdot (2, 1).$$

1.5 Equações do plano

Sejam U e V vetores não nulos de \mathbb{R}^3 não co-lineares. O plano gerado por U e V e que passa pela origem O é o conjunto dos pontos:

$$X = tU + sV, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

No caso geral, ou seja quando o plano passa por um ponto A fixado e possui vetores diretores U e V , a sua equação vetorial é

$$\pi : \quad X = A + tU + sV, \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Vide Figura 1.11.

Observe que fazendo $X = (x, y, z)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $V = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos $X \in \pi$ (onde π representa o plano definido em (1.6)) se, e somente se, X é descrito pelo sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3 \\ t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observação 1.23. Além da informação de um ponto contido no plano e dois vetores diretores (não nulos) e não colineares existem outras formas de identificar, de forma única, um plano. Por exemplo:

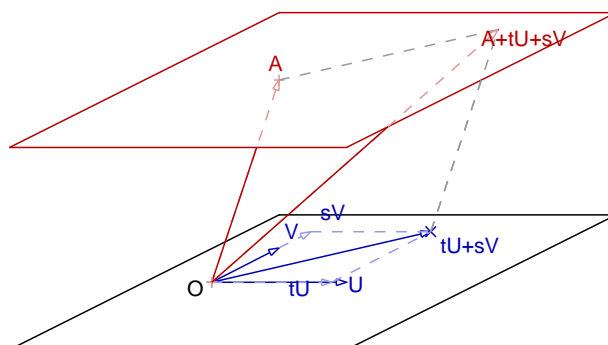


Figura 1.11: Planos gerados por U e V passando por O e por A .

1. Três pontos não co-lineares A , B e C : basta definirmos $U = \vec{AB}$, $V = \vec{AC}$ e utilizar a equação (1.6).
2. Uma reta e um ponto não contido nela. Digamos

$$r: \quad X = A + tV, \quad \text{e} \quad B \notin r.$$

Basta fazer $U = \vec{AB}$ e montar a equação (1.6) com a informação fornecida do ponto A e do vetor V .

Exercício. Ache a equação vetorial do plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Exercício. Determine equações vetoriais para os chamados planos cartesianos de \mathbb{R}^3 , i.e., os planos de equações paramétricas

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = s, \quad s \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = s, \quad s \in \mathbb{R} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

respectivamente.

1.5.1 Equação geral do plano

Um vetor N (ou reta r de vetor diretor N) é dito normal a um plano π quando for ortogonal a esse plano; ou seja,

$$\langle N, X - A \rangle = 0, \quad \forall X \in \pi, \quad (1.7)$$

em que $A \in \pi$ é um elemento qualquer do plano fixado a priori (consulte a Figura 1.12).

Escreve-se $N \perp \pi$ (ou $r \perp \pi$).

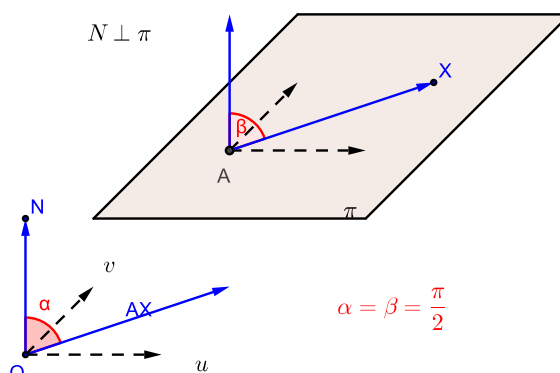


Figura 1.12: Vetor normal a um plano.

Em princípio, a condição $N \perp \pi$ está associada a um conjunto infinito de equações, uma para cada elemento $X \in \pi$, segundo a equação (1.7); contudo, conhecidos os vetores diretores de π o problema de identificar se N é ou não normal a π reduz-se a checar se N é ou não normal aos vetores diretores de π como descrito na proposição a seguir.

Proposição 1.24. *Considere o plano π que passa pelo ponto $A \in \mathbb{R}^3$ e que possui os vetores diretores U e V (não nulos e não co-lineares). O vetor $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é normal a π se, e somente se, N é normal a U e a V simultaneamente.*

Demonstração. Da equação vetorial do plano temos $X \in \pi$ se, e somente se, existirem $t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$X = A + t \cdot U + s \cdot V \quad \Leftrightarrow \quad X - A = t \cdot U + s \cdot V.$$

Por outro lado, da equação (1.7), $N \perp \pi$ se e somente se $\langle N, X - A \rangle = 0, \forall X \in \pi$; ou seja,

$$0 = \langle N, X - A \rangle = \langle N, t \cdot U + s \cdot V \rangle = t \langle N, U \rangle + s \langle N, V \rangle, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, quando $N \perp \pi$, fazendo $t = 1$ e $s = 0$ obtém-se $0 = \langle N, U \rangle$, i.e., $N \perp U$; e para $t = 0$ e $s = 1$, $N \perp V$. Reciprocamente, na hipótese $N \perp U$ e $N \perp V$ tem-se $\langle N, U \rangle = 0 = \langle N, V \rangle$ e, consequentemente

$$\langle N, X - A \rangle = t \langle N, U \rangle + s \langle N, V \rangle = t \cdot 0 + s \cdot 0 = 0, \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\langle N, X - A \rangle = 0, \quad \forall X \in \pi \Leftrightarrow N \perp \pi.$$

□

A equação (1.7) é conhecida como *equação geral* do plano que passa por A com vetor normal N e, essencialmente, estabelece que um plano em \mathbb{R}^3 corresponde ao conjunto solução de uma equação linear em três variáveis.

Teorema 1.25. *Considere o vetor $N = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.*

a) *O plano π que passa por $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e tem N como vetor normal é o conjunto solução da equação*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

b) *O conjunto solução da equação linear $ax + by + cz = d$ é um plano perpendicular ao vetor N*

Demonstração. Pro item a) lembre que $N \perp \pi$ se e somente se $\langle N, X - A \rangle = 0, \forall X \in \pi$; o que, supondo $X = (x, y, z), N = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, equivale a

$$\underbrace{\langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle}_{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0} = 0, \quad \text{para } (x, y, z) \in \pi.$$

Quanto ao item b), seja x_0, y_0, z_0 uma solução qualquer da equação linear em questão; solução que existe pois algum dos coeficientes é diferente de zero (por exemplo, supondo $c \neq 0, x_0 = 0 = y_0$ com $z_0 = d/c$ é solução). Então, $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ assim como $ax + by + cz = d$ para qualquer outra terna $X = (x, y, z)$ solução. Logo, $X = (x, y, z)$ é solução se, e somente se,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = d - d \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

O que, segundo o item a) corresponde à equação do plano que passa pela solução particular $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e tem $N = (a, b, c)$ como vetor normal. □

A partir da equação geral do plano, $ax + by + cz = d$, pode-se obter facilmente a equação vetorial do mesmo, basta determinar três soluções da equação; ou seja, identificar 3 pontos não co-lineares do plano. A recíproca, i.e., como obter a equação geral a partir da equação vetorial $X = A + tU + sV$, merece uma análise mais detalhada. Precisamos, apenas, identificar um vetor normal N ao plano, pois o ponto A é dado; pra isto basta achar, segundo a Proposição 1.24, um vetor não nulo N que seja normal a U e a V simultaneamente. Digamos, então, que $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $V = (v_1, v_2, v_3)$ são conhecidos e $N = (x, y, z)$ é um vetor não nulo tal que

$$\langle N, U \rangle = 0 = \langle N, V \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0. \end{cases}$$

Ou seja, o vetor N pode ser escolhido ao longo da reta interseção entre os planos de vetores normais U e V respectivamente (lembre que U e V não são co-lineares) que contem a origem; ou, equivalentemente, $N = (x, y, z)$ é uma solução não trivial de um sistemas com duas equações lineares homogêneo e três variáveis (necessariamente de posto 2 e nulidade 1 -vide o próximo capítulo). Uma dessas soluções é o *produto vetorial* de U e V , $U \times V$, definido a seguir:

$$U \times V := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (1.8)$$

em que $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $V = (v_1, v_2, v_3)$ (convidamos o leitor a verificar que a terna definida em (1.8), também usualmente denotada por $U \wedge V$, é, de fato, uma solução do sistema de equações).

Proposição 1.26. *Dados U e V vetores não co-lineares de \mathbb{R}^3 tem-se*

1. $U \perp (U \times V)$ e $V \perp (U \times V)$,
2. $V \times U = -(U \times V)$,
3. $\alpha(U \times V) = (\alpha U) \times V = U \times (\alpha V)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $U \times (\alpha U) = O$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
5. $U \times (V + W) = (U \times V) + (U \times W)$, $\forall W \in \mathbb{R}^3$.

Demonstração. Aplique a definição. □

Exemplo 1.27. Determine a equação geral do plano

$$\pi : \quad X = (0, 1, 0) + t(1, -1, 1) + s(0, -1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Solução. Basta calcular o vetor normal N aplicando o produto vetorial dos vetores diretores de π :

$$N = (1, -1, 1) \times (0, -1, 1) = ((-1)1 - 1(-1), 1(0) - 1(1), 1(-1) - (-1)0) = (0, -1, -1).$$

Logo, $(x, y, z) \in \pi$ se, e somente se,

$$0(x - 0) + (-1)(y - 1) + (-1)(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -y + 1 - z = 0 \Leftrightarrow y + z = 1.$$

1.5.2 Posição relativa entre planos no \mathbb{R}^3 .

Considere os planos π_1 e π_2 com equações gerais $\langle N_1, X - A \rangle = 0$ e $\langle N_2, Y - B \rangle = 0$, respectivamente, em que $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e $A, B \in \mathbb{R}^3$. Então ou os vetores normais são co-lineares, $N_2 = \alpha N_1$ para alguma $\alpha \in \mathbb{R}$, ou não são co-lineares. Se for o caso não co-linear temos planos que se intersectam numa reta; caso contrário, são planos paralelos podendo ainda serem coincidentes ou não dependendo de um dos pontos de π_1 , digamos A , ser ou não um elemento do plano π_2 ; i.e., dependendo de $\langle N_2, A - B \rangle$ ser ou não igual a zero.

1.5.3 Retas e planos no \mathbb{R}^n , $n > 2$ e $n > 3$ respectivamente.

O tratamento vetorial da equação de uma reta, trabalhado na seção 1.4, independe da dimensão do espaço \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Basta um ponto em $A \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ para identificarmos a reta r , que passa por A na direção de V , com o conjunto formado de todos os vetores ou n -uplas $X \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$X = A + t \cdot V, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda, fazendo $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X \in r$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tv_n \\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou ainda, pro caso em que $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, $X \in r$ se, e somente se,

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{v_n}.$$

No caso de planos, o tratamento natural em dimensões maiores a três se dá via a equação geral; ou seja, usando uma direção normal $N = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ e um ponto $A = (a_1, \dots, a_n)$ do plano π . Deste modo $X = (x_1, \dots, x_n) \in \pi$ se, e somente se,

$$\langle N, X - A \rangle = 0 \Leftrightarrow \nu_1(x_1 - a_1) + \dots + \nu_n(x_n - a_n) = 0.$$

Claro, que para $n = 4$ não bastariam dois vetores diretores para gerar o plano via as operações algébricas de soma e multiplicação (como é caso de um plano em \mathbb{R}^3); na verdade seriam necessários três vetores pois uma das variáveis, digamos x_4 passaria a depender de outras três variáveis livres (e não apenas duas como é caso de um plano em \mathbb{R}^3): supondo $\nu_4 \neq 0$,

$$\nu_1(x_1 - a_1) + \nu_2(x_2 - a_2) + \nu_3(x_3 - a_3) + \nu_4(x_4 - a_4) = 0 \Leftrightarrow x_4 = d + \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i,$$

para certas constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e d . De forma análoga, para $n = 5$ seriam necessários 4 vetores e assim sucessivamente. Voltaremos a este assunto com a teoria de subespaços vetoriais gerados.

Observação 1.28. Note que um plano em \mathbb{R}^n é o gráfico de uma função (afim) com $n - 1$ variáveis; logo, uma hiperfície ($n \geq 4$) (consulte, por exemplo, [3, Cap.V,Sec.13]). Em particular, “os planos” $H_{N,d} = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle N, x \rangle = d\}$, em $n \geq 4$, costumam ser chamados de *hiperplanos*.

1.6 Cônicas no plano.

Lembre que um plano π em \mathbb{R}^3 pode ser descrito na forma $\pi = \{A + xU + yV; x, y \in \mathbb{R}\}$, em que A é um elemento qualquer de π e U e V são vetores diretores desse plano; assim, π é o gráfico de uma função de duas variáveis $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi$, cuja regra $\psi(x, y) = A + xU + yV$ é a parametrização de π . Em particular, os cortes do plano com um cone pontudo devem verificar uma equação em duas variáveis e possivelmente não linear. Esses cortes dão lugar às chamadas cônicas (e suas degenerações): elipses (Figuras 1.13 e 1.14), parábolas (Figuras 1.15 e 1.16) e hipérbolas (Figuras 1.17 e 1.18).

Definição 1.29 (Cônicas). Considere em \mathbb{R}^3 um sistema ortogonal de coordenadas, um plano Π e a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Chama-se *cônica* ao conjunto dos pontos $P = (x, y) \in \Pi$ que verificam a equação acima.

Pode supor, pra simplificar, que esse plano Π é simplesmente $z = 0$ (é o cone que se mexe).

Definição 1.30. Dados um plano Π , dois pontos F_1, F_2 em dito plano, distantes $2c$ entre si e uma constante $a > c > 0$, se dá o nome de *elipse* ao conjunto dos pontos $P \in \Pi$ tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. As degenerações de uma elipse são um ponto ou vazio.

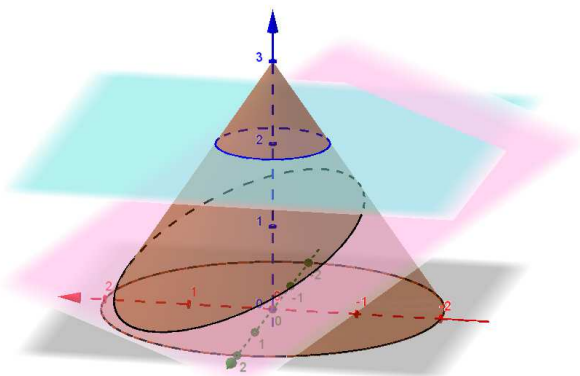


Figura 1.13: Elipses e circunferências

$$d(F_1, F_2) = 2c, \quad a > c > 0, \quad d_1 + d_2 = 2a$$

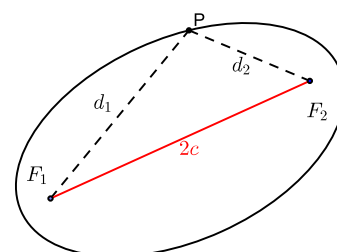


Figura 1.14: Elipse no plano

Exercício. Mostre que fazendo $P = (x, y)$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ a equação da elipse pode ser reduzida a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (0, c)$; assim, $P = (x, y)$ é um elemento da elipse se e somente se

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\ x^2 + c^2 + 2cx + y^2 &= 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - xc/a \Rightarrow \\ x^2 + c^2 - 2cx + y^2 &= a^2 + x^2c^2/a^2 - 2cx \Rightarrow \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $b^2 = a^2 - c^2$ e dividindo a última equação por b^2 obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Definição 1.31. Dados um plano Π , um ponto F , e uma reta r em dito plano, $F \notin r$, se dá o nome de *parábola* ao conjunto dos pontos $P \in \Pi$ equidistantes de F e de r , ou seja, tais que $d(P, F) = d(P, r)$. As degenerações de uma parábola são um par de retas paralelas, uma reta ou vazio.

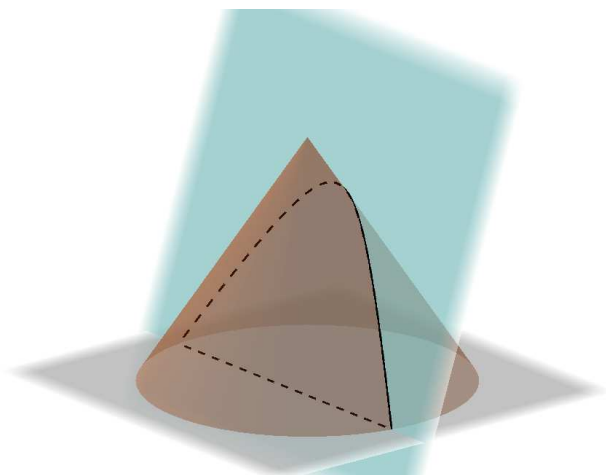


Figura 1.15: Parábola

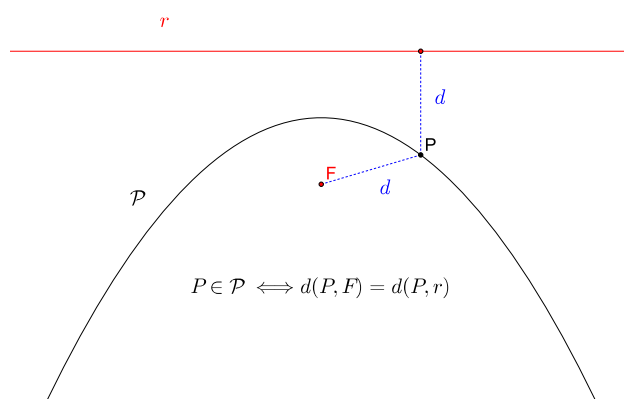


Figura 1.16: Parábola no plano

Exercício. Mostre que fazendo $P = (x, y)$ e $p = \frac{1}{2}d(F, r)$ a equação da parábola pode ser reduzida a

$$y^2 = 4px.$$

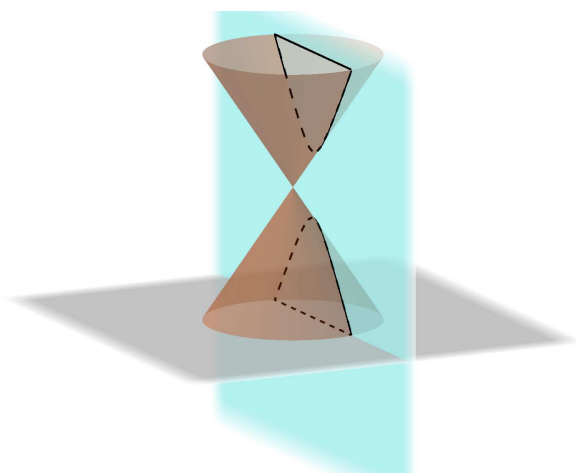


Figura 1.17: Hipérbole

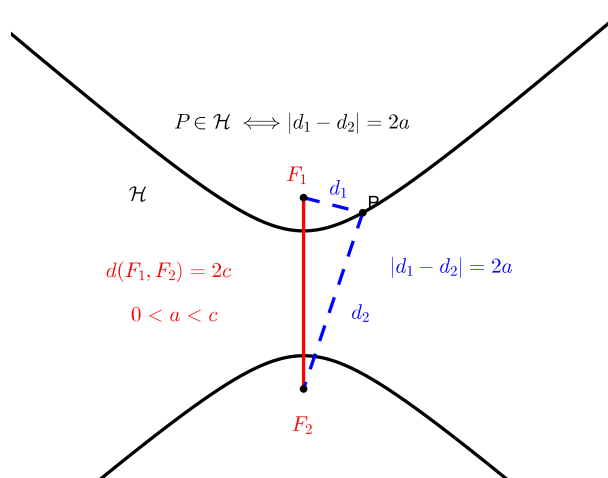


Figura 1.18: Hipérbole no plano

Definição 1.32. Dados um plano Π , dois pontos F_1, F_2 em dito plano, distantes $2c$ entre si e uma constante $0 < a < c$, se dá o nome de *hipérbole* ao conjunto dos pontos $P \in \Pi$ tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$. As degenerações de uma hipérbole são um par de retas concorrentes.

Exercício. Mostre que fazendo $P = (x, y)$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ a equação da hipérbole pode ser reduzida a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Teorema 1.33. Dada a cônica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, defina o Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Então:

1. Se $\Delta < 0$, representa uma elipse (ou suas degenerações).
2. Se $\Delta = 0$, representa uma parábola (ou suas degenerações).
3. Se $\Delta > 0$, representa uma hipérbole (ou suas degenerações).

1.7 Exercícios: Geometria Analítica.

1.7.1 Espaços Euclidianos.

Q 1.1. Efetue a translação dos eixos coordenados (x_1, x_2, x_3) da base natural para o sistema de eixos (x'_1, x'_2, x'_3) com origem em a $(1, 2, 1)$. Represente graficamente o vetor $v = (1, 3, 2)$ em ambos os sistemas do \mathbb{R}^3 .

Q 1.2. Podemos genericamente definir uma translação T no \mathbb{R}^3 como uma aplicação do \mathbb{R}^3 no \mathbb{R}^3 tal que $t(v) = v - a$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$, em que a é uma terna qualquer fixada a priori. Mostre que a soma ou a diferença de duas translações não é uma translação. Por que ?

Q 1.3. Represente P , Q , \vec{PQ} , \vec{QP} , $P + Q$, $-P$, $-Q$, $P - Q$, $2P$ e $\frac{1}{2}P$ se

- $P = (0, 0)$ e $Q = (2, -1)$.
- $P = (3, 2)$ e $Q = (1, 1)$.
- $P = (0, 1)$ e $Q = (3, 1)$.
- $P = (0, 0, 0)$ e $Q = (1, 2, 4)$.
- $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (2, 3, -1)$.

Q 1.4. Calcule $\|P - Q\|$ na Questão 1.3.

Q 1.5. Calcule $\|P\|$ e $\|Q\|$ na Questão 1.3.

Q 1.6. Dados os três pontos $A = (5, -3, 1)$, $B = (-2, 4, 3)$ e $C = (3, 1, -4)$, ache:

- Os comprimentos dos lados do triângulo ABC;
- As coordenadas dos vetores AB, BC, AC;
- As coordenadas de $AB + BC$ e $AB + BC + CA$;
- Os pontos médios M, N e Q dos vetores BC, AB e AC, respectivamente;
- As coordenadas do centroide do triângulo ABC, i.e., o ponto P sobre AM tal que $AP = 2PM$. Mostre também que P trisseca BQ e CN.

Sugestão: Represente graficamente os pontos. O ponto médio $M = (x, y, z)$ do vetor do vetor BC é tal que suas coordenadas resolvem: $BM = \frac{1}{2}BC$.

Q 1.7. Dados os pontos $A = (4, -1, 6)$ e $B = (2, 5, -4)$, ache:

- O ponto C tal que B seja o ponto médio de AC;

b) O ponto D tal que A seja o ponto médio de DB.

Q 1.8. Sejam os três pontos $A_i = (x_i, y_i, z_i)$; $i = 1, 2, 3$. Prove que o centroide do triângulo é o ponto coordenado por

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

Q 1.9. Dados os pontos $A = (2, 5, -1)$, $B = (-2, 1, 4)$ e $C = (0, -6, 4)$, ache os pontos P tais que:

$$a) \quad AP = 3AB, \quad b) \quad CP = 2AB \quad e \quad c) \quad AP = -5BP.$$

Q 1.10. Mostre que para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$,
2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$,
3. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$,
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,
5. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

Q 1.11. Prove o teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + y^2$, onde d é a hipotenusa e x e y, o comprimento dos lados de um triângulo retângulo.

Q 1.12. Determine se o ângulo entre os vetores u e v é agudo, reto ou obtuso:

- a) $u = (1, 0)$ e $v = (2, 2)$,
- b) $u = (4, 1)$ e $v = (2, -8)$,
- c) $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 1)$.
- d) $u = (-1, 0, 0, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Q 1.13. Prove o Teorema 1.12 usando a lei dos cossenos.

Q 1.14. Uma esfera de centro $A = (a, b, c)$ e raio $r > 0$ em \mathbb{R}^3 é o conjunto dos pontos tais que sua distância até A é igual a r . Prove que a equação da esfera de raio r e centro na origem é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Q 1.15. Prove que o ponto $P = (x, y, z)$ é equidistante dos pontos $A = (3, -2, 1)$ e $B = (1, 2, 4)$ se, e somente se,

$$4x - 8y - 6z + 7 = 0.$$

Q 1.16. Mostre que os seguintes conjuntos de pontos são vértices de paralelogramos:

a) $(0, 0, 0)$, $(5, 2, 7)$, $(-2, 2, 3)$, $(3, 4, 10)$ b) $(4, 1, 2)$, $(-2, 3, 1)$, $(5, 1, 4)$, $(-1, 3, 3)$.

Q 1.17. Encontre vetores unitários

a) com a mesma direção e sentido que

(a) $(2, 6, -3)$,

(b) $(2, 2, 1)$,

(c) $(4, 1, -3)$;

b) idem ao item a) mas, com sentido oposto;

c) ortogonais a $(5, 2, -3)$;

d) ortogonais a $(1, 5, -2)$ e $(2, 3, 1)$ simultaneamente.

Q 1.18. Dados os pontos $A = (1, 3, 5)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (4, 1, 2)$: a) Calcule o cosseno do ângulo formado entre os vetores BA e BC; b) idem para os ângulos formados entre AB e AC e entre CA e CB; c) Calcule a área do triângulo ABC.

1.7.2 Equações da reta.

Q 1.19. Dê as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 3)$ e $B = (-2, 1, 5)$. Mostre que esta reta é paralela à reta passando pela origem O e pelo ponto $C = (-3, 1, 2)$.

Q 1.20. Escreva uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto médio M do segmento AB e que tem vetor diretor $v = \frac{\sqrt{3}}{7}(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, -1)$. São dados $A = (1, 1, 3)$ e $B = (3, 1, 0)$.

Q 1.21. Ache as equações paramétricas:

a) da reta passando por $A = (1, 5, 0)$ e paralela ao vetor $T = (2, -7, 4)$;

b) da reta que passa pelo ponto $A = (1, 7, 6)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 2, 0)$ e $C = (5, -1, 3)$;

c) da reta que passa pelo ponto $A = (0, 5, 6)$ e é paralela à reta de equação:

$$x = 2 + 4t; \quad y = -2t; \quad z = 3 + 5t.$$

Q 1.22. Dadas as equações:

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{1 - y}{2} = z + 1.$$

1. Mostre que elas representam uma reta.
2. São equações na forma simétrica? Caso não sejam, passe-as para a forma simétrica.
3. Exiba um ponto e um vetor diretor de r .

Q 1.23. Considere a reta que passa pelos pontos $A = (2, 1, 4)$ e $B = (-3, 5, 2)$. Determine os pontos nos quais a reta corta: a) cada um dos planos coordenados: xy , yz e xz ; b) o plano de equação $x + y + z = 4$.

Q 1.24. Dois pontos efetuam movimentos descritos pelas equações:

$$\begin{aligned} X &= (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4) \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ X &= (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1) \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pergunta-se se as trajetórias são concorrentes e se haverá colisão.

Q 1.25. Ache as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (4, 1, -2)$ e é normal ao plano de equação $2x - y + 3z = 6$.

Q 1.26. Prove que uma reta no plano é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação (cartesiana) do tipo:

$$ax + by = c.$$

Onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Q 1.27. Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, mostre que se $P = (x, y, z)$ estiver sobre a reta que passa por A e B, então existem números s e t tais que $s + t = 1$ e $x = sx_1 + tx_2$; $y = sy_1 + ty_2$ e $z = sz_1 + tz_2$. Mostre também que P está entre A e B sse s e t são ambos não negativos.

Q 1.28. Encontre representações vetoriais, paramétrica e simétrica da reta:

a) que passa pelos pontos

(a) $P = (7, -2)$ e $Q = (9, 3)$;

(b) $P = (5, 4, -3)$ e $Q = (1, -3, 2)$;

b) que possui a representação paramétrica

$$i) \quad \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 4 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad ii) \quad \begin{cases} x = 4 + 2t, \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R};$$

c) que passa por $(7, -1, 8)$ na direção de $(1, 3, -5)$;

d) que passa por $(1, 9, -4)$ e $(2, -3, 0)$;

e) que passa por $(4, -1, 9)$ e é perpendicular ao plano $3x - 2y + z = 18$.

Q 1.29. Determine a posição relativa entre as retas

a) $r : X = (1, 1) + t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $s : y = 0$.

b) r (acima) e s descrita por

$$\begin{cases} x = t, & t \in \mathbb{R}. \\ y = 2 + t \end{cases}$$

c) $r : X = (1, 1, 1) + t(1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ e $s : x = z$ e $y = 0$.

Q 1.30. A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto na interseção de r com a sua perpendicular (ou normal) que passa sobre P . Obtenha uma fórmula para a projeção de um ponto qualquer $P = (x_0, y_0)$ sobre a reta $y = x$ (Vide Figura 1.10).

Q 1.31. Calcule a projeção do vetor $(7, 2, 4)$ sobre cada um dos vetores $(1, 1, 0)$; $(-1, 1, 2)$ e $(1, 2, 1)$.

Q 1.32. Prove que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si, os lados do paralelogramo são iguais.

Sugestão: se X e Y são dois vetores de mesma origem, então as duas diagonais do paralelogramo formado por ambos são: $X + Y$ e $X - Y$.

Q 1.33 (Ângulo entre retas). Suponha que r_1 e r_2 são retas co-planares com vetores diretores u e v respectivamente. Mostre que se θ é o (menor) ângulo entre elas então

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|}.$$

1.7.3 Equações do Plano.

Q 1.34. Dê equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (7, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (-1, 0, 1)$.

Q 1.35. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$, onde

$$\pi_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0 \quad , \quad \pi_2 : 2x - 6y + 4z + 1 = 0.$$

E em relação a π do exercício anterior ?

Q 1.36. Escreva equações paramétricas para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde

$$\pi_1 : 2x - y - 3 = 0 \quad , \quad \pi_2 : 3x + y + 2z - 1 = 0.$$

Q 1.37. Estude a posição relativa das retas:

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 3) \quad e \quad s : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4. \end{cases}$$

Q 1.38. Estude a posição relativa de π e r , onde

$$\pi : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \nu(0, 0, 3) \quad , \quad r : X = (2, 2, 1) + \alpha(3, 3, 0).$$

Q 1.39. Ache a medida do ângulo entre os planos:

$$\pi_1 : x - y + z = 0 \quad , \quad \pi_2 : x + y + z = 0.$$

Q 1.40. Suponha que a reta r “fura” o plano π em ângulo agudo θ . Se N é o vetor normal ao plano e v é o vetor diretor da reta, prove que

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|\langle N, v \rangle|}{\|N\| \|v\|}.$$

Ache então a medida em radianos do ângulo entre $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 0)$ e $\pi : y + z - 10 = 0$.

Q 1.41. Sejam a, b, c números reais, $a \neq 0$. Suponha que a equação geral de um plano π é $ax + by + cz = d$. Mostre que a equação vetorial pode ser escrita na forma:

$$X = \left(\frac{d}{a}, 0, 0 \right) + t \left(\frac{c}{a}, 0, -1 \right) + s \left(\frac{b}{a}, -1, 0 \right), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Q 1.42. Ache a equação geral do plano π que passa por $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $u = (0, 1, 0)$ e $v = (1, 1, 1)$.

Q 1.43. Determine a posição relativa entre os planos $x + y + z - 1 = 0$ e $x + y - z = 0$.

Q 1.44. Sejam N_1 e N_2 os vetores normais dos planos π_1 e π_2 . Mostre que se θ é o ângulo agudo entre eles então

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle N_1, N_2 \rangle|}{\|N_1\| \|N_2\|}.$$

Q 1.45. Encontre equações para o plano:

1. Perpendicular à reta que liga $(1, 4, -3)$ e $(-2, 5, 1)$ e que passa por $(1, 5, 2)$.
2. Que passa pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
3. Que contem o eixo “y” e o ponto $(4, -1, 2)$.

Q 1.46. Ache o comprimento da perpendicular do ponto $P = (2, -1, 6)$ ao plano de equação

$$2x + 6y - 3z = 28.$$

Sugestão: Tome um ponto qualquer do plano, p.ex., $Q = (14, 0, 0)$ e ache o vetor projeção de PQ sobre um vetor normal ao plano. Em seguida, calcule o comprimento da projeção.

Q 1.47. Determine o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, sobre o plano de equação $x + y + 2z = 0$, que está à menor distância do ponto $A = (3, 4, -2)$.

Q 1.48. Dê a fórmula geral para o comprimento da perpendicular partindo do ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano de equação $ax + by + cz = d$.

Q 1.49. Prove que: a) o plano de equação $ay + bz = c$ é paralelo ao eixo dos x; b) o plano $ax + bz = c$ é paralelo ao eixo dos y; c) o plano $ax + by = c$ é paralelo ao eixo dos z; d) o plano $ax = c$ é paralelo aos eixos y e z.

Q 1.50. Demonstre as propriedades do produto vetorial descritas na Proposição 1.26.

Q 1.51. Ache um vetor normal: a) ao plano formado pelos pontos $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 0, -3)$ e $C = (0, 2, 4)$; b) ao plano de equação $-x + 3y + z = 2$.

1.7.4 Cônicas

Q 1.52. Com o auxílio do Teorema 1.33, reconheça a cônica da equação:

a) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$.

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

c) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$.

d) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$.

1.7.5 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 3, 12 e 13/1994; 9/1995; 11/1996; 1/1998; 1/2000; 1, 3 e 10/2001; 2/ 2002; 2/2003; 2/2004; 8/2010; 2, 10/2011; 3/2012; 2/2013; 7/2015; 11/2017; 3/2018; 3/2019.

1.8 Gabarito: Geometria Analítica.

Q 1.1. $x'_1 = x_1 - 1$, $x'_2 = x_2 - 2$ e $x'_3 = x_3 - 1$.

Q 1.2. Se $T_1(v) = v - a$ e $T_2(v) = v - b$ então $[T_1 \pm T_2](v) = (v - a) \pm (v - b) = (v \pm v) - (a \pm b)$, que é um vetor de comprimento diferente, em geral, do vetor v ; logo, não coincide com uma translação de v . Note a composta das translações sim seria uma translação:

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)) = T_1(v) - b = v - a - b = v - (a + b).$$

Q 1.3. a): $\vec{PQ} = Q = (2, -1)$, $\vec{QP} = P - Q = -Q = (-2, 1)$, $P + Q = Q$, $-P = P = (0, 0)$, $2P = (0, 0)$ e $\frac{1}{2}P = (0, 0)$; b): $\vec{PQ} = (-2, -1)$, $\vec{QP} = (2, 1)$, $P + Q = (4, 3)$, $-P = (-3, -2)$, $-Q = (-1, -1)$, $P - Q = (2, 1)$, $2P = (6, 4)$ e $\frac{1}{2}P = (3/2, 1)$, ...

Q 1.4. a): $\|P - Q\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; b): $\sqrt{(2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Q 1.5. a): $\|P\| = 0$, $\|Q\| = \sqrt{5}$; b): $\|P\| = \sqrt{13}$, $\|Q\| = \sqrt{2}$, ...

Q 1.6. (a) $\|AB\| = 10.1$; $\|AC\| = 6.708$; $\|BC\| = 9.11$; (b) $AB = (-7, 7, 2)$; $BC = (5, -3, -7)$; $AC = (-2, 4, -5)$; (c) $AB + BC = (-2, 4, -5)$; $AB + BC + CA = (0, 0, 0)$; (d) $M = (1/2, 5/2, -1/2)$; $N = (3/2, 1/2, 2)$; $Q = (4, -1, -3/2)$ (e) Centróide: $P = (2, 2/3, 0)$. Trissecta BQ: $BP = 2PQ = (4, -10/3, -3)$; e trissecta CN: $CP = 2PN = (-1, -1/3, 4)$.

Q 1.7. $C = (0, 11, -14)$ e $D = (6, -7, 16)$.

Q 1.8. Seja M o ponto médio entre A_2 e A_3 , $M = 1/2(A_2 + A_3)$, e suponha que $P = (x, y, z)$ seja o centróide a ser determinado. Então,

$$A_1P = 2PM \Leftrightarrow P - A_1 = 2(M - P) \Leftrightarrow 3P = A_1 + 2M = A_1 + A_2 + A_3 \Leftrightarrow P = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3).$$

Q 1.9. a): $P = (-10, -7, 14)$; b): $P = (-8, -14, 14)$; c): $P = (-4/3, 5/3, 19/6)$.

Q 1.10. Sejam u e v elementos de \mathbb{R}^n . Então, aplicando as propriedades do produto interno Euclidiano na Proposição 1.9 e a definição de norma Euclidiana obtém-se

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\|u - v\|^2 = \|u + (-v)\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, -v \rangle + \| -v \|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Somando as equações dos itens 1) e 2) obtém-se o item 3), e o item 4) é consequência do item 1) e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, (1.2),

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \implies \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Por último, aplicando a desigualdade triangular,

$$\|u\| = \|v + (u - v)\| \leq \|v\| + \|u - v\| \implies \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$$

e, analogamente, $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\| = \|u - v\|$; ou seja,

$$| \|u\| - \|v\| | \leq \|u - v\|.$$

Q 1.11. Decorre do item 1) da questão anterior, levando em consideração que $\langle u, v \rangle = 0$ pois o triângulo é retângulo. Aqui, $x = \|u\|$, $y = \|v\|$ e $d = \|u + v\|$.

Q 1.12. O ângulo entre os vetores u e v é: a) agudo, b) reto, c) agudo, d) obtuso.

Q 1.13. A lei dos cossenos estabelece que numa triângulo de lados a , b , c , $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$, em que γ é o ângulo interno oposto ao lado c . Sabe-se ainda, da Questão 1.10 item 1), que para dois vetores quaisquer em \mathbb{R}^n , u e v

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Então, fazendo $a = \|u\|$, $b = \|v\|$ e $c = \|u + v\|$ no triângulo gerado pelos vetores u , v e $u + v$ obtemos $c^2 = a^2 + 2\langle u, v \rangle + b^2$ e $\theta = \pi - \gamma$, em que θ é o ângulo entre os vetores u e v ; assim,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = c^2 = a^2 + 2\langle u, v \rangle + b^2 \implies \langle u, v \rangle = -ab\cos(\gamma),$$

e lembrando que $\cos(\theta) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos(\gamma)$ conclui-se que

$$\langle u, v \rangle = ab\cos(\theta) = \|u\| \cdot \|v\|\cos(\theta).$$

Q 1.14. Uma esfera de centro $A = (a, b, c)$ e raio $r > 0$ em \mathbb{R}^3 é o conjunto dos pontos tais que sua distância até A é igual a r ; desse modo, (x, y, z) é uma elemento da esfera se, e somente se,

$$d((x, y, z), (a, b, c)) = r \Leftrightarrow d((x, y, z), (a, b, c))^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

pois r é não negativo. Em particular, quando o centro está no origem; i.e., $a = 0 = b = c$, a equação toma a forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Q 1.15. O ponto $P = (x, y, z)$ é equidistante dos pontos $A = (3, -2, 1)$ e $B = (1, 2, 4)$ se, e somente se,

$$d(P, A) = d(P, B) \iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 \iff 4x - 8y - 6z + 7 = 0.$$

Q 1.16. Para checar se o quadrilátero ABCD formado pelos pontos A, B, C e D , posicionados no sentido anti-horário num plano, é um paralelogramo bastaria checar a chamada regra do paralelogramo descrita na Questão 1.10 item 3) que diz que num paralelogramo gerado pelos vetores u e v , no caso $u = AB$ e $v = AD$, o dobro da soma dos quadrados dos lados é exatamente igual à soma dos quadrados das diagonais $u + v$ e $u - v$; no caso, $u + v = AC$ e $u - v = DB$ (consulte a Figura 1.19):

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

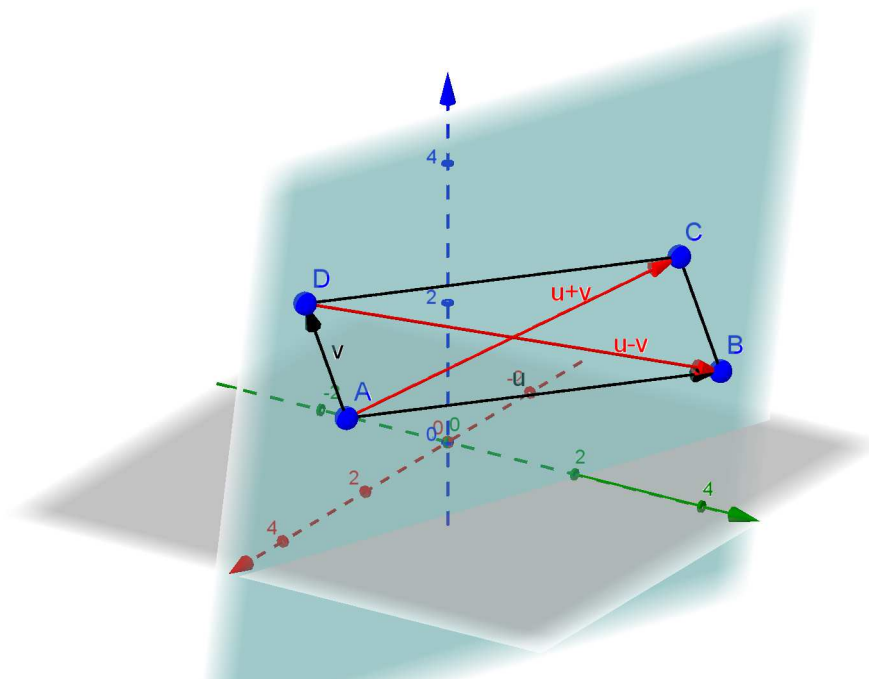


Figura 1.19: Paralelogramo num plano π

- a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (5, 2, 7)$, $D = (-2, 2, 3)$, $C = (3, 4, 10)$: $u = AB = B$, $\|u\|^2 = 78$, $v = AD = D$, $\|v\|^2 = 17$, $u + v = AC = C$, $\|u + v\|^2 = 125$, $u - v = B - D$, $\|u - v\|^2 = 65$:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 125 + 65 = 190, \quad \text{e} \quad 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 2(17 + 78) = 2 \cdot 95 = 190.$$

Ou seja, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

- b) $A = (4, 1, 2)$, $B = (-2, 3, 1)$, $D = (5, 1, 4)$, $C = (-1, 3, 3)$: $u = AB = B - A = (-6, 2, -1)$, $\|u\|^2 = 41$, $v = AD = D - A = (1, 0, 2)$, $\|v\|^2 = 5$, $u + v = AC = C - A = (-5, 2, 1)$, $\|u + v\|^2 = 30$, $u - v = B - D = (-7, 2, -3)$, $\|u - v\|^2 = 49 + 4 + 9 = 62$:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 30 + 62 = 92, \quad \text{e} \quad 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 2(41 + 5) = 2 \cdot 46 = 92.$$

Ou seja, o quadrilátero ABCD também é um paralelogramo.

- Q 1.17.** a.1) $(2/7, 6/7, -3/7)$, a.2) $(2/3, 2/3, 1/3)$, a.3) $(\sqrt{26}/26) \cdot (4, 1, -3)$; b) $(-2/7, -6/7, 3/7)$; c) $\{(x, y, z); 5x + 2y - 3z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; d) $\{\pm\sqrt{195}/195(-11, 5, 7)\}$.

- Q 1.18.** (a) $\cos(\theta) = \frac{16}{17 \cdot 37}$; (b) $\angle(BAC) = \arccos\left(\frac{1}{17 \cdot 22}\right)$, $\angle(ACB) = \arccos\left(\frac{21}{22 \cdot 37}\right)$;

(c) área do triângulo ACB = $\frac{1}{2}\|BC\| \cdot \|BA\|\sin(\theta) \approx (37 \cdot 17 \cdot 0.77)/2 = 9.656$, em que θ é o ângulo entre BA e BC calculado no item (a)

- Q 1.19.** $R(t) = \{(1 - 3t, t, 3 + 2t); t \in \mathbb{R}\}$. Note que $v = (-3, 1, 2) = 1 \cdot OC$ é vetor diretor dessa reta; assim, é paralela à reta passando pela origem O e pelo ponto $C = (-3, 1, 2)$.

- Q 1.20.** O ponto médio do segmento AB é

$$M = \frac{1}{2}(A + B) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} r: X &= M + \lambda v = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right) + \lambda \frac{\sqrt{3}}{7} \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, -1\right) \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \left(2, 1, \frac{3}{2}\right) + \mu(2, 3, -14), \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Q 1.21.** (a) $x = 1 + 2t$, $y = 5 - 7t$, $z = 4t$; (b) $x = 1 + 4t$, $y = 7 - 3t$, $z = 6 + 3t$; (c) $x = 4t$, $y = 5 - 2t$, $z = 6 + 5t$.

- Q 1.22.** 1) Observe que $\frac{1-y}{2} = z + 1$ equivale a $y = -2z - 1$ e $\frac{2x-1}{3} = z + 1$, a $x = 3/2z + 2$. Logo, o conjunto das ternas (x, y, z) que verificam ditas equações é da forma $(3/2z + 2, -2z - 1, z) = (2, -1, 0) + z(3/2, -2, 1)$, $z \in \mathbb{R}$.

2) As equações não estão na forma simétrica que no caso teriam a forma:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{1}.$$

3) A reta passa pelo ponto $(1/2, 1, -1)$ (e também pelo ponto $(2, -1, 0)$) com vetor diretor $(3/2, -2, 1)$.

Q 1.23. $P = (x, y, z) \in r \Leftrightarrow x = 2 - 5t, y = 1 + 4t, z = 4 - 2t$. (a) corta xy em $(-8, 9, 0)$; xz em $(13/4, 0, 9/2)$; e yz em $(0, 13/5, 16/5)$. (b) corta o plano $x + y + z = 4$ em $t = 1$; ou seja, no ponto $P = (-3, 5, 2)$.

Q 1.24. Note que os vetores diretores não são co-lineares pois um não é múltiplo do outro, i.e.,

$$\nexists \alpha \in \mathbb{R}; (1, 2, 4) = \alpha(-1, -1, -1) = (-\alpha, -\alpha, -\alpha),$$

consequentemente as retas não são paralelas. Para identificar se são concorrentes ou não precisamos então checar se há um plano que as contem pois estão em \mathbb{R}^3 . Uma forma simples de checar a existência de tal plano é verificar se o vetor AB em que A é um ponto da primeira reta, digamos $(0, 0, 0)$ e B um ponto da segunda, por exemplo $(1, 0, -2)$ (e neste caso $AB = B - A = (1, 0, -2)$) pode ser obtido como combinação linear dos vetores diretores $u = (1, 2, 4)$ e $v = (-1, -1, -1)$ de ditas retas, i.e., se existem t e s reais tais que $AB = tu + sv$. Por sua vez, isto equivale a checar se a matriz que tem as linhas AB, u e v é ou não de posto máximo e, sendo quadrada, o problema reduz-se a checar se seu determinante é ou não igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 2 - 4 + 4 + 0 = 0.$$

Então as retas são concorrentes.

Já para a segunda parte da questão devemos pressupor $X(\lambda) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4)$ e $Y(\lambda) = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1)$ representam a posição de dois corpos que em movimento retilíneo descrevem trajetórias descritas por $\{X(\lambda)\}_\lambda$ e $\{Y(\lambda)\}_\lambda$ ao longo do tempo λ começando em $\lambda = 0$ mas aceitando reversibilidade do tempo, ou seja, λ pode ir a $+\infty$ e também a $-\infty$. Assim, colisão corresponde à existência de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $X(\lambda) = Y(\lambda)$, i.e.,

$$\lambda(1, 2, 4) = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1) \Leftrightarrow \lambda(2, 3, 5) = (1, 0, -2)$$

o que é impossível de modo que não haverá colisão.

Q 1.25. $x = 4 + 2t, y = 1 - t, z = -2 + 3t$;

Q 1.26. Se C é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação (cartesiana) $ax + by = c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ então C é o gráfico da função afim $y = c/b - (a/b)x$ (caso $b \neq 0$), que é uma reta no plano; ou $C = \{(c/a, y); y \in \mathbb{R}\}$ (caso $b = 0$ e $a \neq 0$), que também é uma reta, no caso, vertical. Por outro lado, se $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2), t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta no plano que passa por (x_0, y_0) com vetor diretor $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ então

$$x - x_0 = tv_1 \quad e \quad y - y_0 = tv_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se $v_1 = 0$ então $x = x_0$, i.e., $1 \cdot x + 0 \cdot y = x_0$; ou seja, r é o conjunto solução de uma equação linear em duas variáveis. Análogo para o caso $v_2 = 0$. Podemos supor então v_1 e v_2 não nulos para concluir que $(x, y) \in r$ se, e somente se,

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{v_1}}_a x + \underbrace{\frac{-1}{v_2}}_b y = \underbrace{\frac{x_0 - y_0}{v_1 v_2}}_c.$$

Q 1.27. $P = (x, y, z)$ deve ser tal que $AP = cAB$ o que implica $x = cx_2 + (1 - c)x_1$, $y = cy_2 + (1 - c)y_1$ e $z = cz_2 + (1 - c)z_1$. Coloque $t = c$ e $s = 1 - c$. Então, $\min\{x_1, x_2\} \leq x \leq \max\{x_1, x_2\}$ implica $t \geq 0$ e $s \geq 0$ (idem para y e z).

Q 1.28. a.1) vetorial: $X = (7, -2) + t(2, 5)$, $t \in \mathbb{R}$; paramétrica: $x = 7 + 2t$, $y = -2 + 5t$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 7}{2} = \frac{y + 2}{5}$.

a.2) vetorial: $X = (5, 4, -3) + t(-4, -7, 5)$, $t \in \mathbb{R}$; paramétrica: $x = 5 - 4t$, $y = 4 - 7t$, $z = -3 + 5t$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 5}{-4} = \frac{y - 4}{-7} = \frac{z + 3}{5}$.

b.i) vetorial: $X = (2, 4) + t(-3, 4)$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 4}{4}$.

b.ii) vetorial: $X = (4, -2, 3) + t(2, 5, -7)$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 2}{5} = \frac{z - 3}{-7}$.

c) paramétrica: $x = 7 + t$, $y = -1 + 3t$, $z = 8 - 5t$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 7}{1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 8}{-5}$.

d) paramétrica: $x = 1 + 2t$, $y = 9 - 3t$, $z = -4$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 9}{-3}$, $z = -4$.

e) vetorial: $X = (4, -1, 9) + t(3, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$; paramétrica: $x = -4 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = 9 + t$, $t \in \mathbb{R}$; simétrica: $\frac{x - 4}{3} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 9}{1}$.

Q 1.29. a) paralelas diferentes; b) concorrentes; c) paralelas diferentes.

Q 1.30. $F_r(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} \right)$.

Q 1.31. $P_{(1,1,0)}(7, 2, 4) = \frac{9}{2}(1, 1, 0)$; $P_{(-1,1,2)}(7, 2, 4) = \frac{1}{2}(-1, 1, 2)$; $P_{(1,2,1)}(7, 2, 4) = \frac{5}{2}(1, 2, 1)$

Q 1.32. $0 = \langle X + Y, X - Y \rangle = \|X\|^2 - \|Y\|^2 \Leftrightarrow \|X\| = \|Y\|$.

Q 1.33. Note que o ângulo entre as retas coincide com o ângulo entre seus vetores diretores.

Q 1.34.

$$\begin{aligned} x &= 7 + \lambda(1) + \mu(-1) = 7 + \lambda - \mu \\ y &= 7 + \lambda(1) + \mu(0) = 7 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda(1) + \mu(1) = 1 + \lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Q 1.35. Das equações gerais obtemos os vetores $(1, -3, 2, 1)$ e $(2, -6, 4, 1)$ que não são co-lineares e, conseqüentemente, os planos são diferentes mesmo sendo paralelos pois os vetores normais são co-lineares: $2(1, -3, 2) = (2, -6, 4)$. Para estudar a posição relativa em relação a π da questão anterior podemos obter primeiro sua equação geral a partir da vetorial:

$$\pi : X = A + \lambda u + \mu v = (7, 7, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 0, 1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Calculando então o produto vetorial dos vetores diretores obtém-se um vetor normal a π : $N = (1, 1, 1) \times (-1, 0, 1) = (1, -2, 1)$. Logo, $(x, y, z) \in \pi$ se, e somente se,

$$0 = \langle N, X - A \rangle = 1(x - 7) - 2(y - 7) + 1(z - 1) = x - 2y + z + 6.$$

Obtemos então para π o vetor $(1, -2, 1, 6)$ e assim concluímos que π é transversal a π_1 e a π_2 .

Q 1.36. Note que os vetores normais $(2, -1, 0)$ e $(3, 1, 2)$ não são co-lineares então os planos são transversais, ou seja, a interseção é uma reta. Para descreve-la precisamos de apenas dois pontos, i.e., de um par de soluções distintas do sistema $2x - y = 3$, $3x + y + 2z = 1$. Por exemplo, $A = (0, -3, 2)$ e $B = (2, 1, -3)$. Então

$$r : X = A + \lambda \vec{AB} = (0, -3, 2) + \lambda(2, 4, -5), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= -3 + 4\lambda \\ z &= 2 - 5\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Q 1.37. Observe que se $(x, y, z) \in s$ então, somando as equações, obtemos $2x = 2$, i.e., $x = 1$ e $y + z = 5$. Assim $P_1 = (1, 0, 5)$ e $P_2 = (1, 5, 0)$ são pontos de s e $v = P_1P_2 = (1 - 1, 5 - 0, 0 - 5) = (0, 5, -5)$ é seu um vetor diretor (um deles). Como os vetores diretores de r , $u = (0, 1, 3)$, e de s , $(0, 5, -5)$, não são co-lineares as retas não são paralelas podendo ser concorrentes ou reversas. Neste ponto seguiremos o procedimento da questão 1.24 com $A = (1, 2, 3)$, $B = P_1$, u e v :

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{co-planares.}$$

Então são concorrentes.

Q 1.38. Note que $(3, 3, 0) = 3(1, 1, 1) - (0, 0, 3)$. Então a reta é paralela ao plano. Para checarmos se está contida ou não no plano basta checar se um ponto qualquer dela pertence ao plano: digamos $(2, 2, 1)$. Ou seja, se existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$(2, 2, 1) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \nu(0, 0, 3) \quad \Leftrightarrow \quad (1, 2, 0) = (\lambda, \lambda, \lambda + 3\nu) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2.$$

O que é impossível, ou seja, a reta é paralela ao plano.

Q 1.39. Basta calcular o menor ângulo (agudo ou reto) entre as retas geradas pelos vetores normais $N_1 = (1, -1, 1)$ e $N_2 = (1, 1, 1)$: θ .

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle N_1, N_2 \rangle|}{\|N_1\| \|N_2\|} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{3}.$$

Então $\theta = \arccos(1/3)$.

Q 1.40. Seja $V = (-1, -1, 0)$, $N = (0, 1, 1)$, b o ângulo agudo entre V e N e a , o ângulo em questão, então (Vide Figura 1.20) $a = \pi/2 - b$ e $\text{sen}(a) = \text{sen}(\pi/2 - b) = \cos(b)$. Logo,

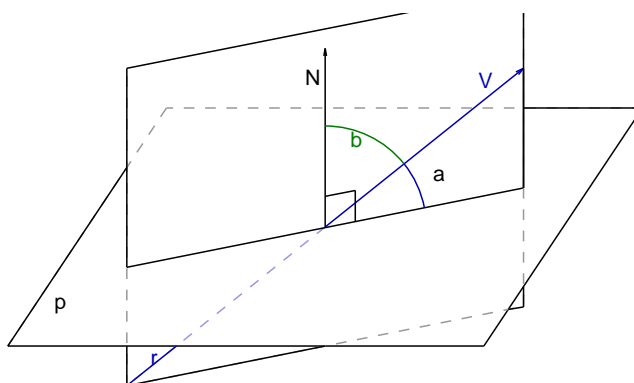


Figura 1.20: Ângulo a entre a reta e o plano

$$\text{sen}(a) = \frac{|\langle V, N \rangle|}{\|V\| \|N\|} = \frac{|0 - 1 + 0|}{\sqrt{1+1} \sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}.$$

Então $a = \arcsen(1/2) = \pi/6$.

Q 1.41. Note que $A = (d/a, 0, 0)$, $B = ((d+c)/a, 0, -1)$ e $C = ((d+b)/a, -1, 0)$ são elementos do plano; assim $u = AB$ e $v = AC$ podem ser escolhidos como vetores diretores:

$$X = \left(\frac{d}{a}, 0, 0\right) + t \left(\frac{c}{a}, 0, -1\right) + s \left(\frac{b}{a}, -1, 0\right), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Q 1.42. $x - z = 9$.

Q 1.43. Transversais.

Q 1.44. O (menor) ângulo entre os planos é agudo e coincide com o ângulo entre seus vetores normais.

Q 1.45. 1) $-3x + y + 4z = 10$; 2) $x + y + z = 1$; 3) $X = t(0, 1, 0) + s(4, -1, 2)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Q 1.46. $48/7$.

Q 1.47. $P = (5/2, 7/2, -3)$.

Q 1.48. $\frac{|d - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Q 1.49. (a) normal ao plano: $(0, a, b)$; direção do eixo x : $(1, 0, 0)$; (b) normal ao plano: $(a, 0, b)$; direção do eixo y : $(0, 1, 0)$; (c) normal ao plano: $(a, b, 0)$; direção do eixo z : $(0, 0, 1)$; (d) normal ao plano: $(a, 0, 0)$; vetor do plano yz : $(0, y, z)$.

Q 1.50. Aplique a definição de produto vetorial.

Q 1.51. a) (a) $(15, 1, 4)$; (b) $(-1, 3, 1)$.

Q 1.52. Classificação das cônicas:

a) $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(7) < 0 \implies$ elipse (ou um ponto ou o vazio). Porém, as degenerações podem ser descartadas pois para $y = 0$ a equação toma a forma $4x^2 + 12x - 9 = 0$, que possui duas raízes distintas. Para mais detalhes consulte a Figura 1.21.

b) $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0 \implies$ parábola (ou um par de retas paralelas, uma reta ou vazio). Note que

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = (x - y)^2 - 2(x - y) + 1 - 4y \\ &= [(x - y) - 1]^2 - 4y \end{aligned}$$

que corresponde a uma parábola com eixo de simetria em $y = x$ (consulte a Figura 1.22).

c) $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0 \implies$ parábola (ou um par de retas paralelas, uma reta ou vazio). Neste caso

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = (x - 2y)^2 - 6(x - 2y) + 8 \\ &= [(x - 2y) - 3]^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \pm 1 &= (x - 2y) - 3 \Leftrightarrow x - 2y = 4 \quad \vee \quad x - 2y = 2 \end{aligned}$$

corresponde a duas retas paralelas.

d) $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0 \implies$ parábola (ou um par de retas paralelas, uma reta ou vazio). Observe ainda que

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 = (x - y)^2 + (x - y) + 1 \\ &= \left[(x - y) + \frac{1}{2} \right]^2 + 1 - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{4} &= \left[(x - y) + \frac{1}{2} \right]^2 \geq 0 \quad \text{absurdo.} \end{aligned}$$

Assim, estamos no caso degenerado em que o conjunto solução da equação é vazio..

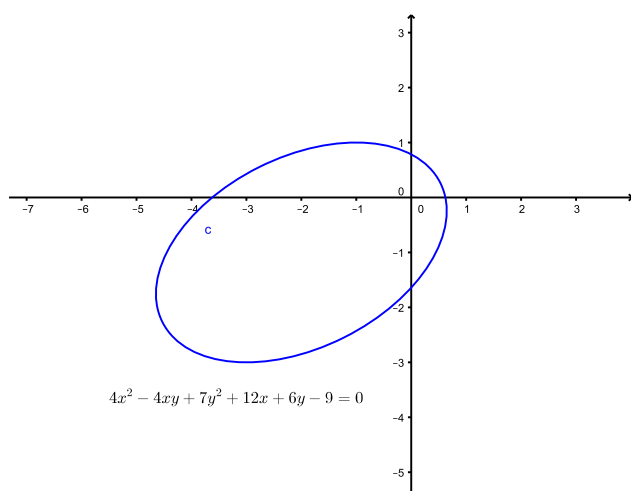


Figura 1.21: Elipse.

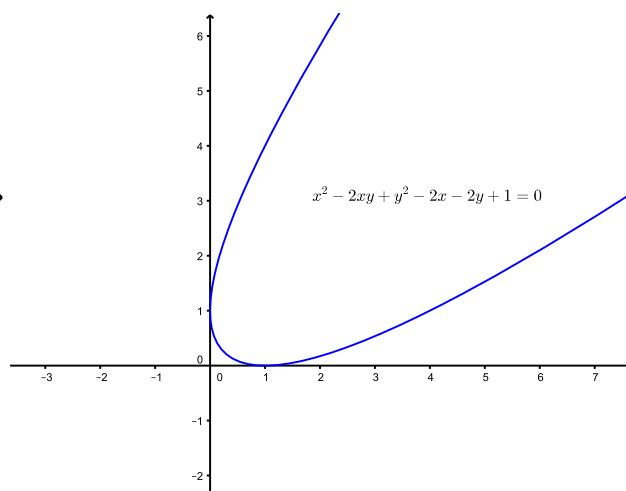


Figura 1.22: Parábola.

ANPEC (1994 Q3). Determine α de tal modo que a reta contendo os pontos $A = (\alpha, 4)$ e $B = (-1, 2)$ seja perpendicular à reta contendo os pontos $C = (4, -1)$ e $D = (3, 1)$. Em seguida, determine β de forma que a reta contendo $E = (\beta, 4)$ e B seja paralela à reta contendo C e D . Qual é o valor de $(\alpha + \beta)$?

Solução. Sejam r_{AB} , r_{CD} e r_{EB} as retas contendo os pontos A e B ; C e D ; e E e B respectivamente. Então

$$\begin{aligned} r_{AB}: X &= B + t\vec{BA} = (-1, 2) + t(\alpha + 1, 2), \quad t \in \mathbb{R} \\ r_{CD}: X &= C + s\vec{DC} = (4, -1) + s(1, -2), \quad s \in \mathbb{R} \\ r_{EB}: X &= B + \tau\vec{BE} = (-1, 2) + \tau(\beta + 1, 2), \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observe agora que r_{AB} e r_{CD} são perpendiculares se, e somente se, $(\alpha + 1, 2) \perp (1, -2)$, i.e.,

$$0 = \langle (\alpha + 1, 2), (1, -2) \rangle = (\alpha + 1) - 4 = \alpha - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Por outro lado, as retas r_{EB} e r_{CD} são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\beta + 1, 2) = \lambda(1, -2) \quad \Leftrightarrow \quad \beta + 1 = \lambda \quad \text{e} \quad 2 = -2\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \text{e} \quad \beta = -2.$$

Então $\alpha + \beta = 3 - 2 = 1$.

ANPEC (1994 Q12). Calcule a área compreendida entre as curvas $y - x = 0$; $y = 0$; $y + x - 6 = 0$ e $y - x + 4 = 0$.

Solução. Observe que as retas $y = x$ e $y = x - 4$ são paralelas e cortam a reta $y = 0$ na origem O e no ponto $P_1 = (4, 0)$. A reta $y = 6 - x$ corta perpendicularmente a reta $y = x$

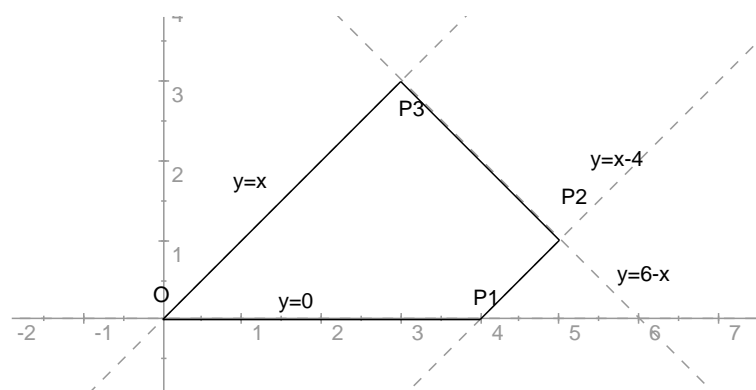


Figura 1.23: Área delimitada pelas retas

em $P_3 = (3, 3)$ e a reta $y = x - 4$ em $P_2 = (5, 1)$. Então, a área em questão é a área do trapézio $OP_1P_2P_3$ (Vide Figura 1.23):

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{d(O, P_3) + d(P_1, P_2)}{2} d(P_2, P_3) \\ &= \frac{\sqrt{3^2 + 3^2} + \sqrt{(5-4)^2 + (1-0)^2}}{2} \sqrt{(3-5)^2 + (3-1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2}) = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

ANPEC (1994 Q13). Assinale as proposições verdadeiras e as falsas:

V (0) A interseção das curvas $y - x + 2 = 0$, $y + x - 8 = 0$ e $y = 0$ forma um triângulo isósceles.

Solução. Note que $y = x - 2$ corta a reta $y = 0$ (o eixo x) no ponto $P_1 = (2, 0)$ em ângulo de $\pi/4$ (pois seu coeficiente angular é um) e corta ortogonalmente a reta $y = -x + 8$ em $P_3 = (5, 3)$. Então, o terceiro ângulo do triângulo $P_1P_2P_3$ é $\pi/2 - \pi/4 = \pi/4$, ou seja, isósceles. Aqui $P_2 = (8, 0)$ é a interseção de $y = -x + 8$ e $y = 0$.

F (1) Dois pontos satisfazem as equações: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 8 = 0$ e $x + y - 4 = 0$.

Solução. Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verifica as duas equações então $y = 4 - x$ e, substituindo na primeira,

$$8 = (x - 4)^2 + (4 - x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 + x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Logo, $y = 4 - 2 = 2$ e temos um único ponto verificando as duas equações: $(2, 2)$.

V (2) No espaço bi-dimensional (x, y) a distância entre os pontos (a, b) e (b, a) é $[2(b-a)^2]^{1/2}$.

Solução. Aceitando que refere-se ao espaço Euclidiano com a norma induzida pelo produto interno usual

$$\begin{aligned} d((a, b), (b, a)) &= \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{(-(b-a))^2 + (b-a)^2} \\ &= \sqrt{2(b-a)^2} = [2(b-a)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

F (3) A equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$ representa um círculo cujo raio é dois.

Solução. Note que

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

que representa o círculo de centro $(1, 0)$ e raio um (1) .

(4) As equações $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ e $b_1x + b_2y + b_3 = 0$ contêm o ponto (x_0, y_0) . Então, para uma dada constante c , a equação $(a_1x + a_2y + a_3) + c(b_1x + b_2y + b_3) = 0$ conterà o ponto (x_0, y_0) : Verdadeiro.

Solução. Sabemos que $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3 = 0$ e $b_1x_0 + b_2y_0 + b_3 = 0$. Então $(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3) + c(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3) = 0 + c0 = 0$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

ANPEC (1995 Q9). A respeito dos três subconjuntos de \mathbb{R} definidos por

$A = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) \text{ tal que } (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\}$ e

$C = \{(x, y) \text{ tal que } |x| + |y| \leq 1\}$.

Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

V (0) O conjunto $B \cap C$ tem área inferior a $1/3$.

Solução. Note que a área $B \cap C$ é um quarto da área de B menos a área do triângulo formado pelos pontos $\{(0, -1), (-1, 1), (1, 0)\}$ (vide figura 1.24). Ou seja,

$$Area(B \cap C) = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4} < \frac{3.2 - 2}{4} = \frac{1.2}{4} = 0.3 < \frac{1}{3}.$$

F (1) O conjunto $A \cap B \cap C$ é vazio.

Solução. $(0, -1), (1, 0) \in A \cap B \cap C \neq \emptyset$

V (2) O conjunto $A \cap B$ tem área igual a zero.

Solução. $A \cap B$ é o arco de circunferência que liga os pontos $(0, -1)$ e $(1, 0)$.

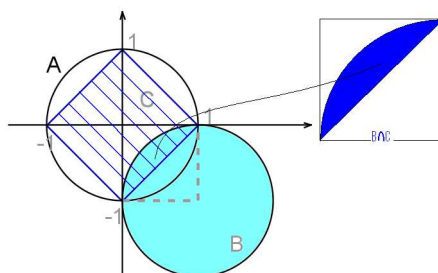


Figura 1.24: Conjuntos A,B e C.

F (3) O conjunto $A \cap C$ possui o dobro de elementos do conjunto $A \cap B$.

Solução. $\#A \cap C = 4 < +\infty$

ANPEC (1996 Q11). Indique se as afirmativas são verdadeiras ou falsas.

V (0) No \mathbb{R}^3 , a distância entre os pontos $(1, 2, 3)$ e $(2, 0, 5)$ é 3.

Solução.

$$d((1, 2, 3), (2, 0, 5)) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

F (1) Se x e y são vetores no \mathbb{R}^n , então eles são paralelos se e somente se seu produto interno for zero.

Solução. Lembre que produto interno zero corresponde à ortogonalidade.

V (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Solução. A desigualdade triangular é uma das propriedades da norma.

V (3) Considere $x = (3, 0, 4)$ e $y = (2, \sqrt{8}, 2)$, vetores no \mathbb{R}^3 . Então $\|x\| = 5$, $\|y\| = 4$ e dez vezes o cosseno do ângulo entre x e y é igual a 7.

Solução.

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \|y\| = \sqrt{4 + 8 + 4} = \sqrt{16} = 4, \quad \langle x, y \rangle = 6 + 0 + 8 = 14.$$

Então, se θ é o (menor) ângulo entre x e y ,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{14}{5 \cdot 4} = \frac{7}{10} \Rightarrow 10 \cos(\theta) = 7.$$

F (4) No \mathbb{R}^2 , a inclinação da reta que passa nos pontos $(-1, 3)$ e $(0, 0)$ é igual à 3.

Solução. A inclinação da reta é descrita pela variação média que é constante (logo, coincide com a variação instantânea):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{-1 - 0} = -3.$$

ANPEC (1998 Q1). A respeito das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas abaixo, responda V ou F.

V (0) O valor mínimo da função $f(x, y) = xy^2$ sujeito à restrição $|x| + 9|y| \leq 9$ é inferior a -1 (menos um).

Solução. Observe que $f < 0$ quando $x < 0$ e $y \neq 0$, além disso $f(x, \pm y) = x(\pm y)^2 = xy^2 = f(x, y)$. Então, para calcular o mínimo de f em tal região podemos supor $x < 0$ e $y > 0$. Nesse caso, a restrição $|x| + 9|y| \leq 9$ toma a forma $-x + 9y \leq 9$, i.e. $x \geq 9(y - 1)$, $0 < y < 1$. Estudando então a função de uma variável $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = 9(y - 1)y^2$ podemos obter uma cota superior para o ínfimo de f no conjunto factível dado (na verdade seu mínimo).

$$0 = g'(y) = 9[y^2 + 2(y - 1)y] = 9y(3y - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \quad \text{e}$$

$$g'(y) < 0, \quad y \in (0, \frac{2}{3}); \quad g'(y) > 0, \quad y \in (\frac{2}{3}, 1),$$

ou seja, $y = \frac{2}{3}$ realiza o mínimo de g de valor

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 9\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9\left(\frac{-1}{3}\right)\frac{4}{9} = -\frac{4}{3} < -1.$$

F (1) O valor mínimo da função $f(x, y) = |x| - |y|$ sujeito à restrição $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ é superior a zero.

Solução. Observe a Figura 1.25 e note que o círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ tem interseção não vazia com os cones¹ em que $|x| < |y|$. Por exemplo, para $x = 1/2$ a escolha $y = \sqrt{1 - (1/2 - 1)^2} = \sqrt{3}/2$ coloca o ponto $(1/2, \sqrt{3}/2)$ no círculo e $f(1/2, \sqrt{3}/2) = 1/2 - \sqrt{3}/2 < 0$.

V (2) O valor máximo da função $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ sujeito à restrição $|x| + |y| = 2$ é superior a 4.

Solução. Note que a curva de nível r^2 de f é a circunferência de raio r e centro $(1, 1)$. Até a circunferência de raio $\sqrt{10}$ temos interseção não vazia com o losango. Assim o nível máximo é 10 (Vide Figura 1.26).

¹Um cone, em \mathbb{R}^n , é um subconjunto K com a propriedade: $\forall x \in K, t > 0 \implies tx \in K$.

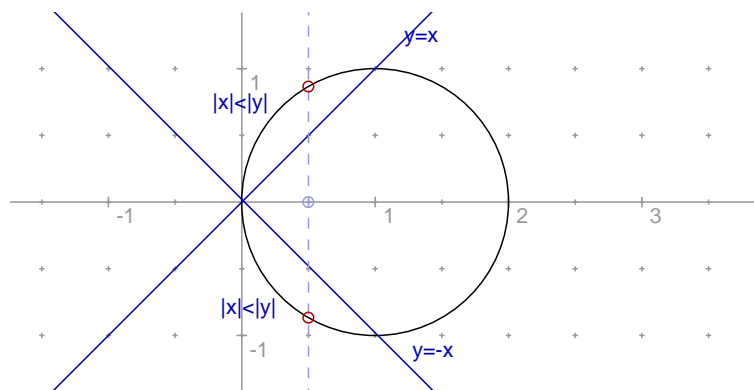


Figura 1.25: Retas $y = \pm x$ e círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

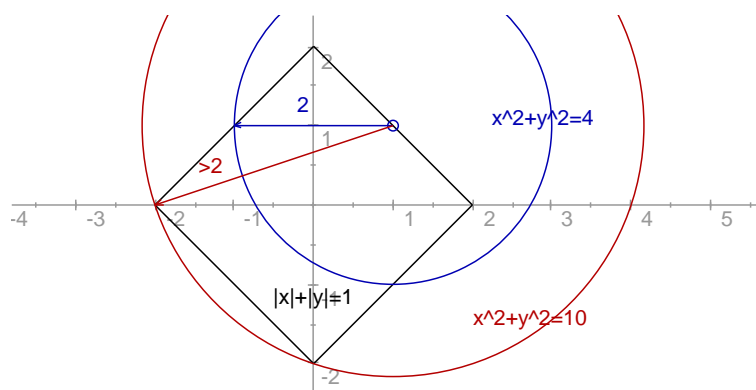


Figura 1.26: Losango $|x| + |y| = 2$ e circunferências concêntricas

ANPEC (2000 Q1). A respeito dos subconjuntos A, B, C definidos abaixo, no \mathbb{R}^2 , responda V (verdadeiro) ou F (falso):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 2\}$$

$$\text{e } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + 2|y + 1| \leq 2\}.$$

F (0) $B \cap C = \emptyset$

F (1) $B \cap A = \emptyset$

V (2) Área $A \cap C < 2$

F (3) Área $B < \text{Área}(A \cup C)$

Solução. Vide Figura 1.27 e observe que $B \cap C = C \neq \emptyset$; $B \cap A = A \neq \emptyset$; Área $A \cap C < \text{Área} \Delta_{(0,-1),(2,-2),(2,0)} = \frac{2 \times 2}{2} = 1 < 2$ e Área $B = +\infty \not< \text{Área}(A \cup C) < 2 \times 4 = 8$.

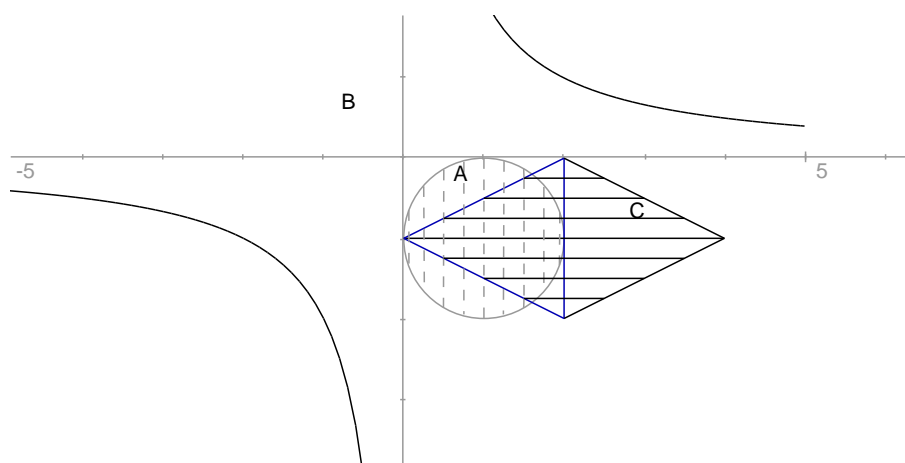


Figura 1.27: Conjuntos A, B e C.

ANPEC (2001 Q1). A respeito dos subconjuntos A, B, C definidos abaixo, no \mathbb{R}^2 , responda V (verdadeiro) ou F (falso):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 2| < 2\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 \leq 1\}$$

$$\text{e } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 0\}.$$

F (0) $C \subset A \cup B$

F (1) $A \cap B \cap C = \emptyset$

V (2) $B \subset C$

V (3) Área $A \cup C \geq 11$.

F (4) $A \cap B^c \cap C^c = \emptyset$, onde para $X \subset \mathbb{R}^2$ se define $X^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \notin X\}$.

Solução. Vide Figura 1.28. Em relação ao item (3), note que: área de $A = 2 \times \frac{4 \times 2}{2} = 8$,

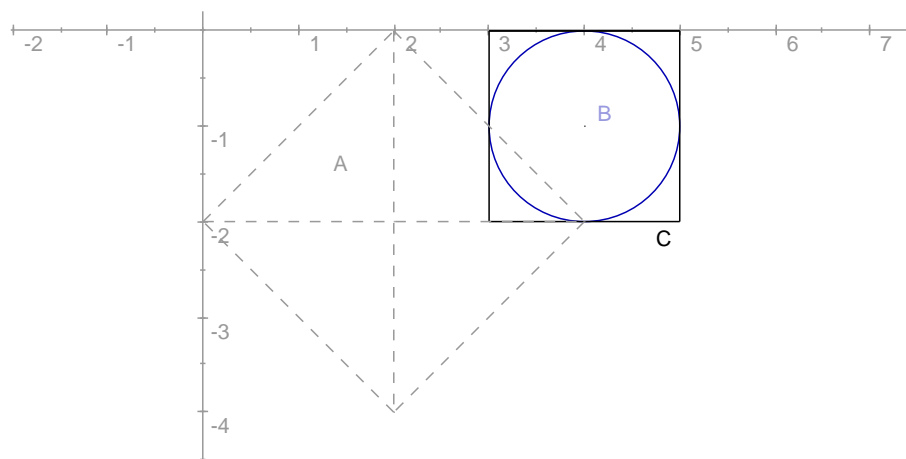


Figura 1.28: Conjuntos A, B e C

$$\text{Área}(C - A) = \text{Área}(C) - \text{Área}(A \cap C) = 2 \times 2 - \frac{1 \times 1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{8 - 1}{2} = \frac{7}{2}$$

e

$$\text{Área}(A \cup C) = \text{Área}(A) + \text{Área}(C - A) = 8 + \frac{7}{2} > 8 + \frac{6}{2} = 8 + 3 = 11.$$

ANPEC (2001 Q3). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

V (0) O plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x - 5y + 9z = 15\}$ contém os pontos $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 2)$ e $(2, -2, 1)$.

Solução.

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3) \in \pi? & -2(1) - 5(2) + 9(3) = -2 - 10 + 27 = 15 & \checkmark \\ (-1, 1, 2) \in \pi? & -2(-1) - 5(1) + 9(2) = 2 - 5 + 18 = 15 & \checkmark \\ (2, -2, 1) \in \pi? & -2(2) - 5(-2) + 9(1) = -4 + 10 + 9 = 15. & \checkmark \end{array}$$

V (1) O plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 12\}$ é ortogonal ao plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 17\}$.

Solução. Sejam $N_1 = (1, 2, 3)$ e $N_2 = (1, 1, -1)$ os vetores normais de ditos planos. Então

$$\langle N_1, N_2 \rangle = 1(1) + 2(1) + 3(-1) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow N_1 \perp N_2 \quad \text{i.e., ortogonais.}$$

V (2) A interseção dos três planos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 12\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 6\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 10\}$ é o conjunto vazio.

Solução. O problema equivale a incompatibilidade do sistema de equações lineares de matriz ampliada

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Observe que na matriz A , $l_3 = l_1 + l_2$ então o posto de A é menor ou igual a dois. Por outro lado, $[A|b]$ possui posto 3.

F (3) O plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 20\}$ é tangente à bola $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 11\}$ no ponto $(3, 4, 3)$.

Solução. Seja S a esfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 11\}$ e π , o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 20\}$. Temos que checar se $(3, 4, 3) \in S \cap \pi$ e se π é tangente a S nesse ponto. Note que $3 + 2(4) + 3(3) = 3 + 8 + 9 = 20$, ou seja $(3, 4, 3) \in \pi$, e $(3 - 2)^2 + (4 - 3)^2 + 3^2 = 1 + 1 + 9 = 11$, i.e., $(3, 4, 3) \in S$. Observe agora que para a tangência o vetor normal do plano teria de ser um múltiplo do raio da esfera até esse ponto. Seja $R = (3, 4, 3) - (2, 3, 0) = (1, 1, 3)$ o vetor que representa dito raio e $N = (1, 2, 3)$ o vetor normal do plano. Obviamente não existe $\alpha \in \mathbb{R}$; $R = \alpha N$. Então o plano não é tangente a esfera em $(3, 4, 3)$.

(Cálculo do plano tangente) Utilizando elementos de cálculo diferencial em várias variáveis podemos obter o plano tangente a uma superfície $M = f^{-1}(c)$ num ponto p , onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^1 e p é uma solução da equação $f(x) = c$ (M é o conjunto de todas as soluções de dita equação), se $\nabla f(p) \neq O$. Pois nesse caso M é localmente o gráfico de um função de $n - 1$ variáveis (Teorema da função implícita) e $\nabla f(p)$ é normal às curvas de níveis de f (a M em p) pois aponta na direção de máximo crescimento de f . Tendo em mãos um ponto do plano e seu vetor normal podemos descrever o hiperplano tangente a M no ponto p :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(p), x - p \rangle = 0\}. \quad (1.9)$$

Neste exemplo particular teríamos $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3)^2$, $c = 11$, $M = f^{-1}(11) = S$, $p = (3, 4, 3)$. Logo, $\nabla f(x) = (2(x_1 - 2), 2(x_2 - 3), 2(x_3))$ e, em

particular, $\nabla f(p) = (2(3-2), 2(4-3), 2(3)) = (2, 2, 6)$ e da equação (1.9) obtemos o hiperplano tangente

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^3; \langle (2, 2, 6), (x_1 - 3, x_2 - 4, x_3 - 3) \rangle = 0\} &= \\ \{x \in \mathbb{R}^3; 2x_1 - 6 + 2x_2 - 8 + 6x_3 - 18 = 0\} &= \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + 3x_3 = 16\}. \end{aligned}$$

V (4) A distância entre os planos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 12\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 13\}$ é menor do que 1 (um).

Solução. Sejam π_1 e π_2 os planos pela sua ordem e note que $P_1 = (0, 0, 4) \in \pi_1$ e $P_2 = (0, 0, 13/3) \in \pi_2$. Então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \inf_{x \in \pi_1, y \in \pi_2} d(x, y) \leq d(P_1, P_2) = \sqrt{(4 - 13/3)^2} = \frac{1}{3} < 1.$$

Cálculo efetivo da distância entre $\pi_1 : \langle N, X \rangle = \langle N, P_1 \rangle = d_1$ e $\pi_2 : \langle N, X \rangle = d_2$. Temos dois planos paralelos (descritos pelo mesmo vetor normal $N = (1, 2, 3)$) distintos $d_1 = 12 \neq d_2 = 13$ com $P_1 \in \pi_1$. Conhecemos então a reta ortogonal a π_1 que passa pelo ponto P_1 :

$$r : X = P_1 + tN, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como r também é ortogonal a π_2 , $d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, B)$ onde $B = r \cap \pi_2$. Para obtermos B basta substituir a equação da reta na equação do plano π_2

$$d_2 = \langle N, B \rangle = \langle N, P_1 + tN \rangle = \langle N, P_1 \rangle + t\langle N, N \rangle = d_1 + t\|N\|^2 \implies t = \frac{d_2 - d_1}{\|N\|^2}.$$

Assim,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, B) = \|B - P_1\| = \|tN\| = |t|\|N\| = \left| \frac{d_2 - d_1}{\|N\|^2} \right| \|N\| = \frac{|d_2 - d_1|}{\|N\|} \quad (1.10)$$

Aplicando (1.10) a este caso específico obtemos

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|13 - 12|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

ANPEC (2001 Q10). Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$, assinale (V) verdadeiro ou F(falso):

V (0) O valor máximo de f sujeito à restrição $|x| + |y| \leq 2$ é igual a 1 (um).

Solução. Vide Figura 1.29.

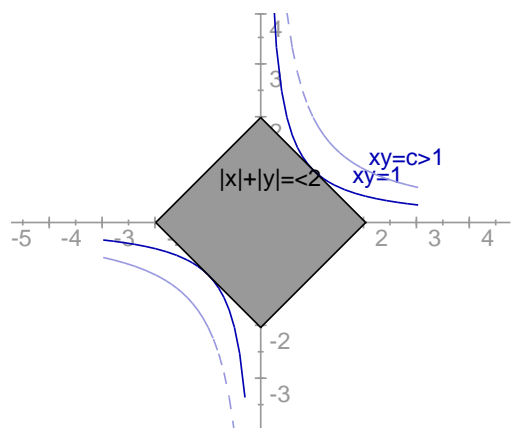


Figura 1.29: Questão 10-(0)-2001

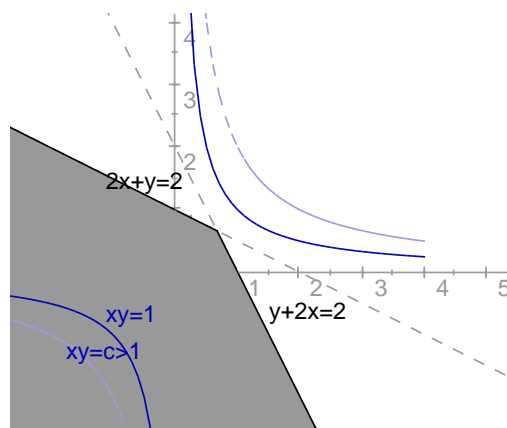


Figura 1.30: Questão 10-(1)-2001

F (1) O valor máximo de f sujeito às restrições $y + 2x \leq 2$ e $2y + x \leq 2$ é igual a 1 (um).

Solução. Note que f é ilimitada superiormente na região factível dada e consequentemente seu supremo é $+\infty$. Em particular, dito problema não possui solução. Vide Figura 1.30.

V (2) O valor máximo de f sujeito à restrição $x^2 + y^2 \leq 2$ é igual a 1 (um).

Solução. Vide Figura 1.31.

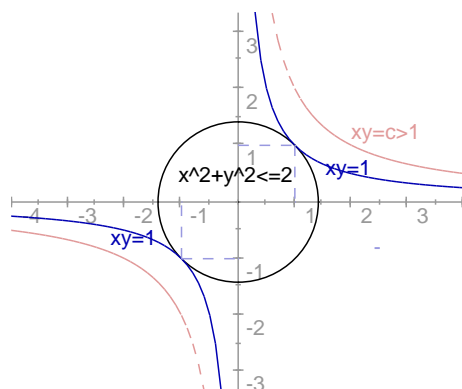


Figura 1.31: Questão 10-(2)-2001

V (3) O valor mínimo de f sujeito às restrições $-2 \leq y + 2x \leq 2$ e $-2 \leq 2y + x \leq 2$ é igual a -4 (menos quatro).

Solução. Vide Figura 1.32.

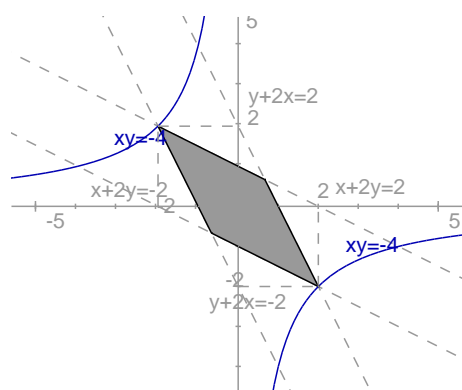


Figura 1.32: Questão 10-(3)-2001

- V (4) O valor máximo de f sujeito às restrições $x \geq 0$, $y \geq 0$, $-2 \leq y + 2x \leq 2$ e $-2 \leq 2y + x \leq 2$ é inferior a 1 (um).

Solução. Olhando o gráfico da Figura 1.33 podemos concluir que o nível máximo de f cuja curva de nível associada ainda possui interseção não vazia com a região viável é inferior a um. Se quiser determinar o valor exato, note que a curva de nível máximo de f passa pelo ponto de interseção entre as retas $x + 2y = 2$ e $y + 2x = 2$ que é $(2/3, 2/3)$ e que corresponde ao nível $2/3(2/3) = 4/9$ de f . Logo o valor máximo de f nessa região é $4/9 < 1$

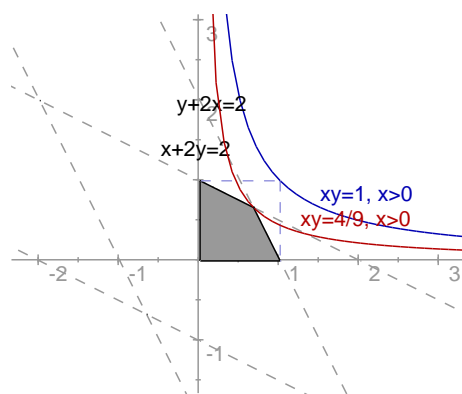


Figura 1.33: Questão 10-(4)-2001

ANPEC (2002 Q2). Considere os planos π_1 e π_2 definidos pelas equações

$$\pi_1: x - y + 2z = 3 \quad \text{e} \quad \pi_2: 2x + 3y - z = 6.$$

Responda V ou F.

F (0) O vetor direção da reta interseção aos planos π_1 e π_2 é $(1, 1, -1)$.

Solução. Note que os vetores diretores $(1, -1, 2)$ e $(2, 3, -1)$ não são colineares e conseqüentemente os planos são transversais, ou seja, a interseção deles de fato é uma reta. Multiplicando a segunda equação por 2 (dois) e somando obtemos: $5x - 5y = 15$, i.e., $y = 3 - x$. Substituindo na segunda equação obtemos $z = 2x + 3(3 - x) - 6 = -x + 3$. Ou seja

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(x, 3 - x, 3 - x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 3, 3) + x(1, -1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Como o vetor diretor da reta é $(1, -1, -1)$, que não coincide com múltiplo algum de $(1, 1, -1)$, concluímos que a afirmação é falsa.

V (1) A equação do plano passando pelo ponto $P = (2, 1, 1)$ e perpendicular à reta interseção de π_1 com π_2 é $x - y - z = 0$.

Solução. Sendo o plano em questão perpendicular a reta $\pi_1 \cap \pi_2$ conhecemos seu vetor normal: o vetor diretor de dita reta $(1, -1, -1)$ (vide item (0)), que coincide com o vetor normal do plano anunciado. Para descrever a equação do plano em questão podemos utilizar seu vetor normal e seu ponto P :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 = \langle (1, -1, -1), (x - 2, y - 1, z - 1) \rangle = x - 2 - y + 1 - z + 1 = x - y + z\}.$$

V (2) A equação do plano contendo a reta interseção de π_1 e π_2 e o ponto $Q = (1, -2, 1)$ é $3x - y + 4z = 9$.

Solução. Do item (1) podemos aproveitar o vetor diretor da reta interseção $v = (1, -1, -1)$ e um ponto qualquer dela, digamos $A = (0, 3, 3)$. Usando os pontos A e Q do plano podemos construir outra direção $u = AQ = Q - A = (1, -5, -2)$. Assim,

$$X = (x, y, z) = A + \lambda v + \mu u \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y - 3 & z - 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -3x + y - 4z + 9.$$

F (3) O ponto sobre o plano π_1 que está a menor distância de $Q = (1, -2, 1)$ tem coordenadas $(2/3, 5/3, 1/3)$.

Solução. Observe que $2/3 - 5/3 + 2(1/3) = (2 - 5 + 2)/3 = -1/3 \neq 3$, ou seja, $(2/3, 5/3, 1/3) \notin \pi_1$.

V (4) A menor distância entre o ponto $Q = (1, -2, 4)$ e o plano π_2 é $\sqrt{14}$.

Solução. Do plano π_2 conhecemos seu vetor normal $N_2 = (2, 3, -1)$ o que permite escrevermos a equação da reta normal ao plano π_2 passando pelo ponto Q : $X = Q + tN_2$, $t \in \mathbb{R}$. Achando o ponto interseção, B , desta reta com o plano obtemos a distância entre Q e o plano: $d(Q, B)$. Para obtermos B note que

$$6 = \langle N_2, Q + tN_2 \rangle = \langle N_2, Q \rangle + t\langle N_2, N_2 \rangle = 2(1) + 3(-2) - 1(4) + t(4 + 9 + 1) = -8 + 14t.$$

$$\text{Então, } t = \frac{6 - (-8)}{14} = 1 \text{ e}$$

$$d(Q, B) = \|B - Q\| = \|tN_2\| = |t|\|N_2\| = 1\sqrt{14} = \sqrt{14}.$$

Exercício. Prove que se $P, Q \in \mathbb{R}^3$ e $\pi : \{X \in \mathbb{R}^3; \langle N, X - P \rangle = 0\}$ então

$$d(Q, \pi) = \frac{|\langle N, Q - P \rangle|}{\|N\|}. \quad (1.11)$$

Mais ainda, o ponto $Y \in \pi$ que realiza dita distância é

$$Y = Q + \frac{\langle N, Q - P \rangle}{\|N\|^2} N.$$

ANPEC (2003 Q2). Assinale V ou F:

F (0) A equação da reta que passa por $P_0 = (2, -1)$ e é perpendicular à reta que passa pelos pontos $P_1 = (2, -2)$ e $P_2 = (5, 0)$ é $3x + 2y = 5$.

Solução. Note que $3(2) + 2(-1) = 6 - 2 = 4 \neq 5$. Logo, a reta $3x + 2y = 5$ não passa pelo ponto P_0 .

V (1) As retas $a_0x + b_0y - c_0 = 0$ e $a_1x + b_1y - c_1 = 0$ interceptam-se caso $a_0a_1 + b_0b_1 = 0$.

Solução. Os vetores normais $N_0 = (a_0, b_0)$ e $N_1 = (a_1, b_1)$ são ortogonais caso $a_0a_1 + b_0b_1 = 0$ e, conseqüentemente as retas são ortogonais; em particular, interceptam-se.

V (2) Se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = 3 + \lambda(x_0 - 2)$, $y_0 = 5 + \lambda(y_0 - 3)$ e $z_0 = 4 + \lambda(z_0 - 5)$, então o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ está sobre a reta determinada por $P_1 = (2, 3, 5)$ e $P_2 = (3, 5, 4)$.

Solução. Observe que a existência de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} x_0 = 3 + \lambda(x_0 - 2) \\ y_0 = 5 + \lambda(y_0 - 3) \\ z_0 = 4 + \lambda(z_0 - 5) \end{cases} \implies P_0 \in r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = P_2 + tP_1\vec{P}_0, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Então, P_1 também faz parte da reta r e P_0 , P_1 e P_2 estão sobre a mesma reta, que também é determinada pelos pontos P_1 e P_2 .

V (3) Se a distância do ponto $P = (x, y, z)$ ao ponto $Q = (1, -2, 0)$ é 5, então $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 20$.

Solução.

$$\begin{aligned} 5 &= d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2} \implies \\ 25 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 \implies \\ 20 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y. \end{aligned}$$

F (4) A equação do plano perpendicular ao plano $2x - 3y + z - 5 = 0$ e que passa pelos pontos $P_0 = (2, -6, 4)$ e $P_1 = (3, -6, 5)$ é $3x + y - 3z = 0$.

Solução. P_0 não verifica a equação do plano: $3(2) + (-6) - 3(4) = 6 - 6 - 12 = -12 \neq 0$.

ANPEC (2004 Q2). Responda V ou F:

V (0) A equação da reta que passa pelos ponto $(2, -1)$ e $(1, 1)$ é $y + 2x = 3$.

Solução. Levando em consideração que dois pontos diferentes definem uma única reta no plano e que a equação dada corresponde à equação geral de uma reta basta checar que os dois pontos dados verificam dita equação: $-1 + 2(2) = -1 + 4 = 3$ e $1 + 2(1) = 3$.

V (1) O plano tangente à superfície dada por $z = x^2 + y - xy$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ é o conjunto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } z = x\}$.

Solução. Para a resolução desta questão utilizaremos um elemento de cálculo diferencial conhecido como Teorema da Função Implícita. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y - xy - z$, então F é uma função de classe \mathcal{C}^1 , a região $z = x^2 + y - xy$ corresponde ao conjunto solução da equação $F(x, y, z) = 0$ e (fazendo $x = 1 = y$ obtemos $z = 1$) o ponto $P = (1, 1, 1)$ é uma solução de dita equação em que

$$\nabla F(P) = (2x - y, 1 - x, -1)|_{x=y=z=1} = (1, 0, -1) \neq (0, 0, 0).$$

Então o (hyper)plano tangente em questão é

$$\begin{aligned} \{(x, y, z); \langle \nabla F(P), (x, y, z) - P \rangle = 0\} &= \{(x, y, z); \langle (1, 0, -1), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z); 0 = x - 1 - z + 1 = x - z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}. \end{aligned}$$

V (2) Se $f(x)$ é uma função côncava e $r(x)$ é uma sua reta tangente qualquer, então $r(x) \geq f(x)$, para qualquer x no domínio de definição de f .

Solução. Caracterização de funções côncavas diferenciáveis.

V (3) A interseção do plano $z - x - y = 3$ com o plano $z + x + y = 4$ é uma reta em \mathbb{R}^3 .

Solução. Os vetores normais $(-1, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ não são co-lineares (um não é múltiplo do outro, i.e., são linearmente independentes) então os planos são transversais e a interseção é uma reta (o sistema de equações lineares associado é compatível com nulidade um).

F (4) Em \mathbb{R}^3 , a interseção de dois planos é sempre não-vazia.

Solução. Considere, por exemplo, os planos $z = 0$ e $z = 1$.

ANPEC (2010 Q8). Julgue as afirmativas:

V (0) Se $u = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, então $v = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um vetor unitário, paralelo a u , em que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$;

Solução. Note que

$$u = 2e_1 + e_2 - 2e_3 = 2(1, 0, 0) + (0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = (2, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, -2) = (2, 1, -2).$$

Assim,

$$u = \lambda v \iff (2, 1, -2) = \lambda \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right) \iff \lambda = -3.$$

Logo, u e v são paralelos. Note ainda que

$$\|v\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

V (1) Sejam $u = (x, 1, 0)$, $v = (-2, y, 3)$ e $w = (y, -1, -1)$, tais que u é perpendicular a v e a w . Então $x^2 = 1/2$;

Solução. Sabendo que $u \perp v$ e $u \perp w$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, v \rangle = -2x + y + 0 = -2x + y \implies y = 2x \\ 0 &= \langle u, w \rangle = xy - 1 + 0 = xy - 1 \implies xy = 1 \\ \implies 1 &= x(2x) = 2x^2 \implies x^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

F (2) Considere os pontos $P_1 = (x, 1, 0)$ e $P_2 = (-2, y, 3)$. Se a distância de P_1 a P_2 é igual a distância de P_2 ao plano xy , então $x = 1$ e $y = -2$;

Solução. A distância de P_2 ao plano xy é obviamente 3. Logo,

$$3 = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x+2)^2 + (1-y)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2 + 9}.$$

Elevando ao quadrado obtemos

$$9 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + 9 \implies (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0 \implies x = -2 \quad \wedge \quad y = 1.$$

F (3) Seja (a, b) um ponto na interseção da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 com a reta $y = 2x$. Então $a^2 = 1/2$;

Solução. Sabendo que (a, b) é um ponto da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, concluímos que

$$a^2 + b^2 = 1;$$

e sabendo que (a, b) pertence à reta $y = 2x$, concluímos que $b = 2a$. Substituindo na equação acima chegamos a

$$a^2 + (2a)^2 = 1 \implies a^2 + 4a^2 = 1 \implies a^2 = \frac{1}{5}.$$

V (4) Seja r a reta tangente ao gráfico de $y = 2x^2 - 3x + 5$, no ponto $(1, 4)$. A equação da reta perpendicular a r e que passa por $(-1, 2)$ é $y = -x + 1$.

Solução. Calculando a derivada de $y(x) = 2x^2 - 3x + 5$ no ponto $x = 1$ obtemos a inclinação da tangente ao gráfico de f em $(1, 4)$:

$$y'(x) = 4x - 3 \implies y'(1) = 4 - 3 = 1 \implies \theta = \pi/4.$$

Então, o ângulo de r em relação à horizontal é $\alpha = \pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$ e $\tan(3\pi/4) = -1$. Ou seja, o coeficiente angular de r é -1 . Usando agora que r passa pelo ponto $(-1, 2)$ concluímos que:

$$y = -1(x + 1) + 2 = -x - 1 + 2 = -x + 1.$$

ANPEC (2011 Q2). Considere as retas r_1 e r_2 , no plano, definidas por

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

em que $n_1 = (a_1, b_1)$ e $n_2 = (a_2, b_2)$ são vetores não nulos ortogonais à r_1 e r_2 , respectivamente. Denotamos por $d(P, r)$ a distância de um ponto P à uma reta r . Julgue as afirmativas:

V (0) Se as retas r_1 e r_2 são perpendiculares, então $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Solução. Nesse caso $n_1 \perp n_2$, i.e., $0 = \langle n_1, n_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$.

F (1) Se $(1, 1) \in r_1$ e r_1 é paralela à reta dada por $2x + 3y - 6 = 0$, então $(3, 2) \in r_1$.

Solução. Se r_1 é paralela à reta dada por $2x + 3y - 6 = 0$, então $n_1 = (2, 3)$ e se $(1, 1) \in r_1$ concluímos que $2(1) + 3(1) + c_1 = 0$. Ou seja, $c_1 = -5$ e r_1 é descrita pela equação $2x + 3y = 5$. Logo, $2(3) + 3(2) = 12 \neq 5$ implica $(3, 2) \notin r_1$.

V (2) Considere em r_1 os valores $c_1 = 0$ e $n_1 = (1, -1)$. Se pontos distintos $P = (3, y_1)$ e $Q = (3, y_2)$ são tais que $d(P, r_1) = d(Q, r_1) = \sqrt{2}$, então $y_1 + y_2 = 6$.

Solução. Para estes dados a reta r_1 corresponde a $y = x$. Os pontos P e Q possuem a mesma abscissa $x = 3$; assim, a condição descrita equivale a $y_1 - 3 = 3 - y_2$ (vide Figura 1.34).

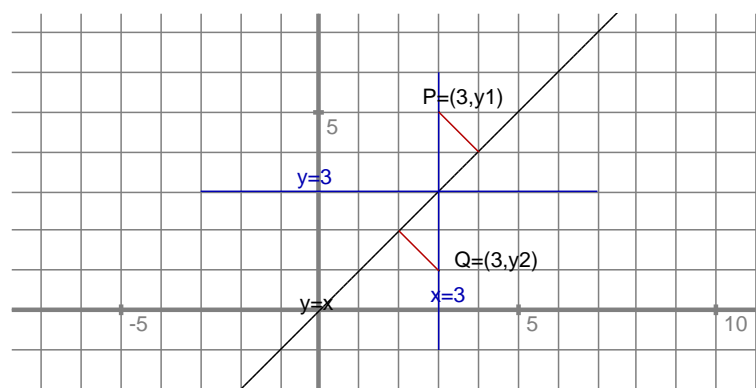


Figura 1.34: $d(P, r) = d(Q, r)$

Observação 1.34. Poderíamos também explicitar a distância em cada caso via a projeção sobre a reta, que no caso é a gerada pelo vetor $n_1 = (1, 1)$:

$$P_{r_1}(P) = \frac{\langle P, n_1 \rangle}{\|n_1\|^2} n_1 = \frac{3 + y_1}{2} (1, 1) \quad \text{e} \quad P_{r_1}(Q) = \frac{\langle Q, n_1 \rangle}{\|n_1\|^2} n_1 = \frac{3 + y_2}{2} (1, 1).$$

Então,

$$d(P, r_1) = d(P, P_{r_1}(P)) = \sqrt{(3 - (3 + y_1)/2)^2 + (y_1 - (3 + y_1)/2)^2}$$

e

$$d(Q, r_1) = d(Q, P_{r_1}(Q)) = \sqrt{(3 - (3 + y_2)/2)^2 + (y_2 - (3 + y_2)/2)^2}.$$

Logo, $d(P, r_1) = d(Q, r_1)$ se e somente se

$$\frac{(3 - y_1)^2}{4} + \frac{(y_1 - 3)^2}{4} = \frac{(3 - y_2)^2}{4} + \frac{(y_2 - 3)^2}{4} \Leftrightarrow (y_1 - 3)^2 = (y_2 - 3)^2 \Leftrightarrow |y_1 - 3| = |y_2 - 3|.$$

Note que se ambos valores absolutos saírem com o mesmo sinal ter-se-ia $y_1 = y_2$ em contradição com $P \neq Q$. Ou seja, $y_1 - 3 = -(y_2 - 3) = 3 - y_2$, ou ainda, $y_1 + y_2 = 6$.

Observação 1.35. Também poderia ser usada a fórmula (1.11) para descrever a distância até a reta: observe que $(0, 0)$ é um ponto da reta e que $n_1 = (1, -1)$ é seu vetor normal. Então,

$$\sqrt{2} = d(P, r_1) = \frac{|\langle n_1, (3, y_1) - (0, 0) \rangle|}{\|n_1\|} = \frac{|3 - y_1|}{\sqrt{2}} \implies |3 - y_1| = 2.$$

De forma análoga, $|3 - y_2| = 2 = |3 - y_1|$. De onde segue o mesmo argumento da observação anterior para obter o resultado enunciado.

F (3) As retas $y = x$, $y = 1$ e $y = -x + 2$ se interceptam formando um triângulo.

Solução. A interseção é um ponto. Vide Figura 1.35.

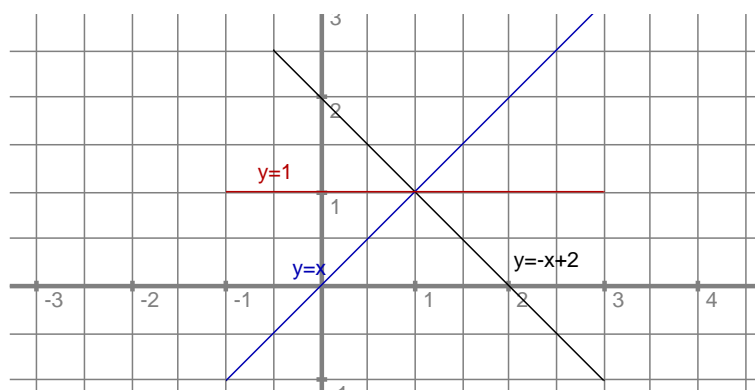


Figura 1.35: Retas $y = x$, $y = 1$ e $y = -x + 2$.

V (4) Se $a_2 b_2 c_2 \neq 0$ e $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então r_1 e r_2 representam a mesma reta.

Solução. Porque nessa situação uma equação é um múltiplo não nulo da outra. De fato, se $\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então $\lambda \neq 0$, $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ e $c_1 = \lambda c_2$; e $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, se e somente se $\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + \lambda c_2 = 0$, se e somente se $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

ANPEC (2011 Q10). Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto limitado pelas retas

$$r_1 : x = 0, \quad r_2 : y = 0, \quad r_3 : 4x + 3y - 40 = 0 \quad \text{e} \quad r_4 : x + 2y - 20 = 0.$$

Seja $p \in X$ o ponto de máximo da função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x + 5y$. Julgue os seguintes itens:

V (0) No ponto p , o gradiente de f não é ortogonal a qualquer das retas r_1 , r_2 , r_3 e r_4 .

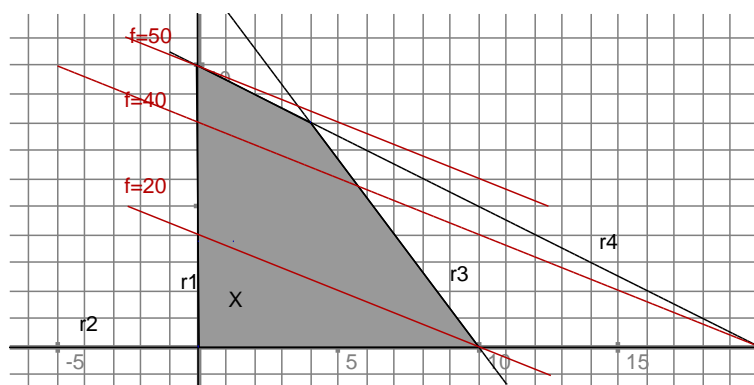


Figura 1.36: Conjunto X e curvas de nível de f .

Solução. Note que a reta $2x + 5y = c$ (curva de nível c de f) não é paralela a nenhuma das retas dadas (Vide Figura 1.36).

F (1) O valor da função f no ponto resultante da interseção das retas r_2 e r_3 é 70.

Solução. A interseção das retas r_2 e r_3 é o ponto $(10, 0)$ e $f(10, 0) = 2(10) + 5(0) = 20$ (Vide Figura 1.36).

V (2) O valor da função f no ponto resultante da interseção das retas r_3 e r_4 é 48.

Solução. Calculemos a interseção das retas r_3 e r_4 :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 40 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 40 \\ -4x + -8y = -80 \end{cases} \implies -5y = -40 \implies y = \frac{40}{5}.$$

Logo, $x = 20 - 2(40/5) = 20/5 = 4$ e substituindo obtemos

$$f(4, 40/5) = 2(4) + 5\frac{40}{5} = 8 + 40 = 48.$$

F (3) $p = (10, 0)$.

Solução. Vide Figura 1.36 para concluir que $p = (0, 10)$.

V (4) $f(p) = 50$.

Solução. Note que $p = (0, 10)$ (Vide item (3)). Então, $f(p) = 2(0) + 5(10) = 50$.

ANPEC (2012 Q3). Julgue as afirmativas:

F (0) A equação da reta que passa por $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ e é paralela a reta que passa por $(0, 3)$ e por $(5, 0)$ é $3x + 5y + 3 = 0$.

Solução. Note que $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ não pertence a reta dada:

$$3\left(\frac{1}{3}\right) + 5\left(\frac{2}{5}\right) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \neq 0.$$

Solução (Solução 2). Calculemos a reta em questão. Sendo paralela a reta que passa por $(0, 3)$ e por $(5, 0)$, seu vetor diretor é $v = (5, 0) - (0, 3) = (5, -3)$; assim, sua equação vetorial é

$$\vec{X} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) + \lambda(5, -3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e a paramétrica é

$$x = \frac{1}{3} + 5\lambda, \quad \wedge \quad y = \frac{2}{5} - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$3x - 1 = 15\lambda, \quad \wedge \quad 5y - 2 = -15\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 1 = -(5y - 2) = -5y + 2.$$

Assim, a reta em questão possui a equação geral $3x + 5y - 3 = 0$.

V (1) As circunferências C_1 de centro em $(0, 0)$ e raio 1 e C_2 de centro em $(1, 0)$ e raio 2 se interceptam num único ponto.

Solução. Se interceptam em $(-1, 0)$ e só. De fato, $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + y^2 = 4\}$. Logo, $(x, y) \in C_1 \cap C_2$ se e somente se $y^2 = 1 - x^2$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 4$. Então

$$(x-1)^2 + 1 - x^2 = 4 \implies x^2 - 2x + 1 + 1 - x^2 = 4 \implies -2x + 2 = 4 \implies -x + 1 = 2 \implies x = -1.$$

Logo, $y^2 = 1 - (-1)^2 = 0$. Ou seja, $C_1 \cap C_2 = \{(-1, 0)\}$.

F (2) Os pontos $(1, 1)$, $(2, 3)$ e $(a, -8)$ pertencem a mesma reta se e somente se $a = \frac{7}{2}$.

Solução. A reta que passa por $(1, 1)$, $(2, 3)$ pode ser representada pela equação vetorial

$$\vec{X} = (1, 1) + t((2, 3) - (1, 1)) = (1, 1) + t(1, 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

Assim, $(a, -8)$ pertence a dita reta se e somente se

$$\exists t \in \mathbb{R}; \quad (a, -8) = (1, 1) + t(1, 2) \Leftrightarrow (a - 1, -9) = (t, 2t) \Leftrightarrow a - 1 = t \quad \wedge \quad -9 = 2t$$

ou seja,

$$t = -\frac{9}{2} \quad \text{e} \quad a = 1 + t = 1 - \frac{9}{2} = \frac{2 - 9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

V (3) Sejam $P = (3, -1, 2)$ e $Q = (4, -2, -1)$. A equação do plano que passa por P e é perpendicular ao vetor \vec{PQ} é $x - y - 3z + 2 = 0$.

Solução. O vetor normal ao plano é $\vec{PQ} = Q - P = (4 - 3, -2 - (-1), -1 - 2) = (1, -1, -3)$. Assim, (x, y, z) pertence ao plano em questão se e somente se

$$0 = \langle (1, -1, -3), (x - 3, y - (-1), z - 2) \rangle = x - 3 - (y + 1) - 3(z - 2) \Leftrightarrow$$

$$0 = x - y - 3z - 3 - 1 + 6 \Leftrightarrow x - y - 3z + 2 = 0.$$

V (4) Sejam $m, k \in \mathbb{R}$. Se os planos $2x + ky + 3z - 5 = 0$ e $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ são paralelos, então $k + m = -1$.

Solução. Note que $N_1 = (2, k, 3)$ e $N_2 = (m, -6, -6)$ são os respectivos vetores normais. Assim, os planos são paralelos se e somente se $N_1 = \alpha N_2$ para algum α real:

$$(2, k, 3) = \alpha(m, -6, -6) \Leftrightarrow 2 = \alpha m \quad \wedge \quad k = -6\alpha \quad \wedge \quad 3 = -6\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1/2, \quad k = 3, \quad m = -4.$$

Então, $k + m = 3 - 4 = -1$.

ANPEC (2013 Q2). Dadas as retas $L_1 : 4x + 3y - 12 = 0$ e $L_2 : 3x + y - 6 = 0$, analise as seguintes afirmativas:

V (0) Um vetor unitário paralelo à reta L_1 é o $(-3/5, 4/5)$.

Solução. A reta L_1 tem traço com os eixos coordenados em $(3, 0)$ e $(0, 4)$, então $v = (3, 0) - (0, 4) = (3, -4)$ é paralelo à reta L_1 (vide Figura 1.37). Observe agora que $(-3/5, 4/5) = \frac{-1}{5}(3, -4)$; ou seja, também é paralelo a L_1 . Basta então checar que sua norma é um:

$$\|(-3/5, 4/5)\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1.$$

V (1) A equação da reta perpendicular a L_2 , que passa pela interseção de L_1 e L_2 é $x - 3y + 6 = 0$.

Solução. Sendo perpendicular a L_2 , o vetor diretor dessa reta pode ser escolhido como sendo o vetor normal a L_2 , $N_2 = (3, 1)$. Determinemos a interseção de L_1 e L_2 :

$$4x + 3y = 12 \quad \wedge \quad 3x + y = 6 \implies 4x + 3y - 3(3x + y) = 12 - 3 \cdot 6 \implies$$

$$-5x = -6 \implies x = \frac{6}{5} \quad \wedge \quad y = 6 - 3\frac{6}{5} = \frac{12}{5}.$$

Então, a reta em questão verifica a equação

$$(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right) + t(3, 1), \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} + 3t \wedge y = \frac{12}{5} + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{x - \frac{6}{5}}{3} = t = \frac{y - \frac{12}{5}}{1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - \frac{6}{5} = 3y - \frac{36}{5} \Leftrightarrow \\ x - 3y = \frac{6}{5} - \frac{36}{5} = \frac{-30}{5} = -6 \Leftrightarrow x - 3y + 6 = 0. \end{aligned}$$

F (2) A equação da bissetriz do maior ângulo que formam L_1 e L_2 é $10x - 25y + 48 = 0$.

Solução. Começemos identificando um vetor diretor para a reta descrita; bastaria para tal identificar qualquer vetor não nulo $w = (x, y)$ perpendicular a seu vetor normal $N = (10, -25)$:

$$\langle (x, y), (10, -25) \rangle = 0 \Leftrightarrow 10x - 25y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x, \quad \text{digamos } w = (5, 2).$$

Para dita reta ser bissetriz, o ângulo entre w e os vetores diretores de L_1 e L_2 teria que ser o mesmo. Um vetor diretor de L_1 é $v = (3, -4)$, como vimos no item (0), e, de forma análoga, um vetor diretor de L_2 é $u = (0, 6) - (2, 0) = (-2, 6)$ (vide Figura 1.37). Seja θ_1 o (menor) ângulo entre w e v e θ_2 , o (menor) ângulo entre w e u . Então,

$$\cos(\theta_1) = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\| \cdot \|v\|} \quad \text{e} \quad \cos(\theta_2) = \frac{\langle w, u \rangle}{\|w\| \cdot \|u\|}.$$

Note que

$$\langle w, v \rangle = 5 \cdot 3 + 2(-4) = 15 - 8 = 7, \quad \|w\| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}, \quad \|v\| = 5$$

e

$$\langle w, u \rangle = 5(-2) + 2 \cdot (6) = -10 + 12 = 2 \quad \text{e} \quad \|u\| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Logo,

$$\cos(\theta_1) = \frac{7}{5\sqrt{29}} \quad \text{e} \quad \cos(\theta_2) = \frac{2}{2\sqrt{29}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{10}}.$$

Os lados direitos das expressões acima são diferentes pois caso contrário ter-se ia

$$\frac{7}{5\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{10}} \Leftrightarrow 7\sqrt{10} = 5, \quad \text{um absurdo.}$$

Concluimos assim que $\cos(\theta_1) \neq \cos(\theta_2)$ e, em particular, $\theta_1 \neq \theta_2$.

F (3) Um vetor perpendicular à reta L_2 é $(-3, 1)$.

Solução. Os vetores perpendiculares a L_2 são múltiplos do seu vetor normal $N_2 = (3, 1)$, que não é o caso de $(-3, 1)$.

V (4) A hipérbole equilátera, que tem como assíntotas os eixos coordenados e é tangente a L_1 e L_2 é $xy = 3$.

Solução. A curva $xy = 3$ é de fato uma hipérbole retangular (ou equilátera - assíntotas ortogonais) que tem como assíntotas os eixos coordenados. Bastaria checar que L_1 e L_2 são retas tangentes à função $f(x) = 3/x$ (vide Figura 1.37). Determinemos primeiramente a interseção de L_1 com o gráfico de f :

$$\frac{3}{x} = 4 - \frac{4}{3}x \xrightarrow{x \neq 0} 9 = 12x - 4x^2 \Leftrightarrow 0 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} \implies f'(3/2) = -\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3},$$

que é exatamente a inclinação de L_1 . Concluimos assim que L_1 é tangente à curva $xy = 3$ em $(3/2, 2)$. Procedamos, de forma análoga, com a reta L_2 :

$$\frac{3}{x} = -3x + 6 \xrightarrow{x \neq 0} 3 = -3x^2 + 6x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow x = 1$$

ponto em que $f'(1) = -3$; justo a inclinação de L_2 .

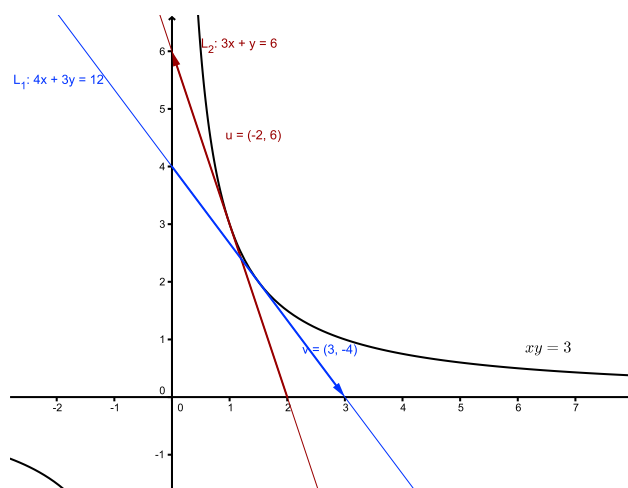


Figura 1.37: Retas L_1 , L_2 e curva $xy = 3$.

ANPEC (2015 Q7). Julgue e justifique as seguintes afirmativas:

F (0) A reta L , cuja equação vetorial é $(x, y, z) = (3 + t, -1 + 2t, 3t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, não passa pelo ponto $(3, -1, 0)$.

Solução. Passa sim: $t = 0$.

V (1) As equações $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ definem uma reta M , que tem como vetor direção $(1, 2, 3)$.

Solução. Ditas equações correspondem à versão simétrica, na forma simplificada, da reta de equação vetorial

$$(x, y, z) = (3, -1, 0) + t(1, 2, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para tal basta definir o parâmetro real t pelas equações simultâneas

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} = t \Leftrightarrow x-3 = t, \quad y+1 = 2t, \quad z = 3t$$

ou seja,

$$x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t \quad \text{e} \quad z = 0 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

V (2) As retas L e M dos itens anteriores são paralelas.

Solução. Elas tem vetores diretores paralelos. Na verdade são idênticas.

F (3) Uma reta L , com vetor direção v , é paralela ao plano P , com vetor normal n , se, e somente se, o produto vetorial de v e n é zero.

Solução. $v \times n = \vec{0}$ equivale à co-linearidade de v e de n . Assim, nesse caso, a reta seria normal ao plano.

F (4) Uma reta L , com vetor direção v , é perpendicular ao plano P , com vetor normal n , se, e somente se, o produto interno de v e n é zero.

Solução. $\langle v, n \rangle = 0$ equivale à ortogonalidade de v e n . Assim, nesse caso, a reta seria paralela ao plano.

ANPEC (2017 Q11). Analise a veracidade das seguintes afirmações:

F (0) Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sejam perpendiculares deve-se cumprir $a_1a_2 + b_1b_2 = 1$;

Solução. Note que os vetores $N_1 = (a_1, b_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2)$ são normais às retas em questão; logo, para que as retas sejam perpendiculares deve-se cumprir $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$, i.e., $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

- V (1) Para que as retas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se interceptem em um único ponto deve-se cumprir $a_1b_2 \neq a_2b_1$;

Solução. Pois no caso contrário, $a_1b_2 = a_2b_1$, ter-se-ia $a_1/b_1 = a_2/b_2$ (supondo $b_1, b_2 \neq 0$); que corresponde a retas com a mesma inclinação, ou seja, paralelas. O mesmo acontece quando $b_1 = 0$, que implica $b_2 = 0$ pois a_1 não poderia ser simultaneamente zero, ou $b_2 = 0$, que implica $b_1 = 0$: retas verticais no plano e, assim, paralelas. Sendo retas paralelas ou não há interseção ou a interseção se dá em infinitos (todos) pontos.

- F (2) Ao girar o vetor $(4, 2\sqrt{3})$ de um ângulo de 60° em sentido anti-horário resulta o vetor $(3\sqrt{3}, -1)$;

Solução. Sejam $u = (4, 2\sqrt{3})$ e $v = (3\sqrt{3}, -1)$ os vetores em questão. Então,

$$\|u\| = \sqrt{16 + 4 \cdot 3} = \sqrt{28}, \quad \|v\| = \sqrt{9 \cdot 3 + 1} = \sqrt{28} \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

Assim, se o menor ângulo θ entre eles fosse 60° então, $\cos(\theta) = 1/2$ e

$$10\sqrt{3} = \langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) = 28 \frac{1}{2} = 14$$

gerando uma contradição pois $\sqrt{3} \neq \frac{7}{5}$.

- V (3) A reta definida pelas equações $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ e $-x + 2y - 3z + 4 = 0$ é perpendicular ao plano dado por $-17x + 2y + 7z + 10 = 0$

Solução. Adicionando à primeira equação a segunda multiplicada por dois (2) obtém-se $7y - 2z = -13$, ou seja,

$$y = -\frac{13}{7} + \frac{2}{7}z \implies x = 4 + 2y - 3z = 4 + 2\left(-\frac{13}{7} + \frac{2}{7}z\right) - 3z = \frac{2}{7} - \frac{17}{7}z.$$

Logo, a reta interseção é formada das ternas (x, y, z) tais que

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{7} - \frac{17}{7}z, -\frac{13}{7} + \frac{2}{7}z, z\right) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{13}{7}, 0\right) + z\left(\frac{-17}{7}, \frac{2}{7}, 1\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Assim, $v = \frac{1}{7}(-17, 2, 7)$ é um vetor diretor da reta, que é co-linear ao vetor normal $N = (-17, 2, 7)$ do plano.

- V (4) Para que a reta que passa por $(-1, -1)$ e tenha direção dada pelo vetor $(1, b)$ seja tangente à parábola $y = x^2$, o valor de b pode ser $0,82$ ou $-4,82$ (usando apenas duas casas decimais).

Solução. Temos as equações da reta:

$$r : (x, y) = (-1, -1) + t(1, b), \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+1 = t, \quad y = -1+tb \implies y = -1+b(x+1).$$

Para que r seja tangente à parábola $y = x^2$ é necessário que exista interseção entre elas e que nesse ponto as inclinações sejam iguais:

$$-1 + b(x+1) = x^2 \quad \wedge \quad b = 2x \implies -1 + 2x(x+1) = x^2 \implies x^2 + 2x - 1 = 0 \implies$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \implies b = 2(-1 \pm \sqrt{2}) \approx 2(-1 \pm 1.41) = 2 \begin{cases} 0.41 \\ -2.41 \end{cases} = \begin{cases} 0.82 \\ -4.82 \end{cases}$$

ANPEC (2018 Q3). Considere \vec{x} , \vec{v} e \vec{w} como vetores em \mathbb{R}^3 e $s, t \in \mathbb{R}$. Verifique a veracidade das afirmações abaixo, em que o produto interno é denotado por “ \cdot ” e o produto vetorial por “ \times ”:

- V (0) O conjunto $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{v} = 10\}$ é um plano perpendicular ao vetor \vec{v} ;

Solução. Decorre da definição da equação geral de um plano (supondo, claro está, que \vec{v} não seja o vetor nulo).

- F (1) A reta definida por $\vec{x}(t) = t\vec{v}$ e o plano $\vec{x}(s, t) = s\vec{v} + t\vec{w}$ nunca se encontram;

Solução. Na verdade, a tal reta está contida no plano.

- F (2) Dados os vetores \vec{v} e \vec{w} , o plano definido pela equação paramétrica $\vec{x}(s, t) = s\vec{v} + t\vec{w}$ coincide com o plano definido pela equação $\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$;

Solução. O plano definido pela equação paramétrica contém a origem, enquanto o outro não.

- F (3) Seja $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Então, se \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, temos $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$;

Solução. Na verdade, nesse caso ter-se-ia o Teorema de Pitágoras: $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. De fato,

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2 \underbrace{\langle u, v \rangle}_0 + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

- V (4) Sejam \vec{p}, \vec{q} e \vec{r} pontos no espaço que definem um triângulo A e sejam t_1, t_2 e $t_3 \in \mathbb{R}$. Se $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, então o ponto $\vec{x} = t_1\vec{p} + t_2\vec{q} + t_3\vec{r}$ encontra-se no plano definido pelo triângulo A .

Solução. A equação vetorial do plano que contém os pontos p, q e r verifica:

$$X = p + t\vec{pq} + s\vec{pr} = p + t(q - p) + s(r - p) = \underbrace{(1 - t - s)}_{t_1}p + \underbrace{t}_{t_2}q + \underbrace{s}_{t_3}r, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

em que

$$t_1 + t_2 + t_3 = (1 - t - s) + t + s = 1.$$

ANPEC (2019 Q3). Sejam P e Q dois planos cujas equações cartesianas são $x + 2y - 3z = 1$ e $2x - y + 2z = 3$, respectivamente. Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

- F (0) A equação vetorial da reta ortogonal ao plano P , que passa pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$, é $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(1, 2, -3)$, para todo t real.

Solução. O vetor $N_p = (1, 2, -3)$ é normal ao plano P ; logo, diretor da reta ortogonal. A questão reduz-se a checar se o ponto em questão pertence, ou não, à reta dada:

$$(-2, 0, z_0) = (-2, 0, 1) + t(1, 2, -3) = (-2 + t, 2t, 1 - 3t) \Leftrightarrow t = 0 \wedge z_0 = 1.$$

Assim, a afirmação é falsa em geral (desde que $z_0 \neq 1$).

O correto seria $(x, y, z) = (-2, 0, z_0) + t(1, 2, -3), \forall t \in \mathbb{R}$.

- F (1) A equação paramétrica da reta ortogonal ao plano Q , que passa pelo ponto $(1, y_0, 2) \in Q$, é $x = 1 + t; y = 3 + 2t; z = 3 - 2t$; para todo t real.

Solução. O vetor $N_q = (2, -1, 2)$, que é normal ao plano Q , não é paralelo ao vetor $(1, 2, -2)$, que é o diretor da reta dada.

O correto seria $(x, y, z) = (1, y_0, 2) + s(2, -1, 2) = (1 + 2s, y_0 - s, 2 + 2s), \forall s \in \mathbb{R}$.

- V (2) Um vetor ortogonal ao plano gerado pelas retas ortogonais aos planos P e Q é $(1, -8, -5)$.

Solução. Basta checar se $A = (1, -8, -5)$ é ortogonal a N_p e N_q simultaneamente (ou seja, se é ou não paralelo a $N_p \times N_q$):

$$\langle A, N_p \rangle = \langle (1, -8, -5), (1, 2, -3) \rangle = 1 - 16 + 15 = 0$$

e

$$\langle A, N_q \rangle = \langle (1, -8, -5), (2, -1, 2) \rangle = 2 + 8 - 10 = 0$$

F (3) Sejam L_P a reta ortogonal a P passando pelo ponto $(-2, 0, z_0) \in P$ e L_Q a reta ortogonal a Q passando pelo ponto $(1, y_0, 2) \in Q$, L_P e L_Q têm um ponto em comum.

Solução. Dos itens (0) e (1) temos

$$L_P : (x, y, z) = (-2, 0, z_0) + t(1, 2, -3), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e

$$L_Q : (x, y, z) = (1, y_0, 2) + s(2, -1, 2), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$L_P \cap L_Q \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}; \quad (-2, 0, z_0) + t(1, 2, -3) = (1, y_0, 2) + s(2, -1, 2) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{t(1, 2, -3) - s(2, -1, 2)}_{(t-2s, 2t+s, -3t-2s)} = (1, y_0, 2) - (-2, 0, z_0) = (3, y_0, 2-z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2s = 3 \\ 2t + s = y_0 \\ -3t - 2s = 2 - z_0. \end{cases}$$

Somando à primeira duas vezes a segunda

$$t + 4t - 2s + 2s = 3 + 2y_0 \Rightarrow t = \frac{3 + 2y_0}{5}.$$

Subtraindo a equação 3 da primeira

$$t + 3t - 2s + 2s = 3 - 2 + z_0 \Rightarrow t = \frac{1 + z_0}{4} \Rightarrow \frac{3 + 2y_0}{5} = \frac{1 + z_0}{4}$$

o que não é verdade em geral.

V (4) A equação cartesiana do plano gerado pelas retas L_P e L_Q do item (3) e que contém o ponto $(1, 1, 1)$ é $x - 8y - 5z + 12 = 0$.

Solução. Do item (2), $N = (1, -8, -5)$ é normal ao plano em questão, assim, sua equação geral (conhecido um ponto A dele) é

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N, X - A \rangle = \langle (1, -8, -5), (x, y, z) - (1, 1, 1) \rangle \\ &= \langle (1, -8, -5), (x - 1, y - 1, z - 1) \rangle = 1(x - 1) - 8(y - 1) - 5(z - 1) \\ &= x - 1 - 8y + 8 - 5z + 5 = x - 8y - 5z - 12. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Este capítulo trata inicialmente de matrizes e da álgebra das matrizes e suas aplicações na resolução de sistemas de equações lineares.

2.1 Conceito de matriz e classificação básica

Chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Os elementos de uma matriz podem ser números, funções ou ainda outras matrizes. A notação usual para a matriz A de ordem $m \times n$, relativo a m linhas e n colunas, que possui na posição descrita pela linha i e coluna j o elemento a_{ij} é

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1. $B = [3 \ 0 \ 1]$ representa a matriz chamada B de uma linha e três colunas (ordem 1×3) que possui os elementos $b_{11} = 3$, $b_{12} = 0$ e $b_{13} = 1$.

Exemplo 2.2. $C = [0]_{1 \times 1}$ é uma matriz de uma única linha e uma única coluna, com um único elemento: $c_{11} = 0$.

Exemplo 2.3. $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ representa uma matriz de ordem 3×1 de elementos $d_{11} = 3$, $d_{21} = 0$ e $d_{31} = 1$.

Exemplo 2.4. O valor da passagem aérea Rio-São Paulo varia conforme a data e empresa, tempo de antecedência da compra, etc. Foi observado, por exemplo, que o preço médio da passagem em 9 de junho e 2017, para viajar na mesma data, cobrado pelas empresas GOL, Avianca e LATAM foi de R 971, R 1084 e R 1339 respectivamente enquanto que para viajar dois dias depois, no 11 de junho, o valor médio da passagem era de R 629, R 586 e R 1184 respectivamente. Podemos então organizar o preço das passagens numa tabela com duas linhas, uma por data, e três colunas, uma por empresa; ou, equivalentemente, arranjar apenas a informação numérica relevante numa matriz P :

Data/Empresa	GOL	Avianca	LATAM
Mesma Data	R 971	R 1084	R 1339
+2 Dias	R 629	R 586	R 1184

 $\longleftrightarrow P = \begin{bmatrix} 971 & 1084 & 1339 \\ 629 & 586 & 1184 \end{bmatrix}.$

Assim, por exemplo, o elemento $p_{23} = 1184$ da matriz P representa o preço médio operado pela empresa LATAM, numa passagem Rio-São Paulo para 11 de junho de 2017, a ser negociada com dois dias de antecedência.

Definição 2.5. Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ são iguais quando $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$. Nesse caso escrevemos $A = B$.

Note que as matrizes B e D acima não são iguais. Já as matrizes a seguir são iguais:

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 1 & e^0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & \cos(0) & 1 \\ 2 & -3 & \sin(0) \end{bmatrix}.$$

Detalhamos a seguir alguns tipos especiais de matrizes:

1. A matriz nula de ordem $m \times n$: $O_{m \times n} = [0]_{m \times n}$.
2. Matriz coluna: aquela que possui uma única coluna (Vide Exemplo 2.3). Também identificada como um vetor coluna.
3. Matriz linha: aquela que possui uma única linha (Vide Exemplo 2.1). Também identificada como um vetor linha.
4. Matriz Quadrada: aquela cujo de número de linhas é igual ao número de colunas. Se dito número for n dizemos que possui ordem n no lugar de ordem $n \times n$. Entre as matrizes quadradas podemos identificar as

- (a) Triangulares superiores: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$. Por exemplo,
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

(b) Triangulares inferiores: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $a_{ij} = 0, \forall i < j$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

(c) Diagonais: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Note que toda matriz diagonal é triangular superior e inferior simultaneamente.

(d) Identidade: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ e $a_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$. Ou seja, a matriz identidade é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal são iguais a um. Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots$$

(e) Simétricas: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$. Exemplos: $0_{n \times n}, I_n$, qualquer matriz diagonal, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, etc.

Observação 2.6. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ arranja em linhas m vetores em \mathbb{R}^n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1(\cdot)} \\ a_{2(\cdot)} \\ \vdots \\ a_{m(\cdot)} \end{bmatrix},$$

em que $a_{1(\cdot)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $a_{2(\cdot)} = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, \dots , $a_{m(\cdot)} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$; assim, A pode ser identificada com um elemento em $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. De forma análoga, A arranja n vetores coluna em \mathbb{R}^m : $A = [a_{(\cdot)1} \ a_{(\cdot)2} \ \dots \ a_{(\cdot)n}]$, em que

$$a_{(\cdot)1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_{(\cdot)2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_{(\cdot)n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.2 Álgebra de matrizes

Dedicamos esta seção a observar que no universo das matrizes, pode-se operar a soma e a multiplicação por escalar de forma razoável gerando uma estrutura algébrica tão bem

comportada quanto \mathbb{R}^n , $+$, \cdot . Para tal, seja $M(m, n) := \{A = [a_{ij}]_{m \times n}; a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as matrizes com entradas reais e ordem $m \times n$ prefixada. Estabeleceremos uma operação de soma, $+$: $M(m, n) \times M(m, n) \rightarrow M(m, n)$, e uma operação de multiplicação por escalares reais, \cdot : $\mathbb{R} \times M(m, n) \rightarrow M(m, n)$, que coincide exatamente com as operações correspondentes em \mathbb{R}^n para o caso $M(1, n)$.

Dadas as matrizes de números reais e da mesma ordem $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ define-se a matriz soma como sendo

$$A + B = [c_{ij}]_{m \times n}; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j.$$

Exemplo 2.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1+0 \\ 3+0 & 0+0 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Também no universo das matrizes reais de ordem fixada $m \times n$ define-se a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\alpha[a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Exemplo 2.8.

$$2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resumimos a seguir as principais propriedades destas operações básicas.

Proposição 2.9. *Dadas as matrizes de números reais e da mesma ordem $m \times n$ e os números reais α e β valem as seguintes propriedades*

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1 \cdot A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

Demonstração. Imediata da definição. □

Observação 2.10. A proposição acima diz que o conjunto $M(m, n)$ munido das operações soma (+) e multiplicação por escalar (\cdot) é um espaço vetorial (real). O conjunto \mathbb{R} poderia ser substituído por um outro corpo \mathbb{K} , como o dos números racionais ou complexos, etc, desde que as entradas da matriz estejam nesse mesmo corpo \mathbb{K} :

$$\bar{M}(m, n) := \{A = [a_{ij}]_{m \times n}; a_{ij} \in \mathbb{K}\} \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \bar{M}(m, n) \rightarrow \bar{M}(m, n);$$

nesse caso, falar-se-ia $\bar{M}(m, n)(\mathbb{K})$, $+$, \cdot , é um espaço vetorial (sobre o corpo \mathbb{K}).

2.3 Transposição de matrizes

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ podemos obter outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ cujas linhas são as colunas de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji} \forall i, j$. A^T , assim definida, é chamada transposta de A (também denotada A').

Exemplo 2.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.12. Dados $A_{m \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha B)^T = \alpha B^T$
4. A é simétrica se, e somente se, $A^T = A$.

Demonstração. Imediata da definição. □

2.4 Produto de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{st}]_{n \times q}$ matrizes de números reais. Define-se o produto AB como sendo a matriz $C = [c_{it}]_{m \times q}$ em que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e cada $t \in \{1, \dots, q\}$, c_{it} é o produto interno dos vetores representados na linha i de A e na coluna t de B :

$$c_{it} = \langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)t})^T \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kt}.$$

Exemplo 2.13.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que o número de colunas da matriz à esquerda do produto precisa coincidir com o número de linhas da matriz à direita do produto para que a multiplicação faça sentido. Resumimos a seguir algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Proposição 2.14. *Sejam A , B e C matrizes de números reais. Então (desde que executável cada multiplicação descrita)*

1. $AI = A = IA$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(A + B)C = AC + BC$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. $OA = O$ e $AO = O$

Demonstração. Para o item (1.), observe que $I = [e_1^T \cdots e_n^T]$ em que $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, assim, o elemento na posição ij de AI é $\langle a_{i(\cdot)}, e_j \rangle = a_{ij}$; ou seja, $AI = A$. Analogamente, $IA = A$. Para mostrar o item (2.) considere matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]$, $B_{n \times p} = [b_{ij}]$ e $C_{p \times q} = [c_{ij}]$, de modo que $A(BC) = [\alpha_{ij}]_{m \times q}$, $(AB)C = [\beta_{ij}]_{m \times q}$. Queremos provar que $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, q$. Fixados i e j temos

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[a_{ik} \sum_{s=1}^p b_{ks} c_{sj} \right] = \sum_{s=1}^p \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ks} \right) c_{sj} \right] = \beta_{ij}.$$

Quanto a propriedade distributiva (3.) (e também (4.)), basta aplicar a aditividade do produto interno Euclidiano:

$$\begin{aligned} A(B + C) &= [\langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)j} + c_{(\cdot)j})^T \rangle] = [\langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)j})^T + (c_{(\cdot)j})^T \rangle] \\ &= [\langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)j})^T \rangle + \langle a_{i(\cdot)}, (c_{(\cdot)j})^T \rangle] = [\langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)j})^T \rangle] + [\langle a_{i(\cdot)}, (c_{(\cdot)j})^T \rangle] \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

Por último, o item (5.) decorre de observar que o elemento na posição ji , γ_{ji} , da matriz $(AB)^T$ é o elemento na posição ij da matriz AB , a saber,

$$\gamma_{ji} = \langle a_{i(\cdot)}, (b_{(\cdot)j})^T \rangle = \langle (b_{(\cdot)j})^T, a_{i(\cdot)} \rangle;$$

onde a segunda igualdade decorre da simetria do produto interno. Lembrando agora que $(b_{(\cdot)j})^T$ é a linha j de B^T e $(a_{i(\cdot)})^T$, a coluna i de A^T , conclui-se que γ_{ji} também coincide com o elemento na posição ji de $B^T A^T$. \square

Observação 2.15. A operação de multiplicação de matrizes não é comutativa.

Exemplo 2.16. Seja P a matriz do Exemplo 2.4 relativo ao preço de passagens aéreas e $Q = \frac{1}{3}(1, 1, 1)^T$. Então,

$$PQ = \begin{bmatrix} 971 & 1084 & 1339 \\ 629 & 586 & 1184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (971 + 1084 + 1339)/3 \\ (629 + 586 + 1184)/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1131,33 \\ 799,66 \end{bmatrix},$$

ou seja, o produto PQ calcula a média do preço das passagens da GOL, Avianca e LATAM comprando na mesma data do voo (R 1131,33 na primeira linha de PQ) ou comprando com dois dias de antecedência (R 799,66 na segunda linha de PQ).

2.5 Traço

Dada a matriz quadrada de números reais (ou complexos) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ define-se $\text{Traço}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \dots + a_{nn}$, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz. O traço também é denotado por tr .

Exemplo 2.17. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ então $tr(A) = 1 + 0 = 1$.

Proposição 2.18. Dadas as matrizes quadradas A e B e o escalar α (real ou complexo)

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
3. $tr(A^T) = tr(A)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$ quando A e B^T possuem a mesma ordem.

Demonstração. Os itens (1.), (2.) e (3.) decorrem da definição. Pro item (4.) assumamos $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ de modo a poder efetuar os produtos $AB = [\mu_{ij}]_{m \times m}$ e $BA = [\nu_{ij}]_{n \times n}$. Então,

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^m \mu_{ii} = \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}}_{\sum_{i,k} a_{ki} b_{kj}} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^n \nu_{kk} = Tr(BA).$$

\square

2.6 Sistemas de Equações Lineares

Começemos com o seguinte exemplo.

Exemplo 2.19. Considere o problema de achar dois números reais x e y para os quais

$$x + 2y = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y = 0,$$

isto é, achar um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz simultaneamente as equações acima.

Dito problema é um caso particular de sistema de equações lineares:

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Aqui, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, são chamados coeficientes; b_j , termos independentes; x_i , variáveis ou incógnitas; m , número total de equações; e n , número total de variáveis.

Voltando ao caso particular do sistema descrito em 2.19, da primeira equação $x = -2y$ e substituindo na segunda equação obtemos

$$2(-2y) + y = 0 \Leftrightarrow -4y + y = 0 \Leftrightarrow -3y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Consequentemente, $x = -2y = -2(0) = 0$. Obtendo $x = 0$ e $y = 0$ como as únicas soluções possíveis do problema.

O método empregado é chamado substituição e pressupõe a possibilidade de obter uma variável em função das outras para substituí-la nas equações restantes diminuindo a dimensão do problema. Uma ideia similar e passível de ser aplicada é a eliminação de variáveis. Por exemplo, no problema em questão (2.19) podemos multiplicar a primeira equação por 2 e subtrair-la da segunda:

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad (\times 2) \quad \equiv \quad \begin{cases} 2x + 4y = 0, \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x - 2x + y - 4y = -3y.$$

Assim, ficamos com o sistema de solução trivial

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ -3y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad (\Rightarrow x = 0).$$

Exemplo 2.20. Suponhamos agora que o sistema é

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 2x + 6y = 2. \end{cases}$$

Solução (Eliminação).

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 2x + 6y = 2 \end{cases} \xrightarrow[l_2 := l_2 - 2l_1]{\equiv} \begin{cases} x + 3y = 1, \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \equiv x + 3y = 1.$$

Logo, todos o pares ordenados da forma $(1 - 3y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, são soluções.

Neste caso temos um número infinito de pares de números reais que satisfazem o sistema de equações lineares: dizemos que é compatível (ou possível) indeterminado. No caso anterior, ou seja quando o sistema possui uma única solução dizemos tratar-se de um sistema de equações lineares compatível (ou possível) determinado. O sistema pode ainda ser classificado como incompatível quando não tiver solução, que é o caso do exemplo a seguir.

Exemplo 2.21. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$$

Solução (Eliminação).

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow[l_2 := l_2 - 2l_1]{\equiv} \begin{cases} x + y = 1, \\ 0x + 0y = 1 \end{cases} \implies 0 = 1.$$

Logo, não possui solução.

Assim, dado um sistema de equações lineares estaremos interessados nas seguintes questões:

1. Possui solução?
2. Quantas soluções possui?
3. Existe algoritmo eficiente para calcular as soluções?

A resposta a estas questões pode se achada no Método de Eliminação Gaussiana.

2.6.1 Método de Eliminação Gaussiana

Note que se arranjamos os coeficientes dos sistemas de equações lineares 2.19, 2.20 e 2.21 como equações matriciais obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

respectivamente. No caso geral, o sistema pode ser descrito na forma

$$Ax = b,$$

onde

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz de coeficientes com m linhas, uma para cada equação, e n colunas, uma para cada variável;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é o vetor (coluna) de variáveis e

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é o vetor de termos independentes. Note ainda que adicionando o vetor de termos independente à matriz de coeficientes obtemos uma matriz ampliada que caracteriza o sistema de equações lineares $Ax = b$:

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Nos exemplos anteriores temos as matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right],$$

respectivamente.

Observe agora o efeito da eliminação, efetuada para resolver cada um dos sistemas, sobre a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right] \quad (2.1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.2)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.3)$$

As matrizes “reduzidas” ficam triangulares superiores. O processo de eliminação Gaussiana é um algoritmo para reduzir a matriz via operações elementares em matrizes linha-equivalentes (em que os sistemas resultantes possuem as mesmas soluções). Ditas operações elementares são:

- (i) permutação de duas linhas,
- (ii) modificação de uma linha pela adição de um múltiplo não nulo de outra linha; e
- (iii) multiplicação de uma linha por um real não nulo.

O processo de eliminação termina quando a matriz está na forma *escalonada*:

- (S_1) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos seus outros elementos abaixo desse iguais a zero.
- (S_2) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
- (S_3) Se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ (forma escada).

Observação 2.22. Dependendo da bibliografia, a definição de matriz reduzida à forma escada (vide, por exemplo, [1, 2.4.1]) pode incluir a condição:

- (a) o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

E também pode incluir a seguinte alteração de (S_1):

- (b) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos seus outros elementos iguais a zero.

Estas alterações são perfeitamente admissíveis com o uso de ferramentas computacionais; porém, podem ser inconvenientes quando o cálculo é feito manualmente. Da mesma forma, o

relaxamento das condições exclui a unicidade da linha-equivalência de uma matriz qualquer à uma matriz linha-reduzida à forma escada (Vide [1, 2.4.3]).

Exemplo 2.23. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não está na forma escada pois não verifica (S_3) . A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escada.

Observação 2.24. Como a matriz escada é uma matriz triangular superior se o sistema tiver solução única ela será obtida trivialmente a partir do sistema equivalente escalonado.

Definição 2.25 (Posto e nulidade). Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ uma matriz linha-equivalente reduzida à forma escada. O posto de A , denotado por p , é o número de linhas não nulas de B . A nulidade de A é o número $n - p$.

Cabe destacar que o posto de uma matriz coincide com o total de vetores linha da matriz que não resultam dos outros vetores linha via operações de soma e multiplicação por escalar (operações lineares); em particular, se o posto for máximo (m , em que m é o número de linhas da matriz) nenhuma linha decorre linearmente das outras e, se não for máximo então alguma linha decorre linearmente das outras. Estes conceitos são conhecido como *independência* e *dependência linear* respectivamente e serão tratados no capítulo dedicado a espaços vetoriais. No caso particular da matriz ampliada $[A|b]$ associada ao sistema de equações lineares $A_{m \times n}x = b$, o posto de $[A|b]$ corresponde ao número de equações essenciais (não redundantes) do sistema enquanto que a nulidade fornece a diferença entre o número de variáveis do sistema e o número de equações essenciais do mesmo.

Voltando aos exemplos temos, das equações (2.1)-(2.3), que

$$\text{Exemplo 1 :} \quad \text{posto}(A) = 2, \quad \text{posto}[A | b] = 2, \quad \text{nulidade}(A) = 0.$$

$$\text{Exemplo 2 :} \quad \text{posto}(A) = 1, \quad \text{posto}[A | b] = 1, \quad \text{nulidade}(A) = 1.$$

$$\text{Exemplo 3 :} \quad \text{posto}(A) = 1, \quad \text{posto}[A | b] = 2.$$

Observação 2.26. Nos exemplos 2.19 e 2.20 o posto de A coincide com o posto de $[A | b]$ e, como já observamos, são sistemas compatíveis. No exemplo (2.21) o posto de A é diferente do posto de $[A | b]$ e estamos no caso de um sistema incompatível.

Observação 2.27. Nos sistemas compatíveis 2.19 e 2.20 também observamos outra coincidência. No exemplo 2.19 a nulidade é zero coincidindo com unicidade da solução e no exemplo 2.20 a nulidade é positiva sendo um sistema indeterminado.

Teorema 2.28. *O sistema de equações lineares $Ax = b$ é compatível se e somente se $\text{posto}(A) = \text{posto}[A \mid b]$. Mais ainda, no caso compatível há uma única solução se e somente se nulidade(A) = 0.*

Demonstração. Caso $\text{posto}(A) \neq \text{posto}[A \mid b]$, o sistema equivalente possui (ao menos) uma equação do tipo $0 = \tilde{b}_j \neq 0$; o que corresponde à incompatibilidade de sistema; caso contrário, a nulidade descreve o número de variáveis necessárias (e suficientes) para descrever (linearmente) o conjunto solução do sistema e, obviamente, mesmo que seja apenas uma, o conjunto solução seria infinito (uma solução para cada número real). \square

Exemplo 2.29. Resolva

$$\begin{cases} x - 3y + 6z = -1 \\ 2x - 5y + 10z = 0 \\ 3x - 8y + 17z = 1. \end{cases}$$

Solução.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} l_2 := l_2 - 2l_1 \\ l_3 := l_3 - 3l_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} l_3 := l_3 - l_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Então o posto de A é igual ao posto de $[A \mid b]$ e igual a 3 e o sistema é compatível. Além disso, a nulidade de A é zero garantindo que o sistema é determinado. Para obtermos a solução note que de l_3 na matriz linha-equivalente reduzida concluímos $z = 2$. Substituindo em l_2 obtemos

$$y - 2(2) = 2 \implies y = 2 + 4 = 6$$

e, de l_1 ,

$$x - 3y + 6z = -1 \implies x - 3(6) + 6(2) = -1 \implies x = -1 + 6 = 5.$$

Ou seja, $(5, 6, 2)$ é a solução.

Exemplo 2.30. Resolva

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \\ 2x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Solução.

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right] \\
 & & \xrightarrow{\substack{l_2 := l_2 - 2l_1 \\ l_3 := l_3 - 2l_1}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 & & & \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Então o posto de A é igual ao posto de $[A \mid b]$ e igual a 3 e o sistema é compatível. Além disso, a nulidade de A é zero garantindo que o sistema é determinado. Para obtermos a solução note que de l_3 na matriz linha-equivalente reduzida concluímos $z = -2$. Substituindo em l_2 obtemos $y = -1$ e, de l_1 , $x = 1$.

Exemplo 2.31. Resolva

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Solução.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 := l_2 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \\
 \implies \text{posto}(A) = 2 = \text{posto}[A \mid b] \quad \text{nulidade}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Então o sistema é compatível indeterminado. Para obtermos a solução note que de l_2 na matriz linha-equivalente reduzida concluímos $z = 0$. Substituindo em l_1 obtemos $x + y = 0$, i.e., $y = -x$. Logo, o conjunto solução é

$$\{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2.6.2 Sistemas homogêneos

Considere o caso em que o termo independente b é uma matriz coluna nula: $Ax = 0$. Então, a primeira observação imediata a ser feita é que a escolha trivial $x_i = 0, \forall i$, é sempre solução do sistema; ou seja, os sistemas lineares homogêneos sempre são possíveis. Isto também decorre do Teorema acima, que caracteriza os sistemas lineares, posto que a matriz ampliada $[A|0]$ não permite alterações na última coluna (nula) via operações elementares e, conseqüentemente, $\text{posto}[A|b] = \text{posto}(A)$. Quanto ao conjunto solução ser indeterminado ao não, dependerá

da nulidade da matriz A . No caso do Exemplo 2.19 temos um sistemas homogêneo com a solução trivial $x = 0 = y$. Já se considerarmos a parte homogênea do sistema no Exemplo 2.20

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 2x + 6y = 0; \end{cases}$$

obtem-se a matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array} \right]$ que, via operação elementar $l_2 := l_2 - 2l_1$, reduz-se à matriz linha equivalente escalonada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Assim, $\text{posto}(A) = 1 = \text{posto}[A|0]$ e $\text{nulidade}(A) = 1$; assim, o sistema é possível e indeterminado e com uma variável, digamos y , descreve-se todo o conjunto solução:

$$S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -3y, y \in \mathbb{R}\} = \{(-3y, y); y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot (-3, 1); y \in \mathbb{R}\}.$$

Note que o conjunto solução, S_b , do Exemplo 2.20, não-homogêneo, mas do qual tiramos a parte homogênea para ilustrar, verifica

$$S_b = \{(1 - 3y, y); y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0) + y(-3, 1)\} = (1, 0) + S_0.$$

Ou seja, a solução do sistema não homogêneo é a translação da solução do homogêneo por uma solução particular (específica qualquer) do não homogêneo, no caso escolhemos $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$.

Teorema 2.32. *Suponha que o sistema $Ax = b$ possui solução, que \bar{x} é uma das soluções e que S_b representa o conjunto solução desse sistema. Então, $S_b = \bar{x} + S_0$ em que S_0 é o conjunto solução da parte homogênea $Ax = 0$.*

Demonstração. Temos $A\bar{x} = b$ e, supondo que $x \in S_b$, também $Ax = b$; logo,

$$Ax - A\bar{x} = b - b \Leftrightarrow A(x - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow x - \bar{x} \in S_0 \Leftrightarrow x \in \bar{x} + S_0.$$

□

2.7 Exercícios: Matrizes e S.E. Lineares.

2.7.1 Matrizes: introdução.

Q 2.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre as matrizes: $A + B$, AC , BC , CD , DA , DB , $-A$ e $-D$.

Q 2.2. Determine $A - A^T$ quando A for simétrica.

Q 2.3. Classifique A^T quando A for triangular superior (respectivamente, diagonal).

Q 2.4. Dadas as matrizes A e B e os escalares α e β , indique verdadeiro ou falso:

1. $(-A)^T = -(A^T)$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $AB = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$.
4. $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta AB$.
5. $(-A)(-B) = -(AB)$.
6. A e B simétricas implica $AB = BA$.
7. Se $AB = 0$ então $BA = 0$.
8. Se podemos efetuar o produto AA então A é uma matriz quadrada.

Q 2.5. Ache x, y, z, w se

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Q 2.6. Ache o valor de t que torna a matriz $A(t)$ igual à nula, onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 & t^2 - t \\ t^3 - 1 & t^2 - 3t + 2 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.33 (Polinômio na matriz A). Seja A uma matriz quadrada e $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ um polinômio. Define-se $p(A)$ como sendo a matriz

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n,$$

onde

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2A, \quad \dots, \quad A^n = A^{n-1}A, \quad A^0 = I.$$

Q 2.7. Seja $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = x^2 + 3x - 10$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

1. Calcule $f(A)$ e $g(A)$.
2. Observe que A anula g , ou seja, $g(A) = [0]_{2 \times 2}$. Existe algum outro polinômio mônico¹ de grau menor do que 2 (que é o grau de g) e que anule A ?
3. Encontre um vetor coluna não nulo u e tal que $Au = -5u$.
4. Encontre um vetor coluna não nulo v e tal que $Av = 2v$.

5. Prove que

$$g(A) = [A + 5I][A - 2I].$$

6. Mostre que o plano gerado por u e v coincide com \mathbb{R}^2 . Logo, se $X = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ então $X = tu + sv$ para certos t e s reais. Prove que

$$AX = (-5t)u + (2s)v.$$

2.7.2 Sistemas de Equações Lineares.

Q 2.8. Identifique quais das seguintes equações são lineares

- a) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6$.
- b) $x_1x_2x_3 = -2$.
- c) $x^2 + 6y = 1$.
- d) $(x + y)(x - y) = -7$.
- e) $x + 3^{\frac{1}{2}}z = 4$.

¹Um polinômio é dito mônico quando o coeficiente do termo de mais alta ordem é um. O polinômio mônico de menor grau que ainda anula A é dito minimal.

f) $x + 3z^{\frac{1}{2}} = -4$.

Q 2.9. Resolver:

1.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4, \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0, \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

Q 2.10. Resolver

a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ x - y = 10. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 1 \\ 6x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Q 2.11. Use eliminação Gaussiana para resolver $\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ -x - y = 10. \end{cases}$ Que acontece? Explique.

Q 2.12. Resolva o sistema de equações genérico $Ax = b$ em que $n = m = 2$. Dê hipóteses sobre os coeficientes a_{ij} para que o sistema tenha solução única.

Q 2.13. Use eliminação Gaussiana para determinar para quais valores do parâmetro k o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - ky = 1 \end{cases}$$

tem uma, mais de uma ou nenhuma solução.

Q 2.14. Resolva

$$\begin{cases} w + 2x + y - z = 1 \\ 3w - x - y + 2z = 3 \\ -x + y - z = 1 \\ 2w + 3x + 3y - 3z = 3. \end{cases}$$

2.7.3 Modelo Keynesiano de renda nacional.

Considere o modelo simples de renda nacional:

$$Y = C + I + G \quad \text{e} \quad C = a + bY$$

em que Y é a renda (agregada) ou produto nacional, C é o consumo (agregado), I representa o investimento e G os gastos do governo; o parâmetro a é a parte autônoma do consumo (parcela que não depende da renda) e o parâmetro b é a fração da renda que é gasta no consumo (ou a propensão marginal a consumir, $0 < b < 1$).

Q 2.15. Supondo I , G , a e b dados, mostre que o modelo pode ser descrito na forma matricial $Ax = d$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = \begin{bmatrix} I + G \\ a \end{bmatrix}.$$

Mostre que o sistema possui solução única e resolva o modelo para obter Y e C em função dos dados do problema.

Q 2.16. Considere a seguinte variante do modelo simples de renda nacional que inclui imposto sobre a renda:

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = a + b(Y - T) \quad \text{e} \quad T = d + tY$$

em que C é o consumo (agregado) como função da renda descontado o imposto T , I_0 representa o investimento e G_0 os gastos do governo; o parâmetro $d > 0$ é o imposto fixo (independente da renda) e t é a taxa de imposto sobre a renda, $0 < t < 1$. Descreva o modelo no formato matricial e determine, se possível, as variáveis endógenas Y , C e T em função das exógenas I_0 , G_0 e dos parâmetros a , b , d e t do modelo.

Q 2.17. Considere a variante do modelo Keynesiano simples de renda nacional em que o governo gasta uma fração da renda:

$$Y = C + I_0 + G, \quad C = a + b(Y - T_0) \quad \text{e} \quad G = gY$$

em que T_0 é um imposto sobre a renda (exógeno) e g é a fração da renda gasta pelo governo ($0 < g < 1$). Descreva o modelo no formato matricial e determine, se possível, as variáveis endógenas Y , C e G em função das exógenas I_0 , T_0 e dos parâmetros a , b e g do modelo.

2.7.4 Equilíbrio geral de mercado.

Considere um mercado com três mercadorias em que a demanda de cada uma delas leve em conta não apenas o efeito do seu próprio preço mas também os preços das outras duas mercadorias relacionadas: $Q_{d_i} = Q_{d_i}(P_1, P_2, P_3)$, $i = 1, 2, 3$. Suponha, analogamente, que as funções de oferta $Q_{s_i} = Q_{s_i}(P_1, P_2, P_3)$, $i = 1, 2, 3$, também possam levar em conta o preço de outras mercadorias. A questão então é sobre a existência ou não de um vetor de preços $P = (P_1, P_2, P_3)$ que deixe o mercado em equilíbrio; ou seja, que iguale oferta e demanda por cada mercadoria: $Q_{d_i} = Q_{s_i}$, $i = 1, 2, 3$. Quando ditas funções são afins, o problema pode ser reduzido ao estudo de um sistema de equações lineares

Q 2.18. Determine se há ou não equilíbrio de mercado e o vetor de preços no caso a seguir:

$$Q_{d_1} = 10 - 2P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_1} = -2 + 3P_1 - P_3; \quad Q_{d_2} = 14 + P_1 - P_2 - P_3, \quad Q_{s_2} = -1 + 2P_2$$

e

$$Q_{d_3} = 20 - P_1 + P_2 - P_3, \quad Q_{s_3} = -4 - P_1 - P_2 + 3P_3.$$

Q 2.19. Determine se há ou não equilíbrio de mercado e, caso exista, o preço P_3 , supondo que as funções de demanda e oferta verificam

$$\begin{aligned} Q_{d_1} &= 10 - 2P_1 - 2P_3, & Q_{s_1} &= -2 + 3P_1 - P_3; \\ Q_{d_2} &= 14 + P_1 - P_2, & Q_{s_2} &= -1 + 2P_2; \\ Q_{d_3} &= 20 + P_2 - P_3, & Q_{s_3} &= -4 - P_2 + 3P_3. \end{aligned}$$

2.7.5 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 5-(0),(3),(4)/ 2001; 11/ 1995; 15/ 1996; 15/ 1997; Q1-(3)/2006; 10-(4) e 11-(0)/ 2010; 5-(3,4)/ 2011; 4-(0,3,4)/ 2012; 4/ 2016; 6-(0-2)/2018; 6-(1,3,4)/2019, 7-(4)/2020.

2.8 Gabarito: Matrizes e S.E. Lineares.

Q 2.1. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = [2 \quad -1]$$

temos

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+0 & 3+1 \\ 2+3 & 1+0 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-1) + 2(2) + 3(4) \\ 2(-1) + 1(2) + (-1)4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 4 + 12 \\ -2 + 2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 + 4 \\ -3 + 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [2 \quad -1] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D \cdot A = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [2-2 \quad 4-1 \quad 6+1] = [0 \quad 3 \quad 7]$$

$$D \cdot B = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-7 \quad 0 \quad 1], \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $-D = [-2 \quad 1]$.

Q 2.2. A matriz nula da mesma ordem de A .

Q 2.3. Triangular inferior (resp. diagonal).

Q 2.4. (0) V; (1) V; (2) F; (3) V; (4) F; (5) F; (6) F; (7) V.

Q 2.5. Cálculo de x, y, z, w :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y & 3x+4y \\ 2z+3w & 3z+4w \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 2x+3y = 1, & 2z+3w = 0 \\ 3x+4y = 0, & 3z+4w = 1. \end{cases}$$

Então

$$y = -\frac{3}{4}x \quad \text{e} \quad 1 = 2x + 3\left(-\frac{3}{4}x\right) = -\frac{1}{4}x \implies x = -4 \quad \text{e} \quad y = 3$$

e, analogamente,

$$w = -\frac{2}{3}z \quad \text{e} \quad 1 = 3z + 4\left(-\frac{2}{3}z\right) = \frac{1}{3}z \implies z = 3 \quad \text{e} \quad w = -2.$$

Q 2.6. $t = 1$.

Q 2.7. Seja $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = x^2 + 3x - 10$; e, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Então,

1. $f(A) = 2A^2 - 3A = \begin{bmatrix} 11 & -18 \\ -27 & 56 \end{bmatrix}$ e $g(A) = [0]_{2 \times 2}$.
2. Não, pois se $m(x) = x + c$ anulasse A ter-se-ia $A = -cI$, que não é o caso.
3. $u = (1, -3)^T$.
4. $v = (2, 1)^T$.
5. Note que $g(x) = x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$.
6. $\pi = \{tu + sv; t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -3) + s(2, 1); t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t + 2s, -3t + s); t, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$. Logo, se $X = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ então $X = tu + sv$ para certos t e s reais e

$$AX = A(tu + sv) = tAu + sAv = t(-5u) + s(2v) = (-5t)u + (2s)v.$$

Q 2.8. a) e e).

Q 2.9. 1): $(-1, 2, 5)$; 2): $(7/(16), -1/(16), (17)/8)$; 3): $x = (17)/3 - (7/3)z$, $y = -5/3 + (4/3)z$, $z \in \mathbb{R}$.

Q 2.10. Aplicando eliminação de Gauss obtém-se

$$\text{a) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -13 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -33 & 45 \end{array} \right]. \quad \text{Então,}$$

$$z = -15/11, y = 14/11 \text{ e } x = 1/11.$$

b) $x = 17/3$ e $y = -13/3$;

c) $(2, 1, 3)$.

Q 2.11. Aplicando eliminação Gaussiana obtém-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 10 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -10 \\ 3 & 3 & 4 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 34 \end{array} \right].$$

Então, o sistema é impossível causa do posto de A , 1, ser diferente do posto de $[A|b]$, que é igual a 2. Observe que a segunda equação do sistema equivalente corresponde a $0 = 0x + 0y = 34$, uma impossibilidade.

Q 2.12. Consider o sistema de equações genérico $Ax = b$ em que $n = m = 2$. Note que se $a_{11} = 0$ então a primeira equação é trivial; assim, vamos considerar o caso em que $a_{11} \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & b_2 - \frac{b_1a_{21}}{a_{11}} \end{array} \right].$$

Logo, se $a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} = \frac{Det(A)}{a_{11}} \neq 0$; ou seja, $Det(A) \neq 0$, então o sistema é possível (posto 2) e determinado (nulidade zero). Caso contrário, o sistema é impossível a menos que $b_2a_{11} - b_1a_{21}$ também seja zero; caso em que o posto é um e a nulidade é positiva, correspondendo a um sistema possível e indeterminado.

Q 2.13. O sistema possui solução única se e somente se $k \neq -1$. Caso contrário, isto é, para $k = -1$, há infinitas soluções.

Q 2.14. $z \in \mathbb{R}$, $y = 7/11 + (12/11)z$, $x = -4/11 + z/11$ e $w = 12/11 - (3/11)z$.

Q 2.15. Para checar a representação matricial basta efetuar o produto Ax e comparar e igualar a d . Note agora que a matriz ampliada possui posto máximo 2, assim como A :

$$[A|d] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & I + G \\ -b & 1 & a \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & I + G \\ 0 & 1 - b & a + b(I + G) \end{array} \right], \quad 1 - b \neq 0.$$

Logo, a nulidade é zero e o sistema possui solução única:

$$C^* = \frac{a + b(I + G)}{1 - b} \quad \text{e} \quad Y^* = C^* + (I + G) = \frac{a + I + G}{1 - b}.$$

Q 2.16. Na variante que incorpora impostos

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = a + b(Y - T) \quad \text{e} \quad T = d + tY$$

a matriz ampliada resulta em

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & I_0 + G_0 \\ -b & 1 & b & a \\ -t & 0 & 1 & d \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & I_0 + G_0 \\ 0 & 1 - b & b & a + b(I_0 + G_0) \\ 0 & -t & 1 & d + t(I_0 + G_0) \end{array} \right] \\ \hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & I_0 + G_0 \\ 0 & 1 & b/(1 - b) & [a + b(I_0 + G_0)]/(1 - b) \\ 0 & 0 & 1 + tb/(1 - b) & d + t(I_0 + G_0) + t[a + b(I_0 + G_0)]/(1 - b) \end{array} \right].$$

Onde

$$1 + tb/(1 - b) = \frac{1 - b + tb}{1 - b} = \frac{1 - b(1 - t)}{1 - b} > 0, \quad \text{pois } 0 < b, t < 1.$$

Logo,

$$T^* = \frac{(1 - b)d + t(a + I_0 + G_0)}{1 - b(1 - t)}.$$

Q 2.17. Na variante com gasto endógeno temos

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & 0 & a - bT_0 \\ -g & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & I_0 \\ 0 & 1-b & -b & a + b(I_0 - T_0) \\ 0 & -g & 1-g & gI_0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & I_0 \\ 0 & 1 & -b/(1-b) & [a + b(I_0 - T_0)]/(1-b) \\ 0 & 0 & (1-g)/g - b/(1-b) & (a + I_0 - bT_0)/(1-b) \end{array} \right].$$

Onde

$$(1-g)/g - b/(1-b) = \frac{1-b-g+gb-gb}{g(1-b)} = \frac{1-(b+g)}{g(1-b)} \neq 0 \Leftrightarrow b+g \neq 1.$$

Logo, o sistema possui solução única se e somente se $b+g \neq 1$. Na verdade deve-se ter $b+g < 1$ e $a+I_0 \geq bT_0$ de modo a garantir

$$G^* = \frac{g(a+I_0-bT_0)}{1-(b+g)} \geq 0.$$

Q 2.18. $P_1 = 34/11$, $P_2 = 38/11$ e $P_3 = 85/11$.

Q 2.19. $P_3 = 267/31 \approx 8,6$ u.m.

ANPEC (2001 Q5-(0,3,4)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V (0) Um sistema homogêneo de equações lineares sempre tem solução.

Solução. $Ax = 0$ sempre admite a solução trivial $x = 0$.

V (3) Um sistema homogêneo de m equações lineares com n incógnitas tem infinitas soluções se $n > m$.

Solução. Sendo homogêneo, o sistema é compatível. A nulidade, no caso, é $n - posto \geq n - m > 0$ (observe que $posto \leq m$). Logo, o sistema é indeterminado.

F (4) Qualquer sistema de equações lineares com n incógnitas tem infinitas soluções se $n > m$.

Solução. Só se for compatível, o que não necessariamente é o caso.

ANPEC (1997 Q15). Considere o seguinte sistema linear em x, y, z

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Julgue as afirmativas abaixo:

V (0) Quando $a = 10$, o sistema não tem solução não-trivial.

F (1) Não existe solução não-trivial, qualquer que seja o valor de a .

F (2) Se $a = 5$, existe uma única solução não-trivial.

F (3) Existe uma única solução não-trivial, qualquer que seja o valor de a .

Solução. Note que é um sistema homogêneo, conseqüentemente compatível. Assim, o sistema é determinado ou não dependendo do posto da matriz de coeficientes ser igual a três ou não. Observe que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2a - 8 = 2a - 10 = 2(a - 5) = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Então o posto é três se, e somente se, $a \neq 5$. Ou seja, a solução é única (a trivial) se, e somente se, $a \neq 5$.

ANPEC (1996 Q15). Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Julgue as afirmativas abaixo:

F (0) O sistema acima não tem solução.

Solução. De fato tem infinitas soluções pois sendo homogêneo é compatível e a nulidade é no mínimo um, pois três são as equações (limitando o posto a no máximo três-que é o caso) e quatro são as variáveis.

V (1) Caso $x_4 = 0$, o sistema acima tem somente solução trivial.

Solução. Se $x_4 = 0$, o sistema acima continua homogêneo e com matriz de coeficientes

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{Det}(\tilde{A}) = 4 \neq 0 \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

F (2) Caso $x_4 = -2$, as soluções para x_1, x_2, x_3 são todas positivas.

Solução. Quando $x_4 = -2$ o sistema toma a forma $\tilde{A}x = b$ onde \tilde{A} é a matriz do item (1), $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ e $b = (2, -2, 2)^T$. Como $\text{Det}(\tilde{A}) = 4 \neq 0$ podemos aplicar a Regra de Cramer. Então, o sinal de cada componente x_i da solução estará determinada pelo determinante da submatriz \tilde{A}_i obtida de \tilde{A} pela troca da coluna i pelo vetor coluna b (observe que $\text{Det}(\tilde{A}) = 4 > 0$):

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies x_2 = \frac{\text{Det}(\tilde{A}_2)}{\text{Det}(\tilde{A})} = \frac{0}{4} = 0 \neq 0.$$

ANPEC (1995 Q11). Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + k^2z = -1 \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

F (0) para $k = 1$, existem infinitas soluções.

V (1) para $k = 3$, existe uma única solução.

F (2) para $k = 2$, existem infinitas soluções.

V (3) para $k = 2$, não existe solução.

F (4) para $k = 2$, existe uma única solução.

Solução. Efetuando o processo de eliminação sobre a matriz ampliada obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & k^2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -2 & k^2 - 2k & -3 \\ 0 & 0 & 2 - k & -1 \end{array} \right]$$

Então, o posto de A e da matriz ampliada coincidem se, e somente se, $k \neq 2$. Neste caso, com posto 3 a nulidade é zero e o sistema é compatível determinado. Quando $k = 2$ o sistema é, consequentemente, incompatível.

ANPEC (2010 Q10-(4)). F (4) Se o posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é 3, então $x \neq 1$.

Solução. Seja $x = 1$. Então,

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

que tem posto 3.

ANPEC (2010 Q11-(0)). F (0) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

Para $a = 1$ e $b = 2$, então $(3A - B^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Solução. Observe que

$$(3A - B^T)^T = 3A^T - B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 6-2 \\ 3-2 & -3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

ANPEC (2011 Q5-(3,4)). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Considere o sistema $Ax = b$ abaixo e julgue as afirmativas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

V (3) A matriz $M = A + A^t$, em que A^t é a transposta de A , é uma matriz simétrica.

Solução. $M^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = M$.

F (4) Se $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ e $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ são soluções do sistema $Ax = b$, então $u + v$ também é solução de $Ax = b$.

Solução. A menos que $b = 0$.

$$A(u + v) = Au + Av = b + b = 2b \neq b, \quad b \neq 0.$$

ANPEC (2012 Q4-(0,3,4)). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Julgue as afirmativas:

V (0) Existe uma matriz B de modo que $BA = 2A$.

Solução. $B = 2I$.

- F (3) Seja $b \in \mathbb{R}^n$. Se $Ax = b$ possui infinitas soluções, então existe $c \in \mathbb{R}^n$, tal que $Ax = c$ admite uma única solução.

Solução. Se $Ax = b$ possui infinitas soluções então a nulidade de A é positiva, consequentemente qualquer outro sistema possível $Ax = c$ também teria infinitas soluções.

- F (4) Suponha que $a_{ij} = 0$ quando $i + j$ for par e $a_{ij} = 1$ quando $i + j$ for ímpar. Se $n \geq 3$, então A tem posto n .

Solução. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, A verifica as hipótese com $n = 3$; mas, seu posto é $2 \neq 3$.

ANPEC (2016 Q4). Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada, cujas entradas são números 0 ou 1 e tal que em cada linha e em cada coluna há exatamente um número 1. Analise a veracidade das seguintes afirmações:

- F (0) Soma de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

Solução. Note que a identidade, I_n , é uma matriz de permutação; porém, $I + I = 2I$ não é de permutação pois aparece o número dois entre suas entradas (na diagonal).

- V (1) Produto de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

Solução. Suponha que $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ são matrizes de permutação: $a_{ij}, b_{ij} \in \{0, 1\}$ com $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \sum_{i=1}^n b_{ij} = 1, \forall j$, e $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \sum_{j=1}^n b_{ij} = 1, \forall i$. Então, a matriz produto $AB = [c_{ij}]_{n \times n}$ verifica $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$. Assim, $c_{ij} \in \{0, 1\}$,

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right)}_1 \cdot b_{kj} \right] = \sum_{k=1}^n b_{kj} = 1, \quad \forall j.$$

Analogamente, $\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1, \forall i$.

- V (2) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação e $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um vetor qualquer, então Mv e v têm a mesma norma;

Solução. Mv possui as mesmas coordenadas de v , a menos sua ordem (que foi permutada).

- V (3) Seja $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação e $S = \{[v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid \sum_{i=1}^n v_i = 1\}$. A transformação linear $T(v) = Mv$ deixa invariante o conjunto S (ou seja, $T(S) \subset S$);

Solução. A soma das coordenadas de v e Mv é a mesma, pois esses vetores só se diferenciam na ordem de suas coordenadas: para $\vec{e} = (1, \dots, 1)^T$ tem-se

$$v_1 + \dots + v_n = \langle v, \vec{e} \rangle = \langle v, M^T \vec{e} \rangle = \langle Mv, \vec{e} \rangle = (Mv)_1 + \dots + (Mv)_n.$$

Aqui usamos $M^T \vec{e} = \vec{e}$ pois M^T também é uma matriz de permutação e a permutação de coordenadas em \vec{e} não altera o vetor posto que todas suas coordenadas são iguais.

F (4) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação e $M^2 = MM = I$ (matriz identidade), então $M = I$.

Solução. Considere, por exemplo, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ANPEC (2018 Q6-(0-2)). Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

V (3) Considere a matriz A , 4×4 , a matriz coluna $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e a equação $Ax = b$. Considere que b e que a inversa de A são:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução será $x = (1, 2, 3, 0)^T$.

Solução. Sendo A inversível, $Ax = b$ se e somente se $x = A^{-1}b$. Logo,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

F (4) Se uma matriz tem inversa, então ela é singular.

Solução. Se tem inversa então seu determinante é diferente de zero; ou seja, não-singular.

ANPEC (2019 Q6-(1,3,4)). Considere a equação do plano

$$p(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

²Tomei a liberdade de adicionar a transposta neste vetor linha pois, caso contrário a afirmação seria trivialmente falsa dado que $x_{4 \times 1} \neq x_{1 \times 4}$.

e a equação da reta $r(u) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} u$. Indique quais dos itens abaixo são verdadeiros e quais são falsos:

F (1) Se $a = b$, então a equação $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções.

Solução. Fixe $b = a$ e aplique eliminação Gaussiana na matriz ampliada para obter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{l_3 := l_3 - l_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{array} \right)$$

um sistema impossível (sem solução), quando $a = 0$, ou um sistema possível e determinado quando $a \neq 0$.

V (3) Os parâmetros s, t e u , para os quais o plano $p(s, t)$ se encontra com a reta $r(u)$, satisfazem a equação $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solução. De fato, $r(u) = p(s, t)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} u &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} u = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} u &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V (4) Se $a = 0$, então o plano $p(s, t)$ e a reta $r(u)$ não se interceptam.

Solução. Nesse caso o sistema é impossível (consulte os itens (3) e (1)).

ANPEC (2020 Q7-(4)). Dado o número real $r \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

F (4) O produto das matrizes $B^t A_3 B$ é igual à matriz $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução. Basta checar

$$\begin{aligned} B^t A_3 B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{12}{\sqrt{35}} & \frac{-20}{\sqrt{35}} & \frac{-6}{\sqrt{35}} \\ \frac{9}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{12}{\sqrt{35}} & \frac{-20}{\sqrt{35}} & \frac{-6}{\sqrt{35}} \\ \frac{9}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \vdots & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Determinante

Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada de números reais. O número real $Det(A)$, determinante de A (também denotado $|A|$), pode ser definido recursivamente: se $n = 1$, $Det(A) = a_{11}$. Se $n > 1$ então $Det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$, para um i qualquer fixado, onde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} Det(A_{ij})$ e A_{ij} é a submatriz quadrada de ordem $n - 1$ obtida de A suprimindo a linha i e a coluna j . O número Δ_{ij} é chamado *cofator* de a_{ij} . A independência do valor do determinante em função da linha escolhida nesta definição recursiva, e inclusive a possibilidade de obter o mesmo valor fixada uma coluna j , é conhecido como desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante e segue da definição formal (atribuída a Leibniz) de determinante $det(A) = \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ em que (j_1, j_2, \dots, j_n) representa uma permutação dos n naturais $1, 2, \dots, n$, indexada por ρ , J_{ρ} conta o número de inversões de ordens nessa permutação e o somatório percorre todas as $n!$ permutações possíveis. Para uma discussão histórica sobre o surgimento de tais definições, assim como as definições em si, pode-se consultar [1, Cap.3].

Partindo da definição recursiva e fixando a linha um tem-se, para ordem 2,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|[a_{22}]| + a_{12}(-1)^{1+2}|[a_{21}]| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Note que $Det(A_{2 \times 2})$ é um somatório com dois termos, e que cada termo desse somatório é o produto de dois elementos da matriz: um de cada linha e um de cada coluna, sem repetição. Fixada a escolha por linhas em ordem ascendente (1 2), no primeiro termo encontramos a escolha coluna 1 e coluna 2 respectivamente, o que corresponde à ordem natural $\rho_1 = (1 \ 2)$ e, no segundo termo, encontramos a escolha coluna 2 e coluna 1 respectivamente, que indica uma inversão da ordem natural $\rho_2 = (2 \ 1)$. O sinal negativo desse segundo termo está associado a esta inversão de ordem.

Definição 3.1. À disposição dos primeiros n naturais $1, 2, \dots, n$ em determinada ordem $\rho = (j_1 j_2 \dots j_n)$, $j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j_i \neq j_k \forall i \neq k$, é chamada de permutação e o número J_ρ de inversões da ordem natural nessa *permutação* define a paridade da mesma: ou $(-1)^{J_\rho} = 1$ ou $(-1)^{J_\rho} = -1$ dependendo de J_ρ ser *par* ou *ímpar* respectivamente.

Voltando ao caso $n = 2$, temos, obviamente, apenas duas permutações possíveis: $(1\ 2)$ que é par e $(2\ 1)$ que é ímpar e, na fórmula do determinante,

$$\text{Det}(A_{2 \times 2}) = (-1)^{\overbrace{J_{\rho_1}}^0} a_{11}a_{22} + (-1)^{\overbrace{J_{\rho_2}}^1} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Vejamos ainda o caso da matriz A ser de ordem 3. São $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ formas possíveis de ordenar os naturais $1, 2, 3$ com três permutações pares e três ímpares como mostra a tabela 3.1 a seguir:

ρ	J_ρ	$(-1)^{J_\rho}$
$(1\ 2\ 3)$	0	1
$(2\ 3\ 1)$	2	1
$(3\ 1\ 2)$	2	1
$(3\ 2\ 1)$	3	-1
$(1\ 3\ 2)$	1	-1
$(2\ 1\ 3)$	1	-1

Tabela 3.1: Permutações de $(1\ 2\ 3)$.

Logo, a definição formal (de Leibniz) do determinante nos leva à fórmula

$$\begin{aligned} \text{Det}(A_{3 \times 3}) &= \sum_{\rho} (-1)^{J_\rho} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Se tiramos em evidência os elementos da linha um, por exemplo, obtemos a fórmula equivalente a seguir que corresponde à decomposição de Laplace para o cálculo do determinante pela linha um.

$$\begin{aligned} \text{Det}(A_{3 \times 3}) &= a_{11} \underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}_{\Delta_{11}} - a_{12} \underbrace{(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})}_{-\Delta_{12}} + a_{13} \underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}_{\Delta_{13}} \\ &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \phi_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \Delta_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}; \\
 A_{12} &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ a_{21} & \phi_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \phi_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \implies \Delta_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}); \\
 A_{13} &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \phi_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \implies \Delta_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.
 \end{aligned}$$

De forma análoga, a decomposição de Laplace pode ser provada fixando qualquer outra linha ou coluna da matriz.

Teorema 3.2. *Dada a matriz quadrada A , ordem n , de números reais tem-se*

$$Det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e também,

$$Det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Definição 3.3 (Adjunta). A matriz $\bar{A} = [\Delta_{ij}]_{n \times n}$ é chamada matriz de cofatores de A e sua transposta, adjunta de A , i.e.,

$$Adj(A) = (\bar{A})^T.$$

3.1 Propriedades elementares do determinante.

Enunciaremos a seguir as principais propriedades do determinante decorrentes da definição formal (Leibniz) ou da caracterização via decomposição de Laplace. No que segue, A representa uma matriz quadrada de ordem n .

Proposição 3.4. $det(A) = det(A^T)$.

Demonstração. Na definição formal (Leibniz) o essencial é percorrer todas as $n!$ permutações possíveis dos n primeiros naturais, levando em conta a paridade de cada, de modo a escolher um elemento de cada linha e de cada coluna para formar cada produto de n elementos de todas as formas possíveis. \square

Proposição 3.5. *Se A possui uma linha (ou coluna) nula então $det(A) = 0$.*

Demonstração. Todo termo do somatório é uma produtória e em cada um deles aparece um elemento da tal linha (ou coluna); logo, cada produto é zero e, conseqüentemente, o somatório é igual a zero. \square

Proposição 3.6. *Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de A por uma constante, o determinante fica multiplicado por dita constante.*

Demonstração. Em cada termo do somatório aparece a constante, que pode assim ser colocada em evidência. \square

Proposição 3.7. *A permutação de duas linhas (ou colunas) de A troca o sinal do determinante.*

Demonstração. Suponha que \tilde{A} foi obtida de A permutando as linhas i e i' , então aplicando Laplace sobre a linha i' de \tilde{A} obtém-se, assumindo $i' = i + 1$ para simplificar,

$$\begin{aligned} \text{Det}(\tilde{A}) &= \sum_j \tilde{a}_{i'j} \tilde{\Delta}_{i'j} = \sum_j a_{ij} (-1)^{i'+j} |\tilde{A}_{i'j}|, \quad \text{com } |\tilde{A}_{i'j}| = |A_{ij}| \\ &= \sum_j a_{ij} (-1)^{i+1+j} |A_{ij}| = -1 \sum_j a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}| = -\text{Det}(A). \end{aligned}$$

Proposição 3.8. *O determinante de uma matriz com duas linhas iguais é zero.*

Demonstração. Sejam i e i' as linhas idênticas de A . Então, se \tilde{A} representa a matriz obtida de A pela permutação dessas duas linhas temos $\text{Det}(A) = \text{Det}(\tilde{A})$, pois $\tilde{A} = A$; e também $\text{Det}(\tilde{A}) = -\text{Det}(A)$, causa da permutação. Logo, $\text{Det}(A) = -\text{Det}(A)$ e, conseqüentemente, $\text{Det}(A) = 0$. \square

Proposição 3.9. *Sejam A e B matrizes quadradas idênticas a menos, possivelmente, a i -ésima linha; ou seja, se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ então $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ verifica $b_{kj} = a_{kj}$ para todo k e j com $k \neq i$. Suponha ainda que a matriz quadrada $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ também coincida com A , a menos sua i -ésima linha agora definida como a soma da linha i de A com a linha i de B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Então, $\text{Det}(C) = \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$. Ou seja*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_{i1} + b_{i1}) & (a_{i2} + b_{i2}) & \cdots & (a_{in} + b_{in}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Aplicando a definição formal de determinante obtém-se

$$\begin{aligned}
 \text{Det}(C) &= \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} c_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots c_{nj_n} = \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
 &= \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} [(a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}) + (a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n})] \\
 &= \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{\rho} (-1)^{J_{\rho}} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
 &= \text{Det}(A) + \text{Det}(B).
 \end{aligned}$$

□

Observação 3.10. A propriedade acima não deve ser confundida com aditividade da função determinante. Note que apenas uma linha é decomposta como a soma de duas outras linhas. Por exemplo, dado que $(3, 4) = (1, -1) + (2, 5)$ tem-se

$$-2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ (1+2) & (-1+5) \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_1.$$

Porém,

$$-2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Proposição 3.11. *O determinante não se altera se adicionarmos a uma linha um múltiplo de outra linha.*

Demonstração. Suponha que a linha j de A foi modificada pela adição do múltiplo escalar c da linha i , $i \neq j$, obtendo-se a matriz modificada \tilde{A} . Então,

$$\text{Det}(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{j()} + c \cdot a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{j()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ c \cdot a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix} = \text{Det}(A) + c \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{i()} \\ \vdots \\ a_{n()} \end{vmatrix}}_0 = \text{Det}(A).$$

Aqui a primeira igualdade decorre da Proposição 3.9; a segunda, da Proposição 3.6; e a terceira, da Proposição 3.8. □

Esta propriedade estende-se naturalmente para combinações lineares envolvendo um número maior de linhas (colunas).

Proposição 3.12. *Se B é uma matriz quadrada da mesma ordem de A então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Demonstração. Pela generalização da propriedade anterior

$$\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + A(-I) & 0 + AB \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Aqui a última igualdade decorre da própria definição formal pois nas permutações que incluem elementos de $-I$ sempre há elementos do bloco complementar nulo 0.

Proposição 3.13. *O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração. No somatório da definição formal apenas uma permutação poderá conter elementos diferentes de zero: $(1 \ 2 \ \dots \ n)$.

Proposição 3.14. $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I$.

Demonstração. Note que o elemento no posição ii da matriz produto coincide com

$$a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + a_{in}\Delta_{in} = \text{Det}(A),$$

do desenvolvimento de Laplace via a i -ésima linha de A . Fixemos agora a posição ij , com $i \neq j$, na matriz produto:

$$a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \dots + a_{in}\Delta_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

em que a igualdade acima decorre do desenvolvimento de Laplace pela linha j e o determinante é zero causa da linha j coincidir com a linha i . \square

3.2 Posto via determinante.

As operações elementares sobre uma matriz quadrada podem alterar o sinal do determinante, no caso uma permutação de duas linhas, ou multiplicar a determinante por uma constante não nula, caso seja usada dita constante para multiplicar uma linha; com isto, o processo de eliminação poderia ser aproveitado para calcular o determinante da matriz desde que mantida a “memória” do processo. Além disso, o determinante da matriz escalonada de A é zero se, e somente se, o determinante de A for zero.

Teorema 3.15. *Se A é uma matriz quadrada de números reais, linha equivalente¹ a B , então existe $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\text{Det}(A) = k \cdot \text{Det}(B).$$

Demonstração. Temos apenas três operações elementares possíveis: somar a uma linha (um múltiplo não nulo de) uma outra linha, o que não altera o determinante; permutar duas linhas; o que resulta na troca do sinal do determinante; e multiplicar uma linha por uma constante não nula, que resulta na multiplicação do determinante por essa constante. Logo, se B resulta de A após p permutações de linhas, m multiplicações de linhas por constantes não nulas k_1, k_2, \dots, k_m , e um certo número de adições de linhas a outras linhas obtém-se

$$\text{Det}(B) = \underbrace{(-1)^p k_1 \cdot k_2 \cdots k_m}_{k \neq 0} \cdot \text{Det}(A) = k \cdot \text{Det}(A).$$

□

Corolário 3.16. *Se a matriz quadrada A , de números reais, possui B como matriz linha-reduzida à forma escada então existe $c \neq 0$ tal que $\text{Det}(A) = c \cdot \text{Det}(B)$.*

Demonstração. Sendo B linha-reduzida à forma escada, de A , B é linha-equivalente a A e, pelo Teorema 3.15, existe $k \neq 0$ tal que $\text{Det}(B) = k \cdot \text{Det}(A)$; assim, basta escolher $c = 1/k$ para obter o resultado desejado. □

Corolário 3.17. *Se a matriz quadrada A , de números reais e ordem n , possui $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ como matriz linha-reduzida à forma escada então existe $c \neq 0$ tal que*

$$\text{Det}(A) = c \cdot \prod_{i=1}^n b_{ii}.$$

Demonstração. Aplique o Corolário anterior para obter uma constante $c \neq 0$ tal que $\text{Det}(A) = c \text{Det}(B)$ e observe então que o determinante de B é o produto dos elementos da diagonal principal posto que sendo reduzida à forma escada é uma matriz triangular superior (vide a Proposição 3.13). □

¹Lembre que A e B são matrizes linha-equivalentes se B resulta de A (ou equivalentemente, se A resulta de B) a partir de finitas operações elementares.

Corolário 3.18. *A matriz $A_{n \times n}$ possui posto máximo, n , se e somente se $\text{Det}(A) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $B_{n \times n}$ a matriz escalonada, linha-equivalente, obtida de A pelo processo de Eliminação Gaussiana. Então, o posto de A é o número de linhas não nulas de B e, pelo Corolário 3.17, existe $c \neq 0$ tal que

$$\text{Det}(A) = c \cdot \prod_{i=1}^n b_{ii}.$$

Logo, $\text{Det}(A) \neq 0$ se e somente se $b_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$; ou seja, se e somente se todas as linhas de B são não nulas o que, por sua vez, significa que o posto de A é exatamente n . \square

Definição 3.19. As matrizes quadradas com determinante diferente de zero são ditas não-singulares enquanto que as que possuem determinante igual a zero são chamadas matrizes singulares.

Este resultado relacionando posto com determinante pode ser generalizado para matrizes de qualquer ordem da seguinte forma.

Teorema 3.20. *O posto da matriz $A_{m \times n}$ é a maior ordem dentre as submatrizes de A com determinante não nulo.*

Exemplo 3.21. Classifique o sistema de equações lineares a seguir, sem resolvê-lo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = -1. \end{cases}$$

Solução. Neste caso, a matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ não é de posto máximo, 3, pois seu determinante é zero (note que a linha 3 é múltiplo da linha 2). Por outro lado, A possui ao menos a submatriz quadrada de ordem 2, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, com determinante não nulo. Assim, o posto de A é igual a dois. Obviamente, o posto de $[A|b]$ é igual ou maior do que dois. No caso,

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 0 + 3 - 0 + 3 = 1 \neq 0.$$

Ou seja, admite ao menos uma submatriz quadrada não singular de ordem três. Consequentemente, o posto da matriz ampliada é três, diferente do posto de A , e o sistema é impossível.

Exemplo 3.22. Classifique o sistema de equações lineares a seguir, sem resolvê-lo

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Solução. A matriz de coeficientes possui determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14 - 12 - 3 = -1 \neq 0.$$

Então, A é de posto máximo, três, e, conseqüentemente, o posto de $[A|b]$ também é igual a três. Logo, o sistema é possível. Por outro lado, a nulidade de A é igual a $n - \text{posto}(A) = 3 - 3 = 0$ e, assim, o sistema é determinado.

3.3 Matriz inversa

Diz-se que uma matriz quadrada A é *inversível* quando existe uma matriz B quadrada, da mesma ordem, tal que $AB = I = BA$. No caso afirmativo, B é chamada matriz inversa de A e denotada A^{-1} .

Obviamente, a matriz identidade é inversível e coincide com a sua inversa: $I \cdot I = I$. Por outro lado, a matriz nula não é inversível: $0 \cdot B = 0 \neq I, \forall B$.

Proposição 3.23. *Seja A uma matriz quadrada de números reais. Então, A é inversível se e somente se $\det(A) \neq 0$. No caso afirmativo,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad \text{e} \quad \text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}.$$

Demonstração. Suponha, inicialmente, que A é inversível com inversa A^{-1} . Então,

$$AA^{-1} = I \implies \text{Det}(A)\text{Det}(A^{-1}) = \text{Det}(AA^{-1}) = \text{Det}(I) = 1 \implies$$

$$\text{Det}(A) \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}.$$

Suponha agora que $\text{Det}(A) \neq 0$ e aplique a Proposição 3.14 para obter

$$A \cdot \text{Adj}(A) = \det(A) \cdot I \implies A \cdot \left(\frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A) \right) = I;$$

e, analogamente,

$$\left(\frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A) \right) \cdot A = I.$$

Ou seja, A é inversível e a inversa de A é a matriz, unicamente determinada,

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A).$$

□

Proposição 3.24. *Se $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ são inversíveis então AB é inversível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração. Note que $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$; assim, se A e B são inversíveis então seus determinantes não nulos implicam $\text{Det}(AB)$ também diferente de zero e, conseqüentemente, AB é inversível. Quanto a sua inversa, as igualdades

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

comprovam que $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB . □

Proposição 3.25. *Se A é inversível então A^T é inversível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração. De fato, $\text{Det}(A^T) = \text{Det}(A) \neq 0$ e

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I \quad \wedge \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I.$$

□

Exemplo 3.26. Determine se $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ é inversível ou não, e calcule sua inversa no caso afirmativo.

Solução. Calculando o determinante de A obtemos

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 22 = 2 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \frac{1}{2} \text{Adj}(A).$$

Basta então calcular a matriz adjunta de $A_{2 \times 2}$:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|[a_{22}]| = a_{22}, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}|[a_{21}]| = -a_{21},$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|[a_{12}]| = -a_{12}, \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}|[a_{11}]| = a_{11},$$

$$\bar{A} = [\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \implies \text{Adj}(A) = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, neste caso particular,

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observação 3.27. O cálculo da inversa de A também pode ser efetuado resolvendo a equação matricial $AX = I$; ou seja, resolvendo n sistemas de equações lineares simultâneos, um para cada coluna de X . A saber,

$$Ax_{()1} = e_1^T, \quad Ax_{()2} = e_2^T, \quad \dots \quad Ax_{()n} = e_n^T,$$

em que $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. A hipótese $\text{Det}(A) \neq 0$ garante que todos eles são possíveis determinados e, como em todos eles a matriz de coeficientes é a mesma, pode-se aplicar Eliminação Gaussiana na matriz n -ampliada

$$[A \mid e_1^T \ e_2^T \ \dots \ e_n^T] = [A \mid I]$$

para resolver simultaneamente todos os sistemas; processo este mais eficiente do ponto de vista numérico do que o cálculo via matriz adjunta. Voltando ao exemplo anterior, a matriz 2-ampliada correspondente é

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1/6} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & -11/6 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_1 := l_1 - l_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1/3 & -11/6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \cdot 3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11/2 & 3 \end{array} \right] = [I \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Confirmando que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.4 Regra da Cramer

Dedicaremos esta seção à solução de sistemas de equações lineares possíveis e determinados que possuem exatamente o mesmo número de equações e de variáveis; ainda que o método de Eliminação Gaussiana seja aplicável de forma eficiente, a Regra de Cramer permite obter diretamente o valor de uma variável qualquer sem precisar efetuar o cálculo de nenhuma outra das incógnitas o que pode ser útil principalmente no caso de sistema muito grandes.

Teorema 3.28. *Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ em que $A_{n \times n}$ e $\text{Det}(A) \neq 0$. Então, o sistema é possível e determinado e, se x representa o vetor solução,*

$$x_j = \frac{\text{Det}(A_j)}{\text{Det}(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

em que A_j é a matriz obtida de A substituindo a sua coluna j pelo termo independente b .

Demonstração. A hipótese $\text{Det}(A) \neq 0$ garante que A possui posto máximo e também $[A|b]$, no caso n , e que a nulidade de A seja zero; ou seja, o sistema é possível e determinado; além disso, A é inversível e $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A)$. Logo, se x é o vetor solução,

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A)b.$$

Ou seja,

$$x = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{bmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots + b_n\Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Basta agora observar que o desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante de A_j , pela coluna j , coincide com

$$b_1\Delta_{1j} + b_2\Delta_{2j} + \cdots + b_n\Delta_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

□

Exercício. Resolva o sistema do Exemplo 3.22 pela Regra de Cramer.

Solução. Lembre que matriz de coeficientes possui determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{Det}(A_1) = 49 \implies x = \frac{49}{-1} = -49;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies \text{Det}(A_2) = -9 \implies x = \frac{-9}{-1} = 9;$$

e

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{Det}(A_3) = -18 \implies x = \frac{-18}{-1} = 18;$$

3.5 Volume via determinante

Uma das aplicações do determinante se dá no cálculo de área de paralelogramos e no cálculo de volume de paralelepípedos. Por exemplo, um retângulo de lados a e b , em \mathbb{R}^2 , é um paralelogramo retângulo gerado pelos vetores $v_1 = (a, 0)$ e $v_2 = (0, b)$; colocando estes vetores na sua ordem por linhas obtém-se uma matriz $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab;$$

ou seja, o determinante de A coincide com a área do retângulo em questão. Obviamente, os vetores permutados v_2, v_1 geram o mesmo retângulo; porém o determinante da matriz correspondente é $-ab$; ou seja, o valor da área com sinal trocado; desse modo, é o valor absoluto do $\text{Det}(A)$ que coincide com a área do paralelogramo em questão.

Definição 3.29 (Matriz de Gram). Dados os vetores v_1, v_2, \dots, v_n , em \mathbb{R}^n , a matriz de Gram associada é a matriz quadrada $G = G(v_1, \dots, v_n) = [g_{ij}]_{n \times n}$ em que $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Por exemplo, para dois e três vetores respectivamente tem-se

$$G(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

Proposição 3.30. *A matriz de Gram é simétrica.*

Demonstração. Note que $g_{ji} = \langle v_j, v_i \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = g_{ij}$, $\forall i, j$, pois o produto interno (real) é simétrico. \square

Proposição 3.31. *Se A é a matriz quadrada de ordem n que tem nas suas linhas os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, respeitando a ordem, então a matriz de Gram associada, G , verifica*

$$G = A \cdot A^T.$$

Demonstração. De fato, o elemento na posição ij da matriz produto $A \cdot A^T$ é, por definição, o produto interno da linha i da A (no caso o vetor v_i) com a coluna j de A^T (no caso o vetor v_j). \square

Corolário 3.32. *Se A é a matriz quadrada de ordem n que tem nas suas linhas os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, respeitando a ordem, então a matriz de Gram associada, G , verifica*

$$\text{Det}(G) = [\text{Det}(A)]^2.$$

Em particular,

$$\text{Det}(G) \geq 0; \quad \text{Det}(G) = 0 \Leftrightarrow \text{Det}(A) = 0; \quad \text{e} \quad \sqrt{\text{Det}(G)} = |\text{Det}(A)|.$$

Demonstração. Sabe-se, da Proposição 3.31, que $G = AA^T$. Então,

$$\text{Det}(G) = \text{Det}(AA^T) = \text{Det}(A)\text{Det}(A^T) = \text{Det}(A)\text{Det}(A) = \text{Det}^2(A) \geq 0.$$

□

Corolário 3.33. *Seja G a matriz de Gram associada aos vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Então, $\text{Det}(G) = 0$ se, e somente se, v_1 e v_2 são co-lineares.*

Demonstração. Note que $v_2 = \alpha v_1$ se, e somente se,

$$0 = \alpha v_1 + (-1)v_2 = \underbrace{[v_1 \ v_2]}_{A^T} \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

o sistema $A^T x = 0$ admite solução não nula; ou seja, $\text{Det}(A^T) = 0$. Lembrando que $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$ e que $\text{Det}(G) = 0$ se, e somente se, $\text{Det}(A) = 0$ conclui-se que v_1 e v_2 são co-lineares se, e somente se, $\text{Det}(G) = 0$. □

Corolário 3.34. *Seja G a matriz de Gram associada aos vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Então, $\text{Det}(G) = 0$ se, e somente se, v_1, v_2 e v_3 são co-planares.*

Demonstração. Suponha que os vetores sejam co-planares de modo que um deles, digamos v_3 , esteja no plano gerado pelos outros dois vetores: $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$, para certas escolhas de α e β em \mathbb{R} . Então,

$$0 = \alpha v_1 + \beta v_2 + (-1)v_3 = \underbrace{[v_1 \ v_2 \ v_3]}_{A^T} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siga então o mesmo raciocínio da demonstração anterior para concluir que $\text{Det}(A) = 0$ e, assim, $\text{Det}(G) = 0$. □

Teorema 3.35. *Sejam v_1 e v_2 , vetores não co-lineares em \mathbb{R}^2 e G , a matriz de Gram associada. Então, $\sqrt{\text{Det}(G)}$ é igual a área do paralelogramo de lados v_1 e v_2 .*

Demonstração. Seja θ o ângulo entre os vetores v_1 e v_2 . Então, $\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos(\theta)$ e

$$G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos(\theta) \\ \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos(\theta) & \|v_2\|^2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\text{Det}(G) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos(\theta))^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2(\theta).$$

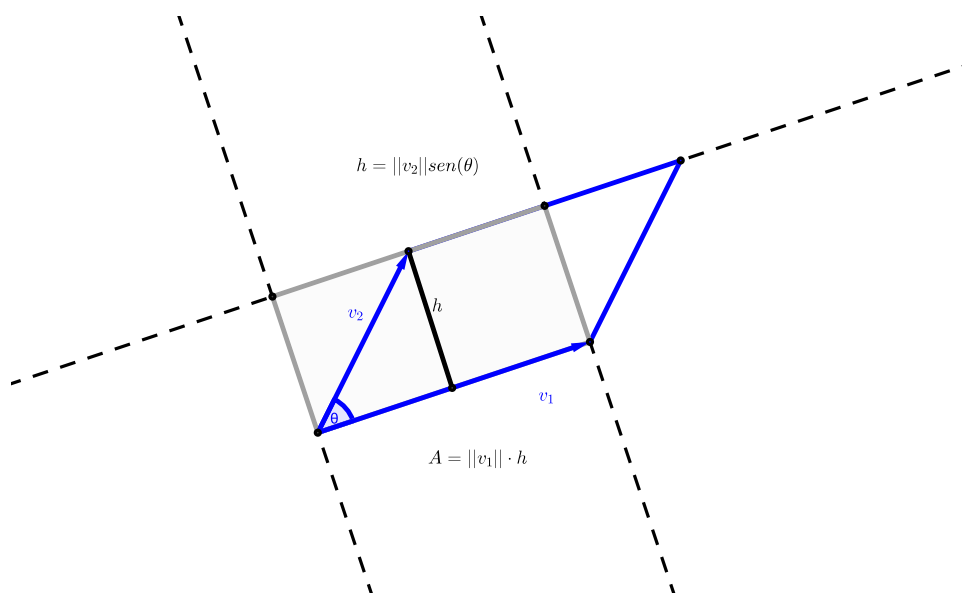


Figura 3.1: Área do paralelogramo.

Assim,

$$\sqrt{\text{Det}(G)} = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot |\text{sen}(\theta)| = \|v_1\| \left(\underbrace{\|v_2\| \text{sen}(\theta)}_h \right)$$

é exatamente a área do retângulo da base $\|v_1\|$ e altura $h = \|v_2\| \text{sen}(\theta)$, que coincide com a área do paralelogramo de lados v_1 e v_2 (consulte a Figura 3.1).

□

Teorema 3.36. *Sejam v_1, v_2 e v_3 , vetores não co-planares em \mathbb{R}^3 e G , a matriz de Gram associada. Então, $\sqrt{\text{Det}(G)}$ é igual ao volume do paralelepípedo P gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 , $P = \{t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3; 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$.*

Demonstração. É um bom desafio.

Observação 3.37. Para $n \geq 4$ ainda pode-se falar de $\sqrt{\text{Det}(G)}$ como volume n -dimensional do paralelepípedo

$$P = \{t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_nv_n; 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Basta aceitar que para um bloco n -dimensional $B = \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, formado pelo produto cartesiano dos intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, o volume n -dimensional é o produto do comprimento dos seus lados: $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Exemplo 3.38. Determine a área do paralelogramo gerado pelos vetores $(1, 2)$ e $(3, 4)$.

Solução. Seja A a matriz que possui ditos vetores por linha. Então

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Logo,

$$\sqrt{\text{Det}(G)} = |\text{Det}(A)| = |-2| = 2.$$

3.6 Exercícios: Determinante e suas aplicações.

3.6.1 Propriedades básicas do determinante

Q 3.1. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule

$$a) \det(A) + \det(B) \quad b) \det(A + B).$$

Q 3.2. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$.

(b) $\det(A^T) = \det(A)$.

(c) $\det(2A) = 2\det(A)$.

(d) $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

(e) $\det(A_{ij}) < \det(A)$.

(f) Se $A_{3 \times 3} = [a_{ij}]$ então

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}.$$

Q 3.3. a) Prove que o determinante de uma matriz triangular superior (inferior) é igual ao produto dos elementos de sua diagonal.

b) O que pode ser dito sobre o número de soluções dos sistemas abaixo?

$$(i) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_2 + 9x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 1. \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} 3x_5 + x_4 + x_1 = 0 \\ -x_3 + x_2 - x_1 = 5 \\ -9x_3 - x_2 + 9x_1 = 0 \\ -3x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Definição 3.39. Se ϵ representa uma operação elementar e $\epsilon(A)$, a matriz obtida de A pela aplicação de dita operação, define-se $\epsilon(I)$ como sendo a matriz elementar associada. Ou seja, $\epsilon(I)$ é a matriz obtida da identidade aplicando-se a operação elementar ϵ .

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\epsilon =$ permutar linha um com linha dois então

$$\epsilon(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \epsilon(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q 3.4. Prove que dada $A_{m \times n}$ se ϵ é uma operação elementar então $\epsilon(A) = \epsilon(I) \cdot A$.

Q 3.5. Prove que dada $A_{n \times n}$ se ϵ é uma operação elementar então

$$\text{Det}(\epsilon(A)) = \text{Det}(\epsilon(I)) \text{Det}(A).$$

Conclua que $\text{Det}(A) \neq 0$ se e somente se $\text{Det}(\epsilon(A)) \neq 0$.

Q 3.6. Calcule o determinante de

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Q 3.7. Sejam $X = [x_{ij}]_{r \times r}$ e $Y = [y_{ij}]_{(n-r) \times (n-r)}$ matrizes reais, $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$. Mostre que:

$$(1) \text{ Se } A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \text{ então } A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ Se } A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \text{ então } \det(A) = \det(X) \det(Y).$$

Q 3.8. Achar o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

1. desenvolvendo por uma linha ou coluna;
2. usando transformações elementares das linhas para reduzir a matriz à forma escalonada e os exercícios 3.3-3.5.

Q 3.9. Considere a matriz d_n a seguir (chamada Matriz de Vandermonde): fixados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$d_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Prove que

$$\det(d_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \det(d_{n-1}).$$

2. Conclua que

$$\det(d_n) = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j).$$

3.6.2 A matriz inversa

Q 3.10. Dada a matriz A determine \bar{A} , $\text{Adj}(A)$, $\det(A)$ e A^{-1} (caso exista):

$$a) \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Q 3.11. Efetue o processo de eliminação Gaussiana simultâneo para o cálculo de A^{-1} na questão anterior 3.10.

Q 3.12. As matrizes A e B são ditas semelhantes se existe uma matriz P inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que se A e B são semelhantes então $\det(A) = \det(B)$.

Q 3.13. Suponha que A é uma matriz diagonal com $\det(A) \neq 0$. Prove que se a_1, a_2, \dots, a_n são os elementos da diagonal principal de A então A^{-1} é diagonal e seus elementos na diagonal principal são $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n$ respectivamente.

Q 3.14. Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada qualquer. Lembrando que o traço de A é definido por $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, responda:

1. $\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right) = ?$
2. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) ?$
3. $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A) ?$
4. $\text{Tr}(A) = (\text{Tr}(A^{-1}))^{-1} ?$
5. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) ?$

3.6.3 Regra de Cramer

Q 3.15. Resolva aplicando a Regra de Cramer, se possível, os sistemas nas Questões 2.10 e 2.14 da seção sobre sistemas lineares.

Q 3.16. Identifique as hipóteses necessárias, em função dos parâmetros, para aplicar a Regra de Cramer nos modelos de Renda Nacional da seção 2.7.3.

Q 3.17. Aplique a Regra de Cramer, se possível, nas questões de Equilíbrio de Mercado da seção 2.7.4.

3.6.4 Posto via Determinante

Q 3.18. Determine o posto das matrizes da questão 3.10

Q 3.19. Classifique os seguintes sistemas (sem efetuar eliminação)

$$1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -3x_2 + 9x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

3.6.5 Volume via Determinante

Q 3.20. Ache a área do paralelogramo (paralelepípedo) cujos vértices são:

1. $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(-2, 1)$ e $(-1, 4)$.
2. $(-1, 3)$, $(1, 5)$, $(3, 2)$ e $(5, 4)$.
3. $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 2)$, $(3, 4, 2)$ e $(4, 2, 4)$.

Q 3.21. Ache o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são os vetores $(1, 1, 2)$, $(3, -1, 0)$ e $(5, 2, -1)$.

Q 3.22. Prove que se $k \in \mathbb{R}$ então o paralelogramo de arestas u e v tem a mesma área que o paralelogramo de arestas u e $v + ku$.

Q 3.23. Prove que se v_1, v_2, v_3 são vetores mutuamente ortogonais então o volume do paralelepípedo por eles gerado é igual ao produto dos seus comprimentos.

3.6.6 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 8 e 14/1994; 13/95; Q5-(1,2)/2001; 6-(2)(3)(4)/2002; 13-(3)(4)/2003; 3-(0-1) e (4)/2004; 1-(3)/2005; 2-(1)/2007; 3/2007; 9 e 11-(4)/2010; 5-(0,1)/2011; 4-(1,2)/2012; 4/2015; 15-(2)/2015; 8/2016; 2/2017; 6-(3,4)/2018; 6-(0,2)/2019.

3.7 Gabarito: Determinante e suas aplicações.

Q 3.1. Fixadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 2(1) = -2, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - (-1)0 = 3$$

e

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-1 \\ 1+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \det(A + B) = 4 - 1 = 3.$$

Então

$$\det(A) + \det(B) = -2 + 3 = 1 \neq 3 = \det(A + B).$$

Q 3.2. a) V , b) V , c) F , d) V , e) F , f) V .

Q 3.3. a) Aplique desenvolvimento de Laplace fixada a primeira coluna (resp. linha) repetidas vezes.

b) Denotando por A e B as matrizes de coeficientes dos sistemas em (i) e (ii) respectivamente (para as variáveis na sua ordem natural x_1, x_2, x_3, \dots) temos

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No item (i), $\det(A) = 5(-3)(-2)(1) \neq 0$ garantindo existência e unicidade da solução. Para o item (ii) obtemos $\det(B) = 0$, então se compatível seria indeterminado. Porém, da última equação temos $x_1 = 0$, da penúltima $x_2 = 0$ decorrendo, da antepenúltima, $x_3 = 0$ e substituindo na segunda equação obtemos a contradição $0 = 5$. Assim, o sistema (ii) não possui nenhuma solução.

Q 3.4. Se multiplicarmos a linha i , e_i , de I por $c \in \mathbb{R}$ então $\epsilon I = [e_1 \cdots ce_i \cdots e_n]^T$ e o elemento na posição ij da matriz produto $\epsilon(I)A$ é igual a

$$\langle ce_i, a_{(j)}^T \rangle = ca_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

enquanto o resto das entradas ficam inalteradas $\langle e_k, a_{(j)}^T \rangle = a_{kj}$, $\forall k \neq i$. Suponha agora que a linha j de I seja modificada pela adição do múltiplo c da linha i , de modo que a matriz $\epsilon(I)$

correspondente tenha sua linha j igual a $\tilde{e}_j = e_j + ce_i$. Então, no produto $\epsilon(I)A$, qualquer outra linha que não a j fica intacta ($\langle e_i, a_{(k)}^T \rangle = a_{ik}, \forall i \neq j$) e na linha j ,

$$\tilde{a}_{jk} = \langle e_j + ce_i, a_{(k)}^T \rangle = a_{jk} + ca_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por último, na permutação da linha i com a j de I , a matriz $\epsilon(I)$ possui na linha i , vetor e_j ; e na linha j , o vetor e_i ; desse modo, ao multiplicar $\epsilon(I)A$ os elementos da linha i são da forma

$$\langle e_j, a_{(k)}^T \rangle = a_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e os elementos da linha j ,

$$\langle e_i, a_{(k)}^T \rangle = a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ou seja, a linha i e j de A foram permutadas.

Q 3.5. Da Questão 3.5 tem-se

$$\text{Det}(\epsilon(A)) = \text{Det}(\epsilon(I) \cdot A) = \underbrace{\text{Det}(\epsilon(I))}_{\pm c \neq 0} \text{Det}(A).$$

Logo, $\text{Det}(A) = 0$ se e somente se $\text{Det}(\epsilon(A)) = 0$.

Q 3.6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 135 - 10 - 9 - 72 = 60.$ E

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2. \end{aligned}$$

Q 3.7. O item (1) decorre da definição de produto de matrizes. Pro item (2) aplique o resultado em (1), a propriedade que estabelece que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes e a decomposição de Laplace para mostrar que

$$\begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{vmatrix} = \text{Det}(Y) \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} X & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = \text{Det}(X).$$

Q 3.8. -72

Q 3.9. Para obter a fórmula recursiva do determinante da matriz de Vandermonde aplique operações de eliminação na última coluna e da última linha para cima para obter, fixados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \det(d_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & 0 \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_{1n} + 0\Delta_{2n} + \cdots \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & (x_{n-1} - x_n) \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+n} \underbrace{(x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n)}_{(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{2n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \det(d_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \det(d_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Aplique então a fórmula recursiva para concluir que

$$\det(d_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \underbrace{\prod_{j=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_j) \det(d_{n-2})}_{\det(d_{n-1})} = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j).$$

Q 3.10.

$$a) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix} \quad b) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/x & 1/x \\ -1 & -1 + 2/x & 1 - 1/x \\ 0 & 2/x^2 & -1/x^2 \end{bmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Q 3.11. Dada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

temos $\text{Det}(A) = 12 + 5 + 0 - (-30) - 2 - 0 = 45 \neq 0$. Logo, existe A^{-1} e $\text{Det}(A)A^{-1} = \text{adj}(A)$. Para calcular a inversa de A apliquemos o processo de eliminação simultaneamente na matriz três-ampliada

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 21/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 45/4 & -5/2 & 3/4 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/15 & 4/45 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/15 & 7/45 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & 7/15 & -2/45 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 1/15 & 4/45 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -2/15 & 7/45 \\ 1/9 & 7/15 & -2/45 \\ -2/9 & 1/15 & 4/45 \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Q 3.12. Seja P uma matriz não singular tal que $B = P^{-1}AP$. Então

$$\text{Det}(B) = \text{Det}(P^{-1}AP) = \text{Det}(P^{-1}) \text{Det}(A) \text{Det}(P) = \frac{1}{\text{Det}(P)} \text{Det}(A) \text{Det}(P) = \text{Det}(A).$$

Q 3.13. A hipótese $\det(A) \neq 0$ garante que A é inversível. Se ainda A é uma matriz diagonal e a_1, a_2, \dots, a_n são os elementos da diagonal principal de A então $0 \neq \text{Det}(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$ implica $a_i \neq 0, \forall i$. Mais ainda, se B é diagonal e seus elementos na diagonal principal são $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n$ respectivamente então, $AB = I = BA$; ou seja, $A^{-1} = B$.

Q 3.14. 1.) 7, 2.) sim, 3.) sim, 4.) não, 5.) não.

Q 3.15. Aplicando a Regra de Cramer nos sistemas da Questão 2.10 obtém-se

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 33, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 12 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 42 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -45;$$

assim, $x = 3/33 = 1/11$, $y = 42/33 = 14/11$ e $z = -45/33 = -15/11$.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}. \quad \text{Então,}$$

$$x = \det(A_1)/\det(A) = -34/(-6) = 17/3 \quad \text{e} \quad y = \det(A_2)/\det(A) = 26/(-6) = -13/3;$$

c) (2, 1, 3).

No caso do sistemas na Questão 2.14, a matriz de coeficiente possui determinante igual a zero e, assim, não se aplica a Regra de Cramer.

Q 3.16. $b + g < 1$ e $a + I_0 \geq bT_0$, na variante com gasto endógeno.

Q 3.17. $P_1 = 34/11$, $P_2 = 38/11$ e $P_3 = 85/11$ na primeira e $P_3 = 267/31 \approx 8,6$ u.m. na segunda questão sobre Equilíbrio de Mercado da seção 2.7.4.

Q 3.18. 4, 3 para $x \neq 0$ e 2 quando $x = 0$; 3.

Q 3.19. 1. Possível e determinado. De fato, $\text{posto}(A) = 3 = \text{posto}(A|b)$ e $\text{nulidade}(A) = 0$:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det}(A|b) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 17 \\ 7 & 0 & 5 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 7 & 5 & 18 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

logo,

$$\text{Det}(A|b) = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 20 \\ 7 & 5 & 25 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

concluindo que o posto de $(A|b)$ é menor do que 4. Por outro lado, A e também $(A|b)$ possuem a submatriz quadrada de ordem três

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Assim, $\text{posto}(A) \geq 3$ e $\text{posto}(A|b) \geq 3$. Obviamente, A não pode ter posto acima de 3 pois possui apenas três colunas.

2. $(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Note que a submatriz de ordem 2, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular; logo, $\text{posto}(A) = 2 = \text{posto}(A|b)$ e $\text{nulidade}(A) = 3 - 2 = 1$. Consequentemente, o sistema é possível e indeterminado.

3. $[A|b] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det}(A) = 5(-3)(-2)(1) \neq 0$; ou seja, o posto de A é máximo (4), e também o de $[A|b]$, de modo que o sistema é possível e determinado (nulidade zero).

Q 3.20. 1. $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 7 u^2;$

2. Trata-se do paralelogramo gerado pelos vetores $v_1 = (3, 2) - (-1, 3) = (4, -1)$ e $v_2 = (1, 5) - (-1, 3) = (2, 2)$: $10 u^2$

3. Note que $(4, 2, 4) - (3, 4, 2) = (1, -2, 2)$ e $(4, 2, 4) - (1, -2, 2) = (3, 4, 2)$; ou seja, o paralelogramo em questão é gerado pelos vetores $v_1 = (1, -2, 2)$ e $v_2 = (3, 4, 2)$ dentro do plano $\pi = \{tv_1 + sv_2; t, s \in \mathbb{R},$ que possui vetor normal $N = v_1 \times v_2$:

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12i + 4j + 10k = (-12, 4, 10) = 2(-6, 2, 5).$$

Note que $\|N\| = 2\sqrt{36 + 4 + 25} = 2\sqrt{65}$. Defina então $v_3 = N/\|N\| = (1/\sqrt{65})(-6, 2, 5)$, de modo que v_3 seja unitário e normal ao paralelogramo gerado por v_1 e v_2 ; assim, o paralelepípedo gerado por v_1, v_2 e v_3 possui volume igual a área de base (do paralelogramo) vezes a altura (um):

$$V = |\text{Det}([v_1 \ v_2 \ v_3]^T)| = |-12(-6/\sqrt{65}) + 4(2/\sqrt{65}) + 10(5/\sqrt{65})| = \frac{|72 + 8 + 50|}{\sqrt{65}} u^3.$$

Logo, a área do paralelogramo em questão é igual a $\frac{130}{\sqrt{65}} = 2\sqrt{65} u^2$.

Q 3.21. $26 u^3$.

Q 3.22. A operação elementar que modifica uma linha pela adição de um múltiplo de outra linha não altera o valor do determinante.

Q 3.23. Assuma que v_1, v_2, v_3 são vetores mutuamente ortogonais. Então, a matriz de Gram associada é igual a

$$G = [\langle v_i, v_j \rangle]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|v_3\|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{\text{Det}(G)} = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \|v_3\|;$$

ou seja, o volume do paralelepípedo por eles gerado é igual ao produto dos seus comprimentos.

ANPEC (1994 Q8). Seja a matriz A definida por:

$$A = I_n - X (X^T X)^{-1} X^T.$$

Marque os itens verdadeiros e os falsos.

F (0) A matriz A só é definida se a matriz X possuir n colunas.

Solução. Uma condição necessária para a existência de A seria o número de linhas (e não o de colunas) igual a n . De fato,

$$X_{n \times m} \implies X_{m \times n}^T, \quad (X^T X)_{m \times m} \quad e \quad (X^T X)_{m \times m}^{-1} \quad \text{caso exista}^2$$

Nesse caso

$$[X_{n \times m} (X^T X)_{m \times m}^{-1}]_{n \times m} \implies \left[[X (X^T X)^{-1}]_{n \times m} X_{m \times n}^T \right]_{n \times n}.$$

V (1) A matriz A é idempotente.

Solução.

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A \left[I - X (X^T X)^{-1} X^T \right] = AI - AX (X^T X)^{-1} X^T \\ &= A - \left[I - X (X^T X)^{-1} X^T \right] X (X^T X)^{-1} X^T \\ &= A - IX (X^T X)^{-1} X^T + X \underbrace{(X^T X)^{-1} X^T X}_{I} (X^T X)^{-1} X^T \\ &= A - X (X^T X)^{-1} X^T + X (X^T X)^{-1} X^T = A \end{aligned}$$

F (2) O traço da matriz A pode ser igual a n .

Solução.

$$\begin{aligned} \text{tra}(A) &= \text{tra} \left(I_n - X (X^T X)^{-1} X^T \right) = \text{tra}(I_n) - \text{tra} \left(X (X^T X)^{-1} X^T \right) \\ &= n - \text{tra} \left(X^T X (X^T X)^{-1} \right) = n - \text{tra}(I_m) = n - m < n. \end{aligned}$$

F (3) A matriz A é não-singular.

Solução. Usaremos a seguinte propriedade que deixamos como exercício

Exercício. Se A é idempotente então $\text{posto}(A) = \text{traço}(A)$.

Então, de (1) e (2), $\text{posto}(A_{n \times n}) = n - m < n$. Ou seja, o posto não é máximo.

V (4) $A^T = A$.

²Uma condição suficiente para a existência da inversa de $X^T X$ é o posto de X^T ser máximo.

Solução. Utilizando as propriedades $(C + D)^T = C^T + D^T$, $(B^T)^T = B$ e $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} A^T &= \left[I - X (X^T X)^{-1} X^T \right]^T = I^T - \left[X (X^T X)^{-1} X^T \right]^T \\ &= I - [X^T]^T \left[(X^T X)^{-1} \right]^T X^T = I - X \left[(X^T X)^T \right]^{-1} X^T \\ &= I - X \left[X^T (X^T)^T \right]^{-1} X^T = I - X [X^T X]^{-1} X^T = A. \end{aligned}$$

ANPEC (1994 Q14). Se A, B e C são matrizes, indique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:

F (0) Para quaisquer A, B e C, todas quadradas de mesma ordem, $tr(ABC) = tr(CBA)$.

Solução. A propriedade que poderia ser descrita aplicando a questão 3.14, item (2), é $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$, que não coincide com $tr(CBA)$ em geral como mostra o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$AB = [0]_{2 \times 2} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Consequentemente,

$$ABC = 0 \quad \text{e} \quad CBA = A \implies tr(ABC) = 0 \neq 1 = tr(CBA).$$

F (1) Se $AB = 0$, então, necessariamente, ou A ou B é nula, ou ambas são nulas.

Solução. Vide as matrizes A e B do item acima.

V (2) Se A, B e C são quadradas de mesma ordem e não singulares, então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Solução. Aplique duas vezes a propriedade para matrizes não singulares da mesma ordem X e Y: $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$. Primeiro com $X = A$ e $Y = BC$ para obter $(ABC)^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1}$ e depois com $X = B$ e $Y = C$ para obter $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.

F (3) Para quaisquer A, B e C, quadradas e de mesma ordem, $det(A + B + C) = det(A) + det(B) + det(C)$.

Solução. Considere, por exemplo, $C = 0$, $A = I$ e $B = -I$ de ordem $n = 2$. Então

$$det(A+B+C) = det(0) = 0 \neq 2 = 1 + (-1)^2 = det(I) + det(-I) + det(0) = det(A) + det(B) + det(C).$$

F (4) Se A é quadrada e não singular, então, $\det(2A) = 2[\det(A)]$.

Solução. Lembre que $\det(cA) = c^n[\det(A)]$ onde n é a ordem da matriz.

ANPEC (1995 Q13). Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas.

V (0) Se A é uma matriz ortogonal, então $\det(A)$ pode ser negativo.

Solução. O determinante de uma matriz ortogonal pode ser -1 (ou 1): $A^T A = I$ implica $1 = \det^2(A)$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{ortogonal} \quad e \quad \det(A) = -1.$$

V (1) Seja A uma matriz quadrada de ordem ímpar. Se $A' = -A$, então, $\det(A) = 0$.

Solução. $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ implica $\det(A) = 0$.

F (2) Seja A uma matriz não singular de ordem n . Se $A = A^{-1}$, então, A é necessariamente uma matriz identidade.

Solução. Vide a matriz descrita como exemplo no item (0). Ela é ortogonal e simétrica, logo coincide com sua inversa; porém, não é a identidade.

F (3) Seja A uma matriz triangular não singular, então, se os elementos fora da diagonal principal são todos negativos, $\det(A)$ é positivo.

Solução. Os elementos fora da diagonal principal não influenciam o determinante de uma matriz triangular, que é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

V (4) Dadas duas matrizes A e B , se suas inversas existem, então, $\det(A) \neq 0$.

Solução. Obvio.

ANPEC (2001 Q5-(1,2)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V (1) A regra de Cramer para resolução de um sistema de equações lineares só pode ser aplicada se a matriz dos coeficientes do sistema for inversível.

F (2) Para que um sistema homogêneo de equações lineares tenha infinitas soluções basta que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero.

Solução. Se o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero então o sistema possui uma única solução: a trivial.

ANPEC (2002 Q6-(2,3,4)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (2) Seja I uma matriz identidade $n \times n$ e $X_{n \times k}$ uma matriz com posto igual a k . Então, se $A = I - X(X^T X)^{-1} X^T$ então A é simétrica e $\det(A^T A) > \det(A)$.

Solução. Note que A é idempotente e simétrica (vide a questão anterior (Q4-94)), i.e. $A^T = A$ e $AA = A$. Então $A^T A = AA = A$ e $\det(A^T A) = \det(A)$.

F (3) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Se $AB = BA$ então $\det[(A + B)^2] = \det^2(A) + 2\det(A)\det(B) + \det^2(B)$.

Solução. Observe que a afirmação equivale a

$$[\det(A + B)]^2 = [\det(A) + \det(B)]^2 \Leftrightarrow |\det(A + B)| = |\det(A) + \det(B)|$$

o que não vale em geral (vide gabarito na Questão 3.1 desta lista).

V (4) Sejam A e B matrizes triangulares inferiores $n \times n$, cujos elementos da diagonal principal são dados por (a_{11}, \dots, a_{nn}) e (b_{11}, \dots, b_{nn}) , respectivamente. Então $\det(A + B) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii})$.

Solução. Observe que $A + B$ também é triangular inferior e que os elementos da sua diagonal principal são $(a_{11} + b_{11}, \dots, a_{nn} + b_{nn})$. Aplique então o item (a) da questão 3.3 da lista.

ANPEC (2003 Q13-(3,4)). V ou F

V (3) No sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

é possível definir as variáveis x_2 e x_3 como funções das variáveis x_1 e x_4 .

Solução. Observe que a afirmação equivale a dizer que o sistema a seguir é compatível determinado para cada escolha fixada de x_1 e x_4 :

$$\begin{aligned} -5x_2 + 2x_3 &= -3x_1 - 4x_4 \\ -10x_2 - 4x_3 &= -6x_1 + 6x_4 \end{aligned}$$

o que de fato se verifica pois a matriz de coeficientes tem determinante diferente de zero

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4) - 2(-10) = 20 + 20 = 40 \neq 0.$$

F (4) No sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

é possível definir as variáveis x_1 e x_2 como funções das variáveis x_3 e x_4 .

Solução. Procedendo de forma análoga estudamos o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= -2x_3 - 4x_4 \\ 6x_1 - 10x_2 &= 4x_3 + 6x_4, \end{aligned}$$

que para cada escolha de x_3 e x_4 possui matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -2x_3 - 4x_4 \\ 6 & -10 & 4x_3 + 6x_4 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & -2x_3 - 4x_4 \\ 0 & 0 & 8x_3 + 14x_4 \end{array} \right]$$

Assim, o posto da matriz de coeficientes é um (1); mas, o da matriz ampliada pode ser dois (basta que $8x_3 + 14x_4 \neq 0$) e o sistema torna-se incompatível.

ANPEC (2004 Q3-(0-2,4)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

F (0) Se $\vec{b} = \vec{0}$ então a única solução do sistema linear $Ax = b$ é a solução $\vec{x} = \vec{0}$.

Solução. $\det(A) = 0$ (vide item (4)) implica que sistema homogêneo possui infinitas soluções.

V (1) O sistema $Ax = b$ tem solução se e somente se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

Solução. Aplicando eliminação Gaussiana sobre a matriz ampliada podemos calcular seu posto. Observando que o posto de A é dois (item (4)) a afirmação equivale a posto $[A|b]$ igual a dois se, e somente se, $b_1 + b_2 + b_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & b_1 \\ 1 & -1 & 1 & b_2 \\ -3 & 2 & 2 & b_3 \end{array} \right] &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 2 & -1 & -3 & b_1 \\ -3 & 2 & 2 & b_3 \end{array} \right] \leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -5 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & -1 & 5 & b_3 + 3b_2 \end{array} \right] &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -5 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

De fato, posto $[A|b]$ igual a dois se, e somente se, a última linha da matriz acima é nula. Ou seja, se e somente se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

F (2) Se $Ax = b$, então $x = A^{-1}b$.

Solução. Note que não existe A^{-1} pois A é singular (vide item (4)).

V (4) O posto da matriz A é 2.

Solução. Note que $\text{Det}(A) = -4 + 3 - 6 + 9 - 4 + 2 = 0$ implica posto menor que 3.

Por outro lado, a submatriz quadrada de ordem dois $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ possui determinante $-2 + 1 = -1 \neq 0$. Então o posto é maior o igual a dois, i.e., dois.

ANPEC (2005 Q 1-(3)). Avalie a afirmativa sobre a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

F (3) Seja I_4 a matriz identidade de dimensão 4x4. Pode-se garantir que $\text{Det}(A) = \text{Det}(I_4) = 1$.

Solução. A é uma matriz triangular; logo, seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal: $1(5)(8)(10) = 400 \neq 1$.

ANPEC (2006 Q1-(3)). Avalie as afirmativas abaixo se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

F (3) Seja I a matriz identidade de ordem 2. As matrizes $A - I$ e $A + I$ são inversíveis.

Solução. Note que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det}(A - I) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \nexists [A - I]^{-1}.$$

ANPEC (2007 Q2-(1)). Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

em que a, b, c são constantes. Julgue os itens abaixo:

F (0) O traço de A é $\text{tr}(A) = a + b + c + 6$.

Solução. $\text{tr}(A) = 1 + 2 + 3 = 6$.

V (1) O determinante de A é $\det(A) = 6$.

Solução. $\det(A) = 1(2)3 = 6$.

ANPEC (2007 Q3). Seja \langle, \rangle , o produto escalar usual de \mathbb{R}^{n+1} e $V = V_1 \wedge \cdots \wedge V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ o produto vetorial de vetores linearmente independentes $V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Por de-

finição $\langle V, W \rangle = \det(A_W)$, em que $A_W = \begin{pmatrix} W \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$ é a matriz cujas linhas são os vetores

W, V_1, \dots, V_n . Julgue os itens abaixo:

V (0) $\langle V, V_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Solução. Observe que $\langle V, V_i \rangle = \det(A_{V_i})$ é o determinante de uma matriz que possui duas linhas iguais: a primeira e a i -ésima. Consequentemente, igual a zero.

F (1) $\det(A_V) \neq |V|^2$.

Solução. De fato, $\det(A_V) = \langle V, V \rangle = |V|^2$ (aqui $|\cdot|$ representa a norma induzida pelo produto interno).

V (2) $V \neq 0$.

Solução. No item anterior observamos que $|V|^2 = \det(A_V)$ onde V é o produto vetorial dos vetores L. I. $V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Logo, $V \perp V_i$, para todo i e assim o sistema de vetores $V, V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ também é L.I. Então A_V é de posto máximo e seu determinante é diferente de zero.

V (3) $\det(A_V A_V^T) = |V|^2 \det(g_{ij})$, em que $g_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$.

Solução.

$$\begin{aligned} \det(A_V A_V^T) &= \begin{vmatrix} \langle V, V \rangle & \langle V, V_1 \rangle & \cdots & \langle V, V_n \rangle \\ \langle V_1, V \rangle & \langle V_1, V_1 \rangle & \cdots & \langle V_1, V_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V_n, V \rangle & \langle V_n, V_1 \rangle & \cdots & \langle V_n, V_n \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \|V\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle V_1, V_1 \rangle & \cdots & \langle V_1, V_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle V_n, V_1 \rangle & \cdots & \langle V_n, V_n \rangle \end{vmatrix} \\ &= \|V\|^2 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + 0\Delta_{12} + \cdots + 0\Delta_{1(n+1)} = \|V\|^2 \det(g_{ij}). \end{aligned}$$

V (4) $|V| = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

Solução. Do item (3) obtemos

$$\|V\|^2 \det(g_{ij}) = \text{Det}(A_V A_V^T) = \text{Det}(A_V) \text{Det}(A_V^T) = \text{Det}(A_V) \text{Det}(A_V) = \text{Det}^2(A_V)$$

e aplicando os itens (1) e (2)

$$\|V\|^2 \det(g_{ij}) = \|V\|^4 \implies \det(g_{ij}) = \|V\|^2 \implies \sqrt{\det(g_{ij})} = \|V\|.$$

ANPEC (2010 Q9). Considere os sistemas lineares abaixo e julgue as afirmativas:

$$(I) = \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$(II) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

V (0) Se $k \neq 3$, então o sistema (I) tem solução única;

F (1) Se $k = 0$, o sistema homogêneo associado a (I) tem infinitas soluções;

F (2) Para $k = 1$, a matriz dos coeficientes de (I) é uma matriz ortogonal;

F (3) Se $m > n$, (II) tem sempre solução;

V (4) Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, então o sistema (II) tem sempre solução.

Solução. Seja A a matriz de coeficientes do sistema (I) e observe que $\text{Det}(A) = k - 3$ é zero apenas quando $k = 3$. Consequentemente para qualquer $k \neq 3$ o sistema é compatível determinado independentemente da escolha de b . Logo, (0) é verdadeiro e (1) é falso. Note ainda que quando $k = 1$, $\det(A) = 1 - 3 = -2 \notin \{-1, 1\}$. Consequentemente A não é ortogonal e (2) é falso. O item (3) é falso pois dita afirmação depende da igualdade dos postos da matriz de coeficientes com a matriz ampliada. O item (4) é verdadeiro porque a escolha $x_i = 0, \forall i$ é sempre solução trivial em sistemas de equações lineares homogêneos.

ANPEC (2010 Q11-(4)). Seja $C = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Julgue a afirmativa:

(4) C é invertível não simétrica.

Solução. Esta questão é passível de anulação. Não fica claro si trata-se de: “ C não é simétrica qualquer que seja θ ” (o que seria falso, tome $\theta = 0$) ou, a negação de “ C é simétrica” (que é obviamente verdadeiro). Eu me inclino pela última interpretação. Sobre a questão de C inversível a resposta é sim pois

$$\text{Det}(C) = \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0.$$

ANPEC (2011 Q5-(0,1)). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Considere o sistema $Ax = b$ abaixo e julgue as afirmativas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

V (0) Se o posto de A é menor do que n , então o sistema não tem solução ou possui um número infinito de soluções.

Solução. Caso o posto de A coincida com o posto de $[A|b]$, a nulidade $n - \text{posto}(A)$ seria positiva.

V (1) Se o vetor v é combinação linear das colunas de A , então o sistema admite solução.

Solução. Suponha que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são escalares tais que

$$b = \alpha_1 \vec{a}_{(\cdot)1} + \cdots + \alpha_n \vec{a}_{(\cdot)n},$$

em que $\vec{a}_{(\cdot)1}, \dots, \vec{a}_{(\cdot)n}$ representam as colunas de A . Então, $b_i = \alpha_1 a_{i1} + \cdots + \alpha_n a_{in}$, $i = 1, \dots, n$. Ou seja, $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ é uma solução.

ANPEC (2012 Q4-(1,2)). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Julgue as afirmativas:

V (1) Se $A^2 + A = I$, então $A^{-1} = A + I$, em que I é a matriz identidade.

Solução. A hipótese $A^2 + A = I$ implica

$$A(A+I) = I \implies \det(A)\det(A+I) = \det(A(A+I)) = \det(I) = 1 \implies \det(A) \neq 0.$$

Logo, A é inversível e multiplicando à esquerda pela inversa de A obtemos

$$A^{-1}A(A+I) = A^{-1}I \Leftrightarrow (A^{-1}A)(A+I) = A^{-1} \Leftrightarrow I(A+I) = A^{-1} \Leftrightarrow A+I = A^{-1}.$$

F (2) Se todos os elementos da diagonal principal de A são nulos, então $\det A = 0$.

Solução. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $a_{11} = 0 = a_{22}$; porém, $\det(A) = -1 \neq 0$.

ANPEC (2015 Q4). Uma matriz de Markov é uma matriz quadrada, que em cada entrada tem um número não negativo e a soma das entradas de qualquer coluna é igual a 1. A ordem de uma matriz de Markov é o número de linhas (ou colunas) dela. Afirmamos:

F (0) A soma de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;

Solução. A soma tem entradas de qualquer coluna somando dois.

V (1) O produto de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;

Solução. Note que se A é uma matriz quadrada com entradas não-negativas então ela é de Markov se e somente se $A^T e = e$, em que $e = (1, 1, \dots, 1)^T$. Suponha então que A e B da mesma ordem são matrizes de Markov; ou seja, A e B são de entradas não negativas e $A^T e = e$ e $B^T e = e$. Então, pela definição de produto de matrizes, AB é uma matriz quadrada da mesma ordem e com entradas não negativas. Além disso,

$$(AB)^T e = (B^T A^T) e = B^T (A^T e) = B^T e = e.$$

F (2) A inversa de uma matriz de Markov (quando ela exista) é também uma matriz de Markov;

Solução. A inversa pode ter entradas negativas. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$ possui inversa $A^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

V (3) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de Markov e $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um vetor de componentes não negativos que somam 1, então $Mv \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ também é um vetor de componentes não negativos que somam 1;

Solução. Suponha que $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ verifica $\lambda_i \geq 0$, $\forall i$, com $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e considere $M = [w_1, w_2, \dots, w_n]_{n \times n}$ como sendo uma matriz de Markov em que w_i representa a coluna i , $i = 1, \dots, n$. Então,

$$Mv = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n$$

é uma combinação convexa das colunas de M . Ou ainda,

$$\sum_{j=1}^n [\lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \dots + \lambda_n w_{nj}] = \lambda_1 \sum_{j=1}^n w_{1j} + \dots + \lambda_n \sum_{j=1}^n w_{nj} = \lambda_1 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot 1 = 1.$$

V (4) Se $\alpha \in [0, 1]$ e $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes de Markov, então $\alpha M + (1 - \alpha)N$ também é uma matriz de Markov.

Solução. Obviamente $\alpha M + (1 - \alpha)N$ tem entradas não negativas e

$$(\alpha M + (1 - \alpha)N)^T e = \alpha M^T e + (1 - \alpha)N^T e = \alpha e + (1 - \alpha)e = e.$$

ANPEC (2015 Q15-(2)). Analise a veracidade das seguintes afirmações:

F (2) Uma matriz positiva é aquela cujas entradas são todas positivas. Portanto toda matriz positiva tem determinante não nulo.

Solução. Considere, por exemplo, $A = [1]_{2 \times 2}$.

ANPEC (2016 Q8). Seja $A(x) = b$ um sistema de equações lineares, com A uma matriz de ordem $m \times n$ e b um vetor de ordem $m \times 1$. Analise a veracidade das seguintes alternativas:

F (0) Se A for uma matriz quadrada não nula com determinante nulo, então o sistema nunca tem solução;

Solução. Basta, por exemplo, que b seja o vetor nulo para obtermos a solução trivial.

F (1) Se A tiver posto máximo, então a solução do sistema é única;

Solução. Depende da nulidade.

F (2) Se, no item anterior, tivermos $m < n$, então a solução é única;

Solução. Neste caso o sistema é indeterminado pois a nulidade é positiva.

V (3) Se o vetor b for combinação linear das colunas da matriz A , então o sistema tem pelo menos uma solução;

Solução. De fato, os coeficientes da combinação linear descrevem uma solução.

V (4) Se A for uma matriz diagonal com determinante $|A| \neq 0$, então a média geométrica de x_1, x_2, \dots, x_n é inversamente proporcional a $\sqrt[n]{|A|}$, em que (x_1, x_2, \dots, x_n) é solução do sistema.

Solução. Neste caso, $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$ implica $a_{ii} \neq 0$ e $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \forall i$. Logo,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_{11}} \cdot \frac{b_2}{a_{22}} \cdots \frac{b_n}{a_{nn}}} = \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{|A|}}.$$

Supondo, claro, que $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \geq 0$ e $|A| > 0$, quando n for par.

ANPEC (2017 Q2). Uma matriz é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N_{n \times n}$ é chamada nilpotente se existe um número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas). Classifique as seguintes afirmações segundo a sua veracidade:

V (0) O determinante de uma matriz nilpotente é zero;

Solução. Sejam $N_{n \times n}$ e k inteiro positivo tais que $N^k = 0$, então

$$0 = \text{Det}(N^k) = (\text{Det}(N))^k \implies \text{Det}(N) = 0.$$

V (1) Se $M_{n \times n}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que

$$[I - M]^{-1} = I + M + \dots + M^r;$$

Solução. Seja $r = k - 1$ em que k é a constante da nilpotência. Então,

$$(I - M)(I + M + \dots + M^r) = I + M + \dots + M^r - M - M^2 - \dots - M^r - M^{r+1} = I - M^k = I - 0 = I.$$

Analogamente, $(I + M + \dots + M^r)(I - M) = I$; ou seja, $I - M$ é inversível e

$$[I - M]^{-1} = I + M + \dots + M^{k-1}.$$

F (2) A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;

Solução. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então, A e B são nilpotentes enquanto $A + B$ não (note que $\text{Det}(A + B) = -1 \neq 0$).

F (3) O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;

Solução. Poderia ser zero.

V (4) A matriz $M_{n \times n}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

Solução. Observe que

$$(I - M)(I - M) = I(I - M) - M(I - M) = (I - M) + (M^2 - M) \Leftrightarrow (I - M)^2 - (I - M) = M^2 - M.$$

Logo, $(I - M)^2 = I - M$ se e somente se $M^2 = M$.

ANPEC (2018 Q6-(3,4)). Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

V (3) Considere a matriz A , 4×4 , a matriz coluna $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e a equação $Ax = b$. Considere que b e que a inversa de A são:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução será $x = (1, 2, 3, 0)^T$.

Solução. Sendo A inversível, $Ax = b$ se e somente se $x = A^{-1}b$. Logo,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

F (4) Se uma matriz tem inversa, então ela é singular.

Solução. Se tem inversa então seu determinante é diferente de zero; ou seja, não-singular.

ANPEC (2019 Q6-(0,2)). Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são: $\det A = -a$, $\det N_1 = b + a$, $\det N_2 = -b$ e $\det N_3 = 1$. Com base nestas informações, indique quais dos itens abaixo são verdadeiros e quais são falsos:

V (0) Se $a = 2$ e $b = 1$, então A é uma matriz não-singular.

Solução. Se $a = 2$ e $b = 1$, então $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e fazendo $l_3 := l_3 - l_1$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{33} = 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

³Tomei a liberdade de adicionar a transposta neste vetor linha pois, caso contrário a afirmação seria trivialmente falsa dado que $x_{4 \times 1} \neq x_{1 \times 4}$.

F (2) Segundo a Regra de Cramer, a solução para o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \acute{e} \quad x_1 = \frac{\det N_3}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A}{\det N_2} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{\det N_1}{\det A}.$$

Solução. Vide Teorema 3.28.

Capítulo 4

Espaços Vetoriais Reais

Considere um conjunto não vazio V munido de duas operações binárias, soma (+) e multiplicação por escalares reais (\cdot) em que para cada $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y \in V$, $\alpha x \in V$ e

1. $x + y = y + x$ (Comutativa),
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Associativa),
3. Existe $O \in V$ tal que $x + O = O + x = x, \forall x \in V$ (\exists neutro),
4. Existe inverso aditivo de x , denotado $-x$, tal que $x + (-x) = O$,
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
6. $1 \cdot x = x$,
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ e $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (propriedades distributivas).

A estrutura $V, +, \cdot$ é denominada *espaço vetorial* (real) e denotada simplesmente V quando não há dúvida sobre quais as operações consideradas. Cada elemento de V é chamado *vetor*.

Observação 4.1. Na operação de multiplicação por escalar pode-se trabalhar com outros conjunto numéricos tão bem comportados na soma e multiplicação quanto \mathbb{R} : os chamados *corpos numéricos*. Tal vez o mais usado, fora \mathbb{R} , seja o conjunto dos números complexos, \mathbb{C} . Nesse caso, fala-se em espaço vetorial complexo e denota-se $V(\mathbb{C}), +, \cdot$. Em geral, se o corpo for denotado por \mathbb{K} e $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ escreve-se $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ para expressar que V é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} .

Exemplo 4.2. \mathbb{R}^n é um espaço vetorial real; ou seja, $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}), +, \cdot$, em que

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial. De fato, as operações estão bem definidas e verificam todas as propriedades desejadas da soma, Proposição 1.3, e da multiplicação por escalar real, Proposição 1.6.

Exemplo 4.3. $M(m, n)$ é um espaço vetorial real na soma e multiplicação (por números reais) usuais segundo a Proposição 2.9.

Exemplo 4.4. Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n e $F(X, \mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais definidas em X . Fixadas duas funções $f, g \in F(X, \mathbb{R})$ defina a função soma $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ da forma usual:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in X.$$

Analogamente, fixada a constante real c e a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ defina a multiplicação de f pelo escalar c como sendo a função $cf : X \rightarrow \mathbb{R}$ com a regra

$$(cf)(x) := c \cdot f(x), \quad \forall x \in X.$$

Então, $F(X, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial nas operações aqui definidas. De fato, dadas $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $c, d \in \mathbb{R}$ tem-se, trivialmente, $f + g = g + f$, $(f + g) + h = f + (g + h)$, $c(df) = (cd)f$, $1f = f$, $(c + d)f = cf + df$, $c(f + g) = cf + cg$, o neutro é a função constante e igual a zero e o inverso aditivo de f é a função $(-1) \cdot f$ que troca o sinal de f .

Exemplo 4.5. $\mathbb{C}(\mathbb{R}), +, \cdot$ em que

$$(a + bi) + (c + di) := (a + b) + (c + d)i \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (a + bi) = \alpha a + (\alpha b)i, \quad \forall a, b, c, d, \alpha \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial (real). Mantendo a mesma soma e alterando a multiplicação para

$$(a + bi) \bar{\cdot} (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i, \quad \forall (a + bi), (c + di) \in \mathbb{C}$$

obtem-se o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}(\mathbb{C}), +, \bar{\cdot}$.

O conjunto de propriedades da soma e da multiplicação por escalar num espaço vetorial determinam algumas características comuns a qualquer espaço. Por exemplo:

1. O elemento neutro é único em cada espaço vetorial. De fato, se tivermos dois neutros O_1 e O_2 em V então, pela definição de neutro e propriedade comutativa ter-se-ia

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2 + O_1 = O_2.$$

2. Vale a regra do cancelamento para a soma; ou seja, dados u, v, w no espaço vetorial $V, +, \cdot$ tem-se

$$w + u = w + v \quad \implies \quad u = v.$$

Basta observar que, supondo $w + u = w + v$,

$$\begin{aligned} u &= u + O = u + (w - w) = (u + w) - w = \underbrace{(w + u)}_{w+v} - w = (w + v) - w \\ &= (v + w) - w = v + (w - w) = v + O = v. \end{aligned}$$

3. O neutro de V , O_V , coincide com $0 \cdot v$, qualquer que seja $v \in V$:

$$v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1v = v = v + O_V \implies 0 \cdot v = O_V.$$

4. $\alpha O_V = O_V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$. De fato, se $w = \alpha O_V$ então

$$w + \alpha O_V = \alpha O_V + \alpha O_V = \alpha(O_V + O_V) = \alpha O_V = w + O_V \implies \alpha O_V = O_V.$$

5. Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq O_V$ então $\alpha \cdot v \neq O_V$. Isto pode ser mostrado por contradição:

$$v = 1v = (\alpha \cdot \alpha^{-1})v = \alpha^{-1} \underbrace{(\alpha v)}_{O_V} = O_V.$$

6. O inverso aditivo de v coincide com $(-1) \cdot v$:

$$v + (-1) \cdot v = 1v + (-1) \cdot v = (1 - 1)v = 0v = O_V = v + (-v) \implies (-1) \cdot v = -v.$$

4.1 Subespaços vetoriais

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial. Dedicaremos esta seção a identificar partes de V que se comportam algebricamente da mesma forma que V : os subespaços vetoriais.

Definição 4.6. Um subconjunto não vazio $F \subseteq V$ é dito subespaço vetorial de $V(\mathbb{K}), +, \cdot$, quando

$$\alpha u + \beta v \in F, \quad \forall u, v \in F \quad \text{e} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Ou seja, F é subespaço vetorial de V quando as combinações lineares, $\alpha u + \beta v$, de elementos de F , obtidas com o uso das operações algébricas de V , ficam dentro do subconjunto F ; ou ainda, F é subespaço vetorial de V quando a soma em F é fechada (fica dentro de F) e a multiplicação por escalar em F também é fechada.

Proposição 4.7. *Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial e suponha que $F \subseteq V, F \neq \emptyset$. Então, F é um subespaço vetorial de V se, e somente se,*

$$u + v \in F, \quad \forall u, v \in F \quad \text{e} \quad \alpha u \in F, \quad \forall u \in F, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Demonstração. Se F é fechado pelas combinações lineares dos seus elementos então basta fazer $\alpha = 1 = \beta$ para mostrar que também é fechado para a soma e, $\beta = 0$ para mostrar que é fechado para a multiplicação por escalar. Para a volta observe que a combinação linear $\alpha u + \beta v$ é a soma de $\hat{u} = \alpha u$ e $\hat{v} = \beta v$, que são elementos de F quando $u, v \in F$ pois F é fechado para a multiplicação por escalar; logo, $\alpha u + \beta v = \hat{u} + \hat{v} \in F$ pois F também é fechado para a soma dos seus elementos.

Exemplo 4.8. Os subespaços vetoriais de \mathbb{R} são o próprio \mathbb{R} e o conjunto $\{0\}$. De fato, se F for subespaço vetorial de \mathbb{R} então $F \subseteq \mathbb{R}$ e $F \neq \emptyset$; assim, se F contém um elemento diferente de zero então também contém todos seus múltiplos reais (pois precisa ser fechado para a multiplicação por escalares reais); ou seja, contém todo \mathbb{R} e assim $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ concluindo que nesse caso $F = \mathbb{R}$. No caso excludente, F não contém nenhum elemento diferente de zero; ou seja, $F = \{0\}$. Obviamente, neste caso $\alpha 0 + \beta 0 = 0 \in F$ e, conseqüentemente, $\{0\}$ também é um subespaço vetorial.

Observação 4.9. Obviamente, V e $\{O_V\}$ são, sempre, subespaços vetoriais de V , $+$, \cdot ; ditos, triviais.

Exemplo 4.10. Os subespaços vetoriais de \mathbb{R}^2 são os triviais $\{(0,0)\}$, \mathbb{R}^2 e as retas que contêm $(0,0)$. De fato, se F é um subespaço e contém $v \neq (0,0)$ então também contém $\{t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}$ que corresponde à reta que passa por $(0,0)$ com vetor diretor v . Claro, se for o caso de F conter um outro vetor u não co-linear a v então F seria todo o plano $\{tv + su; t, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Assim, o gráfico da função $y = x$, $x \in \mathbb{R}$, é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 pois é uma reta contendo a origem; porém, a simples translação $y = x + 1$, que continua representando uma reta (paralela inclusive), deixa de ter seu gráfico atendendo às características de um subespaço vetorial pois se $G = \{(x, x + 1), x \in \mathbb{R}\}$ então $(0, 1) \in G$ enquanto $2 \cdot (0, 1) = (0, 2) \notin G$ (Figura 4.1).

Observação 4.11. É necessário que o neutro de V esteja em F para que F possa ser subespaço vetorial de V (vide a definição e faça $\alpha = 0$).

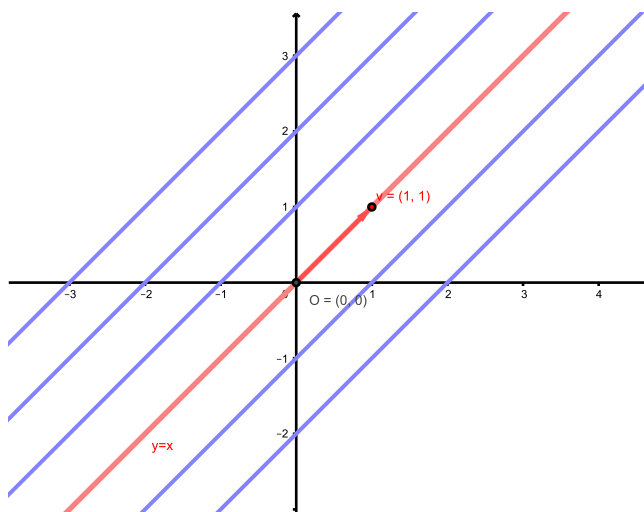


Figura 4.1: Gráfico de $y = x$ e translações.

Contudo, mesmo o gráfico G da reta $y = x + 1$ não sendo um subespaço vetorial ele é paralelo a um (no caso, ao subespaço $F = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$); diz-se, então que é uma variedade afim.

Definição 4.12. Seja $\emptyset \neq G \subseteq V$, $V, +, \cdot$ espaço vetorial. Diz-se que G é uma *variedade afim* se existe $w \in G$ tal que $F = G - w := \{u - w; u \in G\}$ é um subespaço vetorial de V . Nesse caso, F é chamado de *subespaço paralelo* de G (Figuras 4.1 e 4.2).

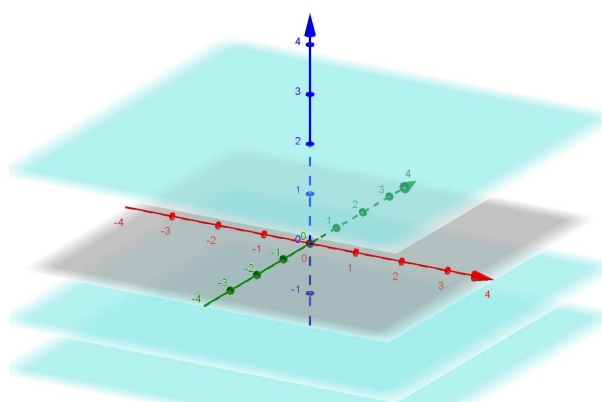


Figura 4.2: Plano $z = 0$ e translações afins

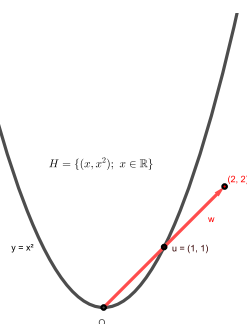
Obviamente, todo subespaço vetorial é uma variedade afim; porém, nem toda variedade afim é um subespaço vetorial. Da mesma forma, o fato do neutro pertencer ao conjunto $F \subseteq V$ não torna F , automaticamente, um subespaço. Por exemplo, o gráfico de $y = x^2$, $H = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$, Figura 4.3, contém $(0, 0)$ e não é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 (nem uma variedade afim¹).

Exemplo 4.13. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é subespaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n . De fato, a soma de simétricas é simétrica e multiplicando por uma constante uma matriz simétrica obtemos ainda uma simétrica.

Exemplo 4.14 (Classes de diferenciabilidade). Seja $\mathcal{C}^k(X)$ o conjunto das funções $f \in F(X, \mathbb{R})$ que possuem derivada de ordem k , $f^{(k)} : X \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. No caso de $k = 0$, $\mathcal{C}^0(X)$ representa o conjunto das funções contínuas em X . Então, $\mathcal{C}^0(X)$ é um subespaço vetorial de $F(X, \mathbb{R})$. De fato, $\mathcal{C}^0(X) \subseteq F(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0(X) \neq \emptyset$ (por exemplo, a função constante e igual

¹Pode ser provado que $G \subseteq V$ ($G \neq \emptyset$ e $V, +, \cdot$ espaço vetorial) é uma variedade afim sse

$$\alpha \cdot u + (1 - \alpha) \cdot v \in G, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad u, v \in G.$$

Figura 4.3: Gráfico de $y = x^2$

a zero em X faz parte desse conjunto pois é contínua) e a soma de contínuas é contínua e o produto de uma função contínua por uma constante também é uma função contínua. Analogamente, $\mathcal{C}^{k+1}(X)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{C}^k(X)$, $k = 0, 1, \dots$

Descrevemos a seguir alguns mecanismos de construção de subespaços a partir de outros subespaços: os subespaços interseção, soma e gerado via combinações lineares.

Proposição 4.15. *Seja $V(\mathbb{K})$, $+$, \cdot um espaço vetorial.*

1. *Se F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V então $F_1 \cap F_2$ é subespaço vetorial de V (Figura 4.4).*
2. *Se F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V então $F_1 + F_2 = \{v_1 + v_2; v_i \in F_i, i = 1, 2\}$ é subespaço vetorial de V (Figuras 4.5 e 4.6).*

Demonstração. Sejam F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V . Então

$$F_1 \cap F_2 \subseteq F_1 \subseteq V, \quad O_V \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset.$$

E supondo $u, v \in F_1 \cap F_2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ defina $w := \alpha u + \beta v$. Queremos provar que $w \in F_1 \cap F_2$;

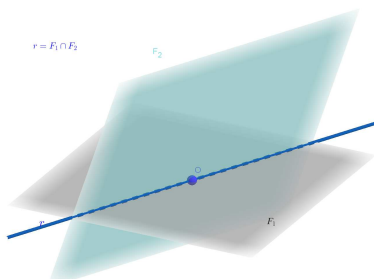


Figura 4.4: Subespaço interseção.

ou seja, que $w \in F_1$ e $w \in F_2$: u e v são elementos de F_1 , e F_1 é um subespaço vetorial de V e assim fechado pelas combinações lineares dos seus elementos, então $w \in F_1$; analogamente, como u e v também são elementos de F_2 , $w \in F_2$.

Para o item 2) suponha que $F = F_1 + F_2$. Então, $F \subseteq V$ pois cada elemento v de F é da forma $v_1 + v_2$ com $v_1 \in F_1 \subseteq V$ e $v_2 \in F_2 \subseteq V$ e em V a soma é fechada; ou seja, $v_1 + v_2 \in V$. Além disso, $F \neq \emptyset$ pois $O_V \in F_1$, $O_V \in F_2$ e $O_V = O_V + O_V \in F_1 + F_2 = F$. Basta provar que F é fechado pelas combinações lineares dos seus elementos: sejam $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$, $u_i, v_i \in F_i$, $i = 1, 2$, elementos de F e α e β escalares. Então, $u_1, v_1 \in F_1$ e, conseqüentemente, $w_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \in F_1$; analogamente, $u_2, v_2 \in F_2$ e, assim, $w_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \in F_2$. Logo,

$$w = \alpha u + \beta v = \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) = (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) = w_1 + w_2 \in F_1 + F_2 = F.$$

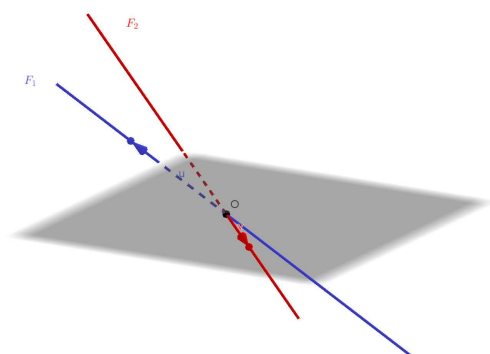


Figura 4.5: Subespaços F_1 e F_2

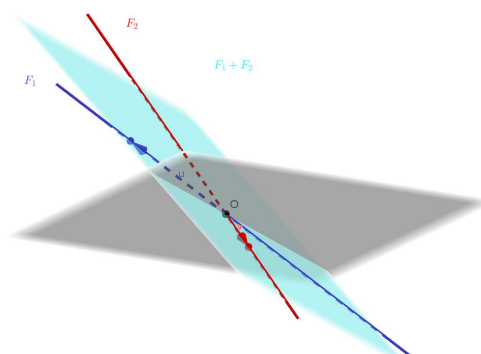


Figura 4.6: Subespaço $F_1 + F_2$

□

Exemplo 4.16. Seja $F_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e $F_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$. Então, F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^2 (as retas representativas dos eixos coordenados) e

$$F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\} \quad \text{e} \quad F_1 + F_2 = \{(x, 0) + (0, y); x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Definição 4.17 (Soma direta). Quando os subespaços vetoriais F_1 e F_2 , do espaço vetorial V , verificam

$$F_1 \cap F_2 = \{O_V\} \quad \text{e} \quad F_1 + F_2 = V$$

diz-se que V é *soma direta* desses subespaços e escreve-se

$$V = F_1 \oplus F_2.$$

Exemplo 4.18. No Exemplo acima, 4.16,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 4.19. Considere os planos $\pi_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\pi_2 = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^3 . Então, π_1 e π_2 são subespaços de \mathbb{R}^3 e $\pi_1 + \pi_2 = \mathbb{R}^3$; porém, a soma não direta visto que

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

Proposição 4.20. Seja $V(\mathbb{K})$, $+$, \cdot um espaço vetorial. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ então o conjunto $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i; \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração. Obviamente, O_V é um elemento de $E = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i; \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}$ e $E \subseteq V$. Fixe então dois elementos quaisquer de E , digamos vetores u e v em que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n;$$

e, dois escalares $a, b \in \mathbb{K}$. Então,

$$a \cdot u + b \cdot v = a \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + b \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(a\alpha_i + b\beta_i)}_{\gamma_i \in \mathbb{K}} v_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \in E.$$

□

Observação 4.21. O conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i; \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n \right\}$ é chamado de *subespaço vetorial gerado* pelos vetores $v_i, i = 1, \dots, n$, e representado por $\text{vet}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; ele é formado por todas as combinações lineares possíveis dos vetores v_1, \dots, v_n . Se $V = \mathbb{R}^2$ então $\text{vet}\{v_1\}$ é a reta que passa pela origem com vetor diretor v_1 ; e se v_1 e v_2 não estão sobre a mesma reta então $\text{vet}\{v_1, v_2\}$ é o plano gerado pelas direções v_1 e v_2 contendo a origem.

Exemplo 4.22. No Exemplo 4.16 tem-se

$$F_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} = \text{Vet}\{(1, 0)\},$$

$$F_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot (0, 1) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\} = \text{Vet}\{(0, 1)\}$$

e

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vet}\{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Exemplo 4.23. No Exemplo 4.19 tem-se

$$\pi_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 0) + (0, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0); x \in \mathbb{R}\}$$

ou seja,

$$\pi_1 = \text{Vet}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Analogamente,

$$\pi_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vet}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

enquanto que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vet}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Exemplo 4.24. Seja $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções contínuas definidas em todo \mathbb{R} , e suponha que f seja a função constante e igual a um, i.e., $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; e que g seja a função identidade de \mathbb{R} ; ou seja, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Determine $\text{Vet}\{f, g\}$.

Solução. Seguindo a definição,

$$\text{Vet}\{f, g\} = \underbrace{\{\alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot g; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}}_h$$

em que

$$h(x) = \alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$\text{Vet}\{f, g\} = \{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto de todas as funções afins (polinômios de grau menor ou igual a um). \square

4.2 Independência/dependência linear

Os vetores v_1, v_2, \dots, v_n do espaço vetorial $(V(\mathbb{K}), +, \cdot)$ são ditos *linearmente independentes* (ou LI) quando a única combinação linear $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i; \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, que coincide com o vetor nulo é a trivial, ou seja, a que possui todos os escalares $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$. Quando um sistema de vetores não for linearmente independente diz-se que são *linearmente dependentes* (ou LD).

Observação 4.25. Um único vetor $v_1 \in V$ é LI se e somente se for não nulo. De fato, se $\alpha_1 v_1 = O_V$ com $\alpha_1 \neq 0$ então $v_1 = \alpha_1^{-1} O_V = O_V$; ou seja, v_1 é LD se, e somente se, $v_1 = O_V$.

Observação 4.26. Dois vetores do plano \mathbb{R}^2 são linearmente dependentes se estão sobre a mesma reta, ou seja, um é múltiplo escalar do outro (co-lineares): digamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = O$, com $\alpha_1 \neq 0$. Então,

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 = t \cdot v_2, \quad \text{com } t = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, se $v_1 = t v_2$ então $1 \cdot v_1 + (-t) \cdot v_2 = O$ é uma combinação linear não trivial que gera o neutro.

Observação 4.27. Três vetores de \mathbb{R}^3 são linearmente dependentes se e somente se pertencem a um mesmo plano (co-planares), ou seja, um deles é combinação linear dos outros dois: digamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = O$, com $\alpha_1 \neq 0$. Então,

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} v_3 = t \cdot v_2 + s v_3, \quad \text{com } t = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}, \quad s = \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, se $v_1 = t v_2 + s v_3$ então $1 \cdot v_1 + (-t) \cdot v_2 + (-s) v_3 = O$ é uma combinação linear não trivial que gera o neutro.

Teorema 4.28. *O sistema de vetores v_1, v_2, \dots, v_n do espaço vetorial V é linearmente dependente se, e somente se, um deles for combinação dos restantes, i.e.,*

$$\exists j \in \{1, \dots, n\}; \quad v_j \in \text{Vet}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}.$$

Demonstração. Suponha que $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = O$ com algum escalar diferente de zero, digamos $\alpha_j \neq 0$. Então, dividindo por esse escalar e isolando v_j obtém-se a combinação linear

$$v_j = \frac{-\alpha_1}{\alpha_j} v_1 + \dots + \frac{-\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} + \frac{-\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_j} v_n.$$

A volta decorre de

$$v_j = \hat{\alpha}_1 v_1 + \dots + \hat{\alpha}_{j-1} v_{j-1} + \hat{\alpha}_{j+1} v_{j+1} + \dots + \hat{\alpha}_n v_n$$

implicar

$$\hat{\alpha}_1 v_1 + \dots + \hat{\alpha}_{j-1} v_{j-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_j + \hat{\alpha}_{j+1} v_{j+1} + \dots + \hat{\alpha}_n v_n = O.$$

□

Exemplo 4.29. $(1, -1)$ e $(2, -2)$ são linearmente dependentes. De fato, $(2, -2) = 2 \cdot (1, -1)$.

Exemplo 4.30. $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são linearmente independentes: $(1, 0) \neq t(0, 1), \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.31. Determine se os vetores a seguir são ou não LI: $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 0, -2)$.

Solução (Via posto). Seja A a matriz que possui ditos vetores por linhas. Então,

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0;$$

logo, o posto de A não é máximo, ou seja, uma linha de A decorre das outras via soma e/ou multiplicação por escalar (que são as operações elementares do processo de eliminação de Gauss usado para calcular o posto da matriz); isto é, uma linha de A é combinação linear das restantes. Desse modo, os vetores são LD.

Solução (Via definição). Considere a equação vetorial

$$x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(2, 0, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, x, 0) + (0, y, y) + (2z, 0, -2z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2z, x + y, y - 2z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2z, y = 2z, z \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $x = -2, y = 2, z = 1$ é uma escolha não trivial para a combinação linear que gera o neutro de \mathbb{R}^3 concluindo que os vetores são LD.

Vale observar, na solução acima, que o sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um sistema de equações lineares homogêneo em que a matriz de coeficientes é a transposta da matriz A da primeira solução, ou seja, do mesmo posto.

Exemplo 4.32. Seja $V = M(2, 2)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine se o sistema vetores, no caso matrizes, $\{A, B, C\}$ é LI ou LD.

Solução. Sejam a, b, c constantes reais (escalares) tais que

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = O_v$$

ou seja,

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \quad (\text{LI}).$$

□

Exemplo 4.33. Seja $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ com λ_1 e λ_2 constantes reais fixadas. Determine se os vetores y_1 e y_2 , no caso funções, são ou não linearmente independentes.

Solução. Precisamos estudar a equação $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, com α e β escalares reais a determinar:

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0, & x = 0 \\ \alpha e^{\lambda_1} + \beta e^{\lambda_2} = 0, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta \wedge \alpha e^{\lambda_1} = \alpha e^{\lambda_2}$$

Então,

ou $\lambda_1 = \lambda_2$, caso em que α pode ser escolhido (livremente) diferente de zero: L.D.

ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$, caso em que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$: L.I. □

Note que

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pois y_1 e y_2 são funções deriváveis. Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixado, α e β são as soluções do sistema de equações lineares homogêneo

$$\begin{cases} y_1(x)\alpha + y_2(x)\beta = 0 \\ y_1'(x)\alpha + y_2'(x)\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é determinado (única solução $\alpha = 0 = \beta$ - independência linear) sse o determinante da matriz de coeficientes for diferente de zero.

Observação 4.34. Vale observar que a matriz de coeficientes deste sistema, para cada x fixado, $\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$ é conhecida como *matriz de Wronski* associada às funções y_1 e y_2 ; e, seu determinante, como *Wronskiano* (consulte, por exemplo, [2]):

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Voltando ao exemplo anterior:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2'(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\ &\Rightarrow \\ W(y_1, y_2)(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad (y_1 \text{ e } y_2 \text{ são l.d.}) \\ W(y_1, y_2)(x) &\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (y_1 \text{ e } y_2 \text{ são l.i.}) \end{aligned}$$

4.3 Base e dimensão

Seja $V(\mathbb{K})$, $+$, \cdot um espaço vetorial e considere a família ou conjunto de vetores v_1, v_2, \dots, v_n em V . Quando $\text{vet}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ e os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes diz-se que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são uma *base* de V . Neste caso V é dito *espaço vetorial finitamente gerado*².

Observação 4.35. Uma base em V é, conseqüentemente, um sistema gerador do espaço com uma quantidade minimal de vetores (dentre eles nenhum é redundante do ponto de vista linear).

Exemplo 4.36. $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ formam uma base de \mathbb{R}^2 . De fato,

$$\text{vet}\{v_1, v_2\} = \{\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1); \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

e

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2.$$

Exercício. Mostre que $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ formam uma base do espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem dois.

Solução. Primeiro mostraremos que o espaço vetorial gerado por M_1, M_2, M_3 coincide com todo o espaço das matrizes simétricas de ordem dois: sejam a, b e c reais quaisquer. Então,

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Desse modo, quando a, b e c percorrem todos os números reais, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ percorre todas as matrizes simétricas de ordem dois. Falta então provar a independência linear de M_1, M_2, M_3 :

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0 = b = c.$$

□

Exemplo 4.37. O espaço vetorial das funções afins admite a base $\{f, g\}$ em que f é a função constante e igual a um, i.e., $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; e g é a função identidade de \mathbb{R} ; ou seja, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

²Há espaço vetoriais que não são finitamente gerados, por exemplo, o das funções reais definidas em todo \mathbb{R} (prove!).

Solução. Do Exemplo 4.24 sabe-se que f e g formam um sistema gerador desse espaço. Basta mostrar a independência linear dessas funções: suponha que $c_1f + c_2g = 0$, ou seja,

$$c_1f(x) + c_2g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 + c_2x = 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

então, o polinômio $c_1 + c_2x$ coincide com o polinômio de grau zero $p(0) = 0$; o que, por sua vez, implica $c_2 = 0$ e $c_1 = 0$.

Trataremos a seguir a questão da construção de bases num espaço vetorial finitamente gerado seja extraindo um sistema linearmente independente de um sistema gerador, seja completando um sistema LI até obter um sistema gerador.

Proposição 4.38. *Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores não-nulos que geram o espaço vetorial V , $V = \text{Vet}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V .*

Demonstração. Se o sistema v_1, v_2, \dots, v_n for LI não tem nada a fazer, pois sendo gerador já é uma base. Caso contrário, com base na dependência linear, podemos aplicar o Teorema 4.28 para garantir que algum deles é combinação linear dos restantes, i.e.,

$$\exists j \in \{1, \dots, n\}; \quad v_j \in \text{Vet}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}.$$

Logo,

$$V = \text{Vet}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\};$$

voltando, assim, à hipótese inicial do sistema gerador, agora, com um elemento a menos. Repetindo o argumento finitas vezes, se necessário, ficaremos com um sistema ainda gerador e linearmente independente: uma base. \square

Exemplo 4.39. No $\text{Vet}\{(-1, 0), (1, 2), (0, 2)\} = \mathbb{R}^2$, $(0, 2) = (-1, 0) + (1, 2)$; assim, pode-se eliminar $(0, 2)$ do sistema gerador e ainda obter $\text{Vet}\{(-1, 0), (1, 2)\} = \mathbb{R}^2$; sendo $(1, 0)$ e $(1, 2)$ LI, $\{(-1, 0), (1, 2)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

Proposição 4.40. *Seja $V = \text{Vet}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um espaço vetorial finitamente gerado por uma quantidade n de vetores. Então, qualquer conjunto de vetores em V com mais de n elementos é necessariamente LD.*

Demonstração. Pela Proposição 4.38 pode-se extrair base do sistema gerador: digamos que, reordenando se necessário, v_1, v_2, \dots, v_{n_0} , com $n_0 \leq n$, seja base de V . Considere então um sistema qualquer $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$, com $m > n$, e assumamos que para certas escolhas escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tenha-se

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m = O_V. \quad (4.1)$$

Queremos provar que algum dos α_i pode ser escolhido diferente de zero. Para tal, descreva cada w_j como combinação linear dos elementos da base:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n_01}v_{n_0} \\ w_1 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n_02}v_{n_0} \\ &\vdots \\ w_m &= a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{n_0m}v_{n_0} \end{aligned}$$

e substitua em (4.1) para obter

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n_01}v_{n_0}) + \alpha_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n_02}v_{n_0}) \\ + \cdots + \alpha_m(a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{n_0m}v_{n_0}) = O_V; \end{aligned}$$

e, aplicando as propriedades da soma e multiplicação por escalar do espaço, também

$$\begin{aligned} \underbrace{(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m)}_{\gamma_1} v_1 + \underbrace{(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m)}_{\gamma_2} v_2 + \cdots \\ + \underbrace{(a_{n_01}\alpha_1 + a_{n_02}\alpha_2 + \cdots + a_{n_0m}\alpha_m)}_{\gamma_m} v_m = O_V. \end{aligned}$$

Da independência linear dos vetores da base v_1, v_2, \dots, v_{n_0} decorre que $\gamma_1 = 0 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m$; o seja, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ são soluções do sistema de equações lineares homogêneo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_01} & a_{n_02} & \cdots & a_{n_0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que possui posto menor ou igual a n_0 (número de linhas de A) e, conseqüentemente, nulidade positiva:

$$\text{nulidade}(A) = m - \text{posto}(A) \geq m - n_0 > m - n > 0.$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado admitindo, assim, outras soluções que não apenas a trivial; ou seja, existem escolhas para $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, nem todas nulas, que verificam (4.1). \square

Corolário 4.41. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então todas as bases de V possuem a mesma quantidade de elementos.*

Demonstração. Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bases em V . Queremos provar que $n = m$. Sabe-se que $\text{Vet}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ e que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é um sistema LI então, pela Proposição 4.40, $m \leq n$. Analogamente, $V = \text{Vet}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ LI implicam $n \leq m$. Assim, $m = n$. \square

Definição 4.42. A *dimensão* de um espaço vetorial é o número de elementos de uma base qualquer dele.

Exemplo 4.43. A dimensão de \mathbb{R}^2 é dois (vide Exemplo 4.36) e a dimensão do espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem dois é três (Vide Exercício 4.3).

Proposição 4.44. *Qualquer conjunto LI num espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado até formar uma base.*

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ um sistema LI no espaço vetorial V de dimensão $n \geq m$. Se $Vet\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = V$ então já temos uma sistema gerador e LI: uma base. Caso contrário, existe $v \in V$ tal que $v \notin Vet\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Inclua, então, dito vetor no sistema; ou seja, defina $v_{m+1} = v$ e considere o sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\}$, que ainda é LI, pois o vetor incluído não é combinação linear dos restantes, e que gera um espaço de dimensão $m + 1$. Repita o argumento finitas vezes se necessário até completar um sistema gerador e LI. \square

Corolário 4.45. *Num espaço vetorial de dimensão n , qualquer conjunto LI com exatamente n vetores formará uma base.*

Demonstração. Se o sistema LI não fosse base poderia ser completado até formar uma base obtendo-se assim, uma base com mais do que n vetores no espaço de dimensão n : uma contradição. \square

Teorema 4.46. *Seja $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então, para cada $v \in V$ existem únicos escalares x_1, x_2, \dots, x_n tais que*

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n.$$

Demonstração. A existência de x_1, x_2, \dots, x_n tais que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$, uma vez fixado $v \in V$, é óbvia posto que $V = Vet\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Quanto à unicidade, suponha que y_1, y_2, \dots, y_n também sejam escalares que permitam escrever v na forma $v = y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$. Então,

$$\begin{aligned} O_V = v - v &= y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n - (x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n) \\ &= (y_1 - x_1)v_1 + (y_2 - x_2)v_2 + \dots + (y_n - x_n)v_n \end{aligned}$$

e, pela independência linear de v_1, v_2, \dots, v_n , pode-se afirmar que $y_1 - x_1 = 0$, $y_2 - x_2 = 0$, \dots , $y_n - x_n = 0$; ou seja, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, \dots , $y_n = x_n$. \square

Definição 4.47. Os escalares x_1, x_2, \dots, x_n , associados a v no Teorema 4.46, são chamados

coordenadas de v na base γ e representados como matriz coluna na notação: $[v]_\gamma = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Observação 4.48. O Teorema 4.46 acima diz que um espaço vetorial finitamente gerado pode ser identificado com \mathbb{R}^n , onde n é sua dimensão; basta para tal fixar uma base em V . A identificação pode ser formalizada pela função $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\psi(v) = [v]_\gamma^T$, em que γ representa a base fixada: ψ é uma bijeção linear contínua com inversa contínua (um isomorfismo). V e \mathbb{R}^n são ditos *isomorfos*. Notação $V \cong \mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.49. As coordenadas de $(2, 3)$ na base natural $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 são 2 e 3 respectivamente (Figura 4.7); ou seja,

$$[(2, 3)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$(2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1).$$

Exemplo 4.50. As coordenadas de $(2, 3)$ na base $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 são -1 e 3 respectivamente (Figura 4.8); ou seja,

$$[(2, 3)]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$(2, 3) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (1, 1) = (a + b, b) \Leftrightarrow b = 3 \quad \wedge \quad a + b = 2 \Leftrightarrow b = 3 \quad \wedge \quad a = -1.$$

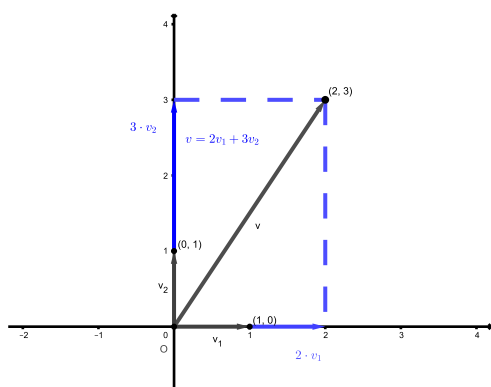


Figura 4.7: Coordenadas: $[v]_\alpha$.

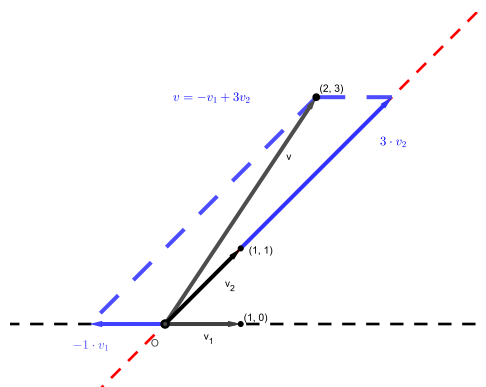


Figura 4.8: Coordenadas: $[v]_\beta$.

Exemplo 4.51. As coordenadas da função afim $f(x) = 3x + 5$ na base $\beta = \{x, 1\}$ são 3 e 5 respectivamente, i.e.,

$$[3x + 5]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Uma aplicação em Equações diferenciais lineares

Considere o problema de achar funções no espaço vetorial $V = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ que verifiquem a equação diferencial

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

em que a , b e c são constantes reais, fixadas, $a \neq 0$. Este tipo de equação é dita diferencial, pois depende de derivadas da função desconhecida $y = y(x)$ (no caso $y'(x)$ e $y''(x)$); linear pois $F(y, y', y'') = ay'' + by' + cy$ depende linearmente de cada variável (no caso y , y' e y''); de segunda ordem pois é a derivada de maior ordem que aparece ($a \neq 0$); e, homogênea pois o termo independente (lado direito da equação) é zero.

Lema 4.52. *O conjunto $F = \{f \in V; f \text{ verifica (4.2)}\}$ é uma subespaço vetorial de V .*

Demonstração. Por definição, $F \subseteq V$. Além disso, $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, neutro de V , é trivialmente solução de (4.2); ou seja, elemento de F , resultando não-vazio. Basta então provar que F é fechado pelas combinações lineares de seus elementos: sejam $f, g \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, para cada x ,

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \quad \text{e} \quad ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

multiplicando a primeira equação por α , a segunda por β e somando obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha [af''(x) + bf'(x) + cf(x)] + \beta [ag''(x) + bg'(x) + cg(x)] \\ &= a[\alpha f''(x) + \beta g''(x)] + b[\alpha f'(x) + \beta g'(x)] + c[\alpha f(x) + \beta g(x)] \\ &= a[\alpha f(x) + \beta g(x)]'' + b[\alpha f(x) + \beta g(x)]' + c[\alpha f(x) + \beta g(x)] \\ &= ah''(x) + bh'(x) + ch(x), \quad \text{em que} \quad h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F$. □

Lema 4.53. *F é um espaço vetorial de dimensão menor ou igual a dois.*

Demonstração. Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial. Para mostrar que a dimensão não ultrapassa dois calculemos o Wronskiano de um sistema com três elementos $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ de F

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = 0,$$

levando em consideração que, de (4.2),

$$y_1''(x) = -\frac{b}{a}y_1'(x) - \frac{c}{a}y_1(x), \quad y_2''(x) = -\frac{b}{a}y_2'(x) - \frac{c}{a}y_2(x) \quad \text{e} \quad y_3''(x) = -\frac{b}{a}y_3'(x) - \frac{c}{a}y_3(x);$$

ou seja, que a linha 3 da matriz de Wronski é combinação linear das duas primeiras:

$$l_3 = -\frac{b}{a}l_2 - \frac{c}{a}l_1. \quad \text{Logo, 3 (ou mais) elementos de } F \text{ sempre serão LD.} \quad \square$$

Lema 4.54. $y(x) = e^{\beta x} \in F$ se, e somente se, β for raiz do polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Demonstração. Substituindo $y(x) = e^{\beta x}$ em (4.2),

$$\begin{aligned} 0 &= a\beta^2 e^{\beta x} + b\beta e^{\beta x} + ce^{\beta x} = e^{\beta x} \underbrace{(a\beta^2 + b\beta + c)}_{p_2(\beta)} \\ \Leftrightarrow p_2(\beta) &= a\beta^2 + b\beta + c = 0. \end{aligned}$$

□

O polinômio $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ é conhecido como polinômio característico da EDO (4.2). Seja $\Delta = b^2 - 4ac$, o discriminante do polinômio característico. Dependendo do sinal de Δ teremos duas raízes distintas (reais ou complexas) ou uma única raiz de multiplicidade dois.

Corolário 4.55. Se $\Delta > 0$ então $\text{Dim}(F) = 2$ e $f \in F$ se, e somente se,

$$f(x) = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x}$$

com c_1 e c_2 constante reais, $\beta_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\beta_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Demonstração. Quando $\Delta > 0$, $\beta_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a \neq (-b + \sqrt{\Delta})/2a = \beta_2 \in \mathbb{R}$ são as raízes do polinômio característico e $e^{\beta_1 x}$, $e^{\beta_2 x}$ são LI (vide Exemplo 4.33) e soluções da EDO de segunda ordem (4.2) (vide Lema 4.54); assim, $\text{Dim}(F) \geq 2$, concluindo, pelo Lema 4.53, que $\text{Dim}(F) = 2$ e que dito par de funções exponenciais é uma base. Desse modo, a solução geral pode ser descrita na forma:

$$y(x) = c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Exercício. Estude o caso $\Delta < 0$.

Exercício. Mostre que no caso $\Delta = 0$, $\{e^{\beta x}, xe^{\beta x}\}$, com $\beta = -b/2a$, é base de F .

4.4 Mudança de base

Suponha que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ sejam bases do espaço vetorial V então, cada elemento v_j da base β possui únicas coordenadas na base γ , digamos $[v_j]_\gamma$ (assim

como cada w_j possui únicas coordenadas na base β). Assim, podemos definir as matrizes quadradas de ordem n :

$$I_\gamma^\beta = [[v_1]_\gamma \ [v_2]_\gamma \ \cdots \ [v_n]_\gamma] \quad \text{e} \quad I_\beta^\gamma = [[w_1]_\beta \ [w_2]_\beta \ \cdots \ [w_n]_\beta].$$

Ditas matrizes são chamadas de *mudança de base* de β para γ e de γ para β , respectivamente; o que se justifica pela seguinte propriedade.

Teorema 4.56. *Nas condições acima,*

$$[v]_\gamma = I_\gamma^\beta [v]_\beta, \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad [v]_\beta = I_\beta^\gamma [v]_\gamma, \quad \forall v \in V.$$

Demonstração. Suponha que $[v_j]_\gamma = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$, $j = 1, 2, \dots, n$; $[v]_\beta = x$; e, $[v]_\gamma = y$. Então,

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)}_{y_i} w_i;$$

ou seja,

$$y = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [[v_1]_\gamma \ [v_2]_\gamma \ \cdots \ [v_n]_\gamma] x = I_\gamma^\beta x.$$

□

Observe, que as matrizes de mudança de base são inversíveis (posto máximo) e que uma, digamos I_γ^β , é necessariamente inversa da outra, I_β^γ .

Exemplo 4.57. Considere as bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\gamma = \{(1, 0), (1, 1)\}$ em \mathbb{R}^2 . Calcule I_γ^α .

Solução. Note que $(1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1)$; logo, $[(1, 0)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Analogamente,

$$(0, 1) = a(1, 0) + b(1, 1) = (a + b, b) \Leftrightarrow b = 1 \quad a = -1 \Rightarrow [(0, 1)]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$I_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em particular,

$$[(2, 3)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.58. No exemplo acima, $I_\alpha^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $[(1, 0)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[(1, 1)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Em particular,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{[v]_\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [v]_\alpha, \quad \text{em que } v = (2, 3).$$

4.5 Exercícios: Espaços vetoriais.

Q 4.1. Prove que se F é subespaço vetorial do espaço vetorial $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ então $F(\mathbb{K}), +, \cdot$ também é um espaço vetorial.

Q 4.2. Mostre que o conjunto $\mathcal{P}_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p \text{ polinômio de grau } \leq n\}$ é um espaço vetorial com a soma e produto por escalar das funções.

Q 4.3. Seja $F = \{(x, y, x - 1, 2x + y - 3); x, y \in \mathbb{R}\}$. F é subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 ? Justifique.

Q 4.4. Mediante quais circunstâncias o conjunto de todos os vetores soluções da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, onde $a_i, c \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n ?

Q 4.5. Descreva geometricamente o espaço solução da equação (ou sistema):

$$a) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad b) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Q 4.6. Mostre que os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^4 são subespaços:

$$a) \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = 0 \text{ e } z-t = 0\} \quad b) \quad U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t = 0 \text{ e } z = 0\}.$$

Q 4.7. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$

$$1. \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}, b = c \right\};$$

$$2. \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}, b = c + 1 \right\}.$$

Q 4.8. Dados dois vetores (a, b) e (c, d) , no plano, verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1. Se $ad - bc = 0$ então eles são linearmente dependentes.

2. Se $ad - bc \neq 0$ então eles são linearmente independentes.

Q 4.9. Prove que o conjunto solução de um sistema de equações lineares homogêneo de n incógnitas é um subespaço vetorial de $M(n, 1) = \{A_{n \times 1} = [a_{i1}] \mid a_{i1} \in \mathbb{R}\}$.

Q 4.10. Se um sistema de equações lineares não for homogêneo o que acontece com seu conjunto solução? (será um subespaço, ou uma translação de um subespaço?). Considere o exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = 0. \end{cases}$$

Q 4.11. Seja F o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = a \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = b \\ 6x_2 - 14x_3 = c. \end{cases}$$

1. Que condições devemos impor a a , b , c para que F seja subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ?
2. Encontre uma base para F nas condições dadas em 1).
3. Que relação existe entre a dimensão de F e o grau de liberdade do sistema ? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

Q 4.12. Considere o conjunto

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Verifique que W é subespaço vetorial de $M(2, 2)$.
2. Se $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, em que $a_{11} = 0$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 0$ e $a_{22} = 1$ então $A \in W$? Justifique.
3. Determine se as matrizes A e B , a seguir, são Linearmente independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Identifique uma base de W . Qual é a dimensão de W ?

Q 4.13. Verifique se os subconjuntos abaixo são subespaços:

1. Matrizes diagonais $n \times n$.
2. $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$
3. $\{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n ; a \in \mathbb{R}\}$
4. $\{(1, a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$
5. A reta $\{(x, x+3) \mid x \in \mathbb{R}\}$
6. $\{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Q 4.14. Seja $S = Vet\{(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)\}$.

1. $(2/3, 1, -1, 2) \in S$?

2. $(0, 0, 1, 1) \in S$?

Q 4.15. Mostre que o conjunto das funções limitadas é um subespaço vetorial das funções.

Q 4.16. Tente oferecer uma base e calcular a dimensão de cada espaço vetorial descrito nas questões anteriores.

Q 4.17. Escreva uma base e dê a dimensão para:

1. O espaço vetorial das matrizes $n \times n$: $M(n, n)$.

2. O espaço vetorial dos polinômios de grau menor o igual a n : \mathcal{P}_n .

Q 4.18. Seja $A_{m \times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas e B , sua linha reduzida à forma escada. Mostre que o espaço vetorial gerado pelos vetores linha de A coincide com o de B .

Q 4.19. Seja $F = \text{Vect}\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$

1. $(2, -3, 2, 2) \in F$? Justifique.

2. Exiba uma base de F . Qual é a dimensão?

3. $F = \mathbb{R}^4$? Por qué?

Q 4.20. Suponha que $V = F_1 \oplus F_2$ e que $\{u_1, \dots, u_m\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ são bases de F_1 e F_2 respectivamente

a) Prove que $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ é base de V . Qual é a dimensão de V ?

b) Mostre com um exemplo que a) não vale se a soma não for direta.

Q 4.21. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n elementos do espaço vetorial V . Prove que $\text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é o menor subespaço vetorial de V que contém todos os vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Dica: mostre que $\text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ coincide com a interseção de todos os subespaços vetoriais de V que contenham todos os vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Q 4.22. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e F um subespaço vetorial de V . Prove que $\dim(F) \leq \dim(V)$.

Q 4.23. Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os polinômios reais definidos em \mathbb{R} .

a) Mostre que \mathcal{P} é um espaço vetorial.

b) Mostre que \mathcal{P}_n é subespaço vetorial de \mathcal{P} . Conclua que $\dim(\mathcal{P}_n) \leq \dim(\mathcal{P})$.

c) Mostre que $\dim(\mathcal{P}) = +\infty$.

d) Conclua que $\dim(C^k) = +\infty, \forall k \geq 0$, onde $C^k = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f^{(k)} \text{ contínua}\}$, $C^0 = C(\mathbb{R})$.

4.5.1 Coordenadas de um vetor e mudança de base

Q 4.24. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

Q 4.25. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $1 - t^2$, $1 - t$ e 1 são uma base do espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3. Quais são as coordenadas de $p(t)$ nessa base se:

1. $p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$,

2. $p(t) = t^3$,

3. $p(t) = t$,

4. $p(t) = t^2$,

5. $p(t) = 2t^3 + 3t$.

Q 4.26. Considere as seguintes bases ordenadas de \mathbb{R}^2 :

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad \beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}, \quad \beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\} \quad \text{e} \quad \beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}.$$

a) Se $[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ representa a matriz de mudança de base de α' para α , determine $[I]_{\beta}^{\beta_1}$, $[I]_{\beta_1}^{\beta}$, $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ e $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação a cada uma dessas bases?

c) Se um dado vetor v tem coordenadas na base β_1 dadas por $[v]_{\beta_1} = (4, 0)^T$, calcule $[v]_{\beta}$, $[v]_{\beta_2}$ e $[v]_{\beta_3}$.

Q 4.27. Se $[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ache

a) $[v]_{\alpha}$ onde $[v]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $[v]_{\alpha'}$ onde $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Q 4.28. Se β' é obtida de $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pela rotação de um ângulo de $-\frac{\pi}{3}$, ache $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

Q 4.29. Sejam

$$\beta_1 = \{(1, 0), (0, 2)\}, \quad \beta_2 = \{(-1, 0), (1, 1)\} \quad \text{e} \quad \beta_3 = \{(-1, -1), (0, -1)\}$$

bases de \mathbb{R}^2 . Calcule $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$, $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$, $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$ e $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2}^{\beta_3}$.

Existe relação entre esta última matriz e $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$?

4.5.2 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 5-(0-2)/2003; 3-(2-3)/2004; 4-(0-3)/2004; 2-(3)/2005; 1-(4)/2006; 3-(1)/2009; 10-(0-3)/2010; 6-(1)/2011; 4/2013; 15-(3)/2015; Q12-(4)/2018.

4.6 Gabarito: Espaços vetoriais.

Q 4.1. Seja F um subespaço vetorial do espaço vetorial $V(\mathbb{K})$, $+$, \cdot então $u+v \in F$, $\forall u, v \in F$ e $\alpha \cdot v \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in F$; ou seja, a soma de V quando restrita a F continua bem definida, assim como a multiplicação por escalar:

$$+|_{F \times F} : F \times F \rightarrow F \quad \text{e} \quad \cdot|_{\mathbb{K} \times F} : \mathbb{K} \times F \rightarrow F .$$

Quanto às propriedades destas operações, sendo válidas para todos os elementos de V , continuam válidas na parte F de V . Logo, $F(\mathbb{K})$, $+$, \cdot também é um espaço vetorial.

Q 4.2. Obviamente todo polinômio é uma função real de variável real e a função constante e igual a zero, neutro das funções, é um polinômio de grau zero, que é menor ou igual a n ($n \in \mathbb{Z}_+$); ou seja, $\emptyset \neq \mathcal{P}_n \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, se p e q são polinômios de grau menor ou igual a n então a soma $p+q$ continua sendo um polinômio de grau menor ou igual a n assim como o polinômio cp , qualquer que seja a constante $c \in \mathbb{R}$. Ou seja, \mathcal{P}_n é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; logo, um espaço vetorial.

Q 4.3. Não. Note que $O_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \notin F = \{(x, y, x-1, 2x+y-3); x, y \in \mathbb{R}\}$.

Q 4.4. Apenas quando $c = 0$.

Q 4.5. *a)*: um plano (Figura 4.9); *b)*: uma reta (Figura 4.10).

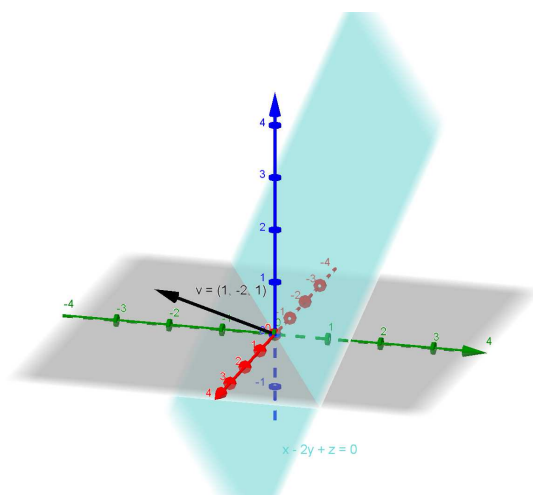


Figura 4.9: Plano $x - 2y + z = 0$.

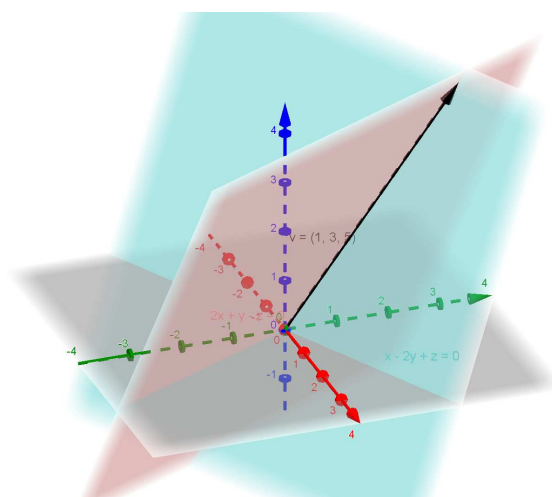


Figura 4.10: Reta interseção $\{t(1, 3, 5), t \in \mathbb{R}\}$.

Q 4.6. Para o item a) considere $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ tais que $x_i + y_i = 0$ e $z_i - t_i = 0, i = 1, 2$; e, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta(x_2, y_2, z_2, t_2) &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha t_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2, \beta t_2) \\ &= \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}_x, \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_y, \underbrace{(\alpha z_1 + \beta z_2)}_z, \underbrace{(\alpha t_1 + \beta t_2)}_t \in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}_x + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_y &= \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \quad e \\ \underbrace{(\alpha z_1 + \beta z_2)}_z - \underbrace{(\alpha t_1 + \beta t_2)}_t &= \alpha(z_1 - t_1) + \beta(z_2 - t_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $\alpha(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta(x_2, y_2, z_2, t_2) \in W$. O item (b) pode ser resolvido de forma análoga ou também observando que

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\} = \{(x, y, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = t\} \\ &= \{(x, y, 0, 2x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 0, 2x) + (0, y, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0, 2) + y(0, 1, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Q 4.7. 1): sim; 2): não.

Q 4.8. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x(a, b) + y(c, d) = (0, 0)$. Ou seja

$$\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Logo, a existência de $x, y \in \mathbb{R}$ não nulos para que a combinação linear de (a, b) e (c, d) seja a nula equivale a existência de solução não trivial do sistema de equações lineares homogêneo com matriz de coeficientes com vetores coluna (a, b) e (c, d) ; o que, por sua vez, equivale a determinante de dita matriz ser igual a zero.

Q 4.9. Seja $B_{m \times n}$ e $S_0 = \{x_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\}$. Então, $S_0 \subseteq M(n, 1)$ e $S_0 \neq \emptyset$ pois $0_{n \times 1} \in S_0$. Além disso, se $x, y \in S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos $B[\alpha x + \beta y] = B[\alpha x] + B[\beta y] = \alpha Bx + \beta By = \alpha 0 + \beta 0 = 0$. O que implica que $\alpha x + \beta y \in S_0$. Ou seja, o subconjunto não vazio S_0 é fechado por combinações lineares: um subespaço. A dimensão de S_0 coincide com a nulidade de B .

Q 4.10. Sejam $B_{m \times n} \in M(m, n)$, $b_{m \times 1} \in M(m, 1)$, $S_b = \{x_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n \mid Bx = b\}$ e $b \neq 0$. Então $0 = B0 \neq b$ implica que S_b não é subespaço vetorial de $M(n, 1)$. S_b poderia ser inclusive vazio pois o sistema pode ser incompatível. Suponhamos que é o caso em que há alguma solução \bar{x} do sistema não homogêneo. Assim, se tivermos qualquer (outro) elemento $x \in S_b$ obtemos $0 = b - b = Bx - B\bar{x} = B[x - \bar{x}]$ garantindo $x - \bar{x} \in S_0$ (vide exercício anterior 4.9). Ou seja, $x \in S_b$ se e somente se $x \in S_0 + \bar{x}$. Resumindo, quando $S_b \neq \emptyset$

temos $S_b = S_0 + \bar{x}$ (translação do subespaço S_0 ; i.e., uma variedade afim) para qualquer \bar{x} fixado em S_b . No exemplo específico observe que para $y = 0$ a escolha $x = z = 1/3$ gera uma solução de modo que $\bar{x} = (1/3, 0, 1/3)^T \in S_b$ com $b = (1, 1, 0)^T$. Observe ainda que obviamente $(0, 0, 0)^T$, que é o neutro de \mathbb{R}^3 , não é solução deste sistema corroborando o fato de não ser subespaço vetorial. Da discussão acima

$$S_b = (1/3, 0, 1/3)^T + S_0.$$

Q 4.11. 1. $a = b = c = 0$ (vide exercícios 4.9 e 4.10).

2. $F = S_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 0$ onde B é a matriz de coeficientes do sistema. Aplicando eliminação sobre a matriz ampliada do sistema homogêneo obtemos

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & 0 \end{array} \right] &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & 0 \end{array} \right] \\ &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Então, o posto de B é 3 e sua nulidade é 0. Assim $\dim(F) = 0$ e $F = \{(0, 0, 0)^T\}$.

3. $\dim F = \text{nulidade } B$.

Q 4.12. Observe que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2a & a \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & -b \end{bmatrix} \\ &= a \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_B \\ \Rightarrow W = \text{Vet}\{A, B\} &\Rightarrow W <_s M(2, 2). \end{aligned}$$

Em particular, se $aA + bB = [0]_{2 \times 2}$ então $2a = 0$, $a + 2b = 0$ e $a - b = 0$. Então $a = 0 = b$. Assim, A e B são linearmente independentes. Logo, $\dim(W) = 2$. Para resolver o item (2) observe apenas que $\tilde{A} = (-1)B$.

Q 4.13. São subespaços os conjuntos dos itens 1), 2), 3) e 6).

Q 4.14. 1) sim; 2) não.

Q 4.15. Observe que combinações lineares de funções limitadas ainda são funções limitadas.

Q 4.16. Tentel!

Q 4.17. 1): $\dim(M(n, n)) = n^2$ e a base natural formada das n^2 matrizes obtidas percorrendo o um ao longo de todas as entradas (enquanto as entradas restantes são iguais a zero).
2): base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, dimensão $n + 1$.

Q 4.18. As linhas de B são obtidas via operações elementares por linhas, que fora permutações de ordem, são operações de soma e/ou multiplicação por escalar; ou seja, as linhas de B são combinações lineares das linhas de A ; assim com as linhas de A são combinações lineares das linhas de B .

Q 4.19. $(2, -3, 2, 2) \in F = \text{Vet}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} = \{(x, y, z, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ possui dimensão 3, que é diferente da dimensão de \mathbb{R}^4 .

Q 4.20. Sabe-se que

$$V = F_1 + F_2 = \text{vet}\{u_1, \dots, u_m\} + \text{vet}\{v_1, \dots, v_n\} = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^n \beta_j v_j; \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{vet}\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}}$$

e que se

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^n \beta_j v_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i}_{u \in F_1} = - \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j v_j}_{v \in F_2} \Rightarrow u = v \in F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

Ou seja, $u = v = 0$; logo, $\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$ e assim, pela independência linear de u_1, \dots, u_m , $\alpha_1 = 0 = \dots = \alpha_m$; analogamente, $\sum_{j=1}^n \beta_j v_j = 0$ e, conseqüentemente, $\beta_1 = 0 = \dots = \beta_n$. Desse modo, pode-se concluir que $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$, além de gerador, é um sistema LI; ou seja, uma base de V .

Se a hipótese $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ não for observada perde-se a independência linear do sistema; por exemplo, \mathbb{R}^3 é soma dos planos $x = 0$ e $z = 0$:

$$\mathbb{R}^3 = \text{vet}\{(0, 1, 0), (0, 0, 2)\} + \text{vet}\{(3, 0, 0), (0, 4, 0)\} \quad \text{e} \quad \{(0, 1, 0), (0, 0, 2), (3, 0, 0), (0, 4, 0)\}$$

são LD.

Q 4.21. Siga a dica.

Q 4.22. Uma base em F é um sistema LI em V , que poderá ser completado até formar uma base de V .

Q 4.23. Note que \mathcal{P} é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (consulte a questão 4.2). Obviamente, combinações lineares de polinômios de grau menor ou igual a n continuam sendo polinômios de grau menor ou igual a n e assim \mathcal{P}_n é subespaço vetorial de \mathcal{P} . Aplique então a questão anterior, 4.22, e a questão 4.17-(b) para concluir que $n + 1 \leq \dim(\mathcal{P})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para o item d) observe que \mathcal{P} é subespaço vetorial de C^k .

4.6.1 Coordenadas de um vetor e mudança de base

Q 4.24. $1/3$, $-1/3$ e $1/3$ respectivamente.

Q 4.25. Os polinômios $1 - t^3$, $1 - t^2$, $1 - t$ e 1 são obviamente LI pois possuem graus diferentes e, sendo 4 elementos LI de um espaço vetorial de dimensão 4 (questão 4.17-(b)), formam uma base. Além disso,

$$\underbrace{\alpha_1(1 - t^3) + \alpha_2(1 - t^2) + \alpha_3(1 - t) + \alpha_4 \cdot 1}_{-\alpha_1 t^3 - \alpha_2 t^2 - \alpha_3 t + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} = at^3 + bt^2 + ct + d \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = -a, \alpha_2 = -b, \alpha_3 = -c, \alpha_4 = a + b + c + d.$$

Logo,

$$[t^3 + t^2 + t + 1]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [t^3]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [t]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[t^2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [2t^3 + 3t]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Q 4.26. Temos

$$[I]_\beta^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I]_\beta^{\beta_2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [I]_\beta^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

logo,

$$[I]_{\beta_1}^\beta = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [I]_{\beta_2}^\beta = \frac{1}{-2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad [I]_{\beta_3}^\beta = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[(3, -2)]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [(3, -2)]_{\beta_1} = [I]_{\beta_1}^\beta [(3, -2)]_\beta = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[(3, -2)]_{\beta_2} = [I]_{\beta_2}^\beta [(3, -2)]_\beta = \frac{1}{-2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[(3, -2)]_{\beta_3} = [I]_{\beta_3}^\beta [(3, -2)]_\beta = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por último, se um dado vetor v tem coordenadas na base β_1 dadas por $[v]_{\beta_1} = (4, 0)^T$ então

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta_1} [v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\beta_2} = [I]_{\beta_2}^{\beta_1} [v]_{\beta_1} = [I]_{\beta_2}^{\beta} \underbrace{[I]_{\beta}^{\beta_1} [v]_{\beta_1}}_{[v]_{\beta}} = \frac{1}{-2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{3} + 2 \\ \frac{-2\sqrt{3}}{3} - 2 \end{bmatrix}$$

e

$$[v]_{\beta_3} = [I]_{\beta_3}^{\beta} [v]_{\beta} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Q 4.27. $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ e $[v]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Q 4.28. Note que $\beta' = \{(1/2, -\sqrt{3}/2), (\sqrt{3}/2, 1/2)\}$; logo,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\beta'}^{\beta} = \left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Q 4.29. $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $[I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $[I]_{\beta_1}^{\beta_3} = [I]_{\beta_1}^{\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2}^{\beta_3}$.

4.6.2 Questões da ANPEC

ANPEC (2003 Q5-(0-2)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V (0) Se v_1 e v_2 são vetores linearmente independentes no \mathbb{R}^n , então $v_1 + \frac{1}{2}v_2$ e $2v_1 + 2v_2$ são linearmente independentes no \mathbb{R}^n .

Solução. Suponha que $v_1 + \frac{1}{2}v_2$ e $2v_1 + 2v_2$ são linearmente dependentes. Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \alpha(2v_1 + 2v_2) \Leftrightarrow (1-2\alpha)v_1 + \left(\frac{1}{2}-2\alpha\right)v_2 = 0 \xrightarrow{v_1, v_2 \text{ l.i.}} 1-2\alpha = 0 = \frac{1}{2}-2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

chegando a uma contradição.

V (1) Dados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se $a_1v_1 + a_2v_2 = b_1v_1 + b_2v_2$ implica $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, então v_1 e v_2 são linearmente independentes

Solução. Observe que .

$$a_1v_1 + a_2v_2 = b_1v_1 + b_2v_2 \Leftrightarrow \overbrace{(a_1 - b_1)}^{\alpha_1} v_1 + \overbrace{(a_2 - b_2)}^{\alpha_2} v_2 = 0.$$

F (2) As coordenadas do vetor $(3, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ na base ordenada $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ são $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = -1$, em que x_i é a coordenada em relação ao vetor $v_i, i = 1, 2, 3$.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} 4v_1 + (-2)v_2 + (-1)v_3 &= (4, 0, 0) \\ &+ (-2, -2, 0) \\ &+ (-1, -1, -1) \\ &= (1, -3, -1) \neq (3, -1, 1). \end{aligned}$$

ANPEC (2004 Q3-(3)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

F (3) Existem duas linhas linearmente dependentes na matriz A.

Solução. Qualquer par de vetores dentre os vetores linhas de A são linearmente independentes pois nenhum é múltiplo de outro.

ANPEC (2004 Q4-(0-3)). Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

V (0) Os vetores $(1, 2, 4, -1, 5, 1), (2, 4, -1, -1, 0, 0)$ e $(6, 1, 0, 2, 2, 2)$ são linearmente independentes.

Solução. Observe que a matriz quadrada de ordem três com linhas como sendo as últimas três coordenadas dos vetores dados é de posto máximo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\Delta_{22} + 0\Delta_{23} = 10 - 2 = 8 \neq 0.$$

F (1) Os vetores $(1, 3, 4), (3, -1, 1), (4, 6, -1)$ e $(0, 1, 2)$ são linearmente independentes.

Solução. \mathbb{R}^3 é um espaço vetorial de dimensão 3. Logo, qualquer sistema com mais de três vetores (4 ou mais) é linearmente dependente em \mathbb{R}^3 .

V (2) Os vetores $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$ e $(0, 1, 2)$ são linearmente dependentes.

Solução. Observe que

$$(0, 1, 2) = (1, 2, 3) - (1, 1, 1).$$

ANPEC (2005 Q2-(3)). F (3) Os vetores $v_1 = (1, -2, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 1, 0)$ são linearmente dependentes.

Solução. São L.I. pois o posto da matriz associada (com ditos vetores nas sua linhas) é 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\Delta_{31} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\Delta_{33} = -1(-2-1) \neq 0.$$

ANPEC (2006 Q1-(4)). Avalie as afirmativas abaixo se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

V (4) Qualquer vetor (x, y) é combinação linear dos autovetores de A .

Solução. A , sendo simétrica, é diagonalizável; ou seja, \mathbb{R}^2 admite base de autovetores de A ; desse modo, qualquer vetor (x, y) é combinação linear dos autovetores de A .

ANPEC (2009 Q3-(1)). Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

V (1) $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base da imagem de T .

Solução. Tentemos calcular a imagem de T : dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (a, b, c)$? Ou seja,

$$(z, x - y, -z) = (a, b, c) \Leftrightarrow z = a, x - y = b, -z = c?$$

E a resposta é sim, existe tal terna desde que $c = -a$, sem restrições para b , i.e.,

$$Im(T) = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Obtenhamos agora uma base desse subespaço vetorial, para isto observe que um elemento qualquer da imagem pode ser descrito na seguinte forma

$$(a, b, -a) = (a, 0, -a) + (0, b, 0) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

De modo que $Im(T) = Vet\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$. Note ainda que os vetores do sistema $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ são linearmente independentes. De fato

$$a(1, 0, -1) + b(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a, b, -a) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = 0 = b.$$

Consequentemente, $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base da imagem de T .

ANPEC (2010 Q10-(0-3)). Julgue as afirmativas:

V (0) $S = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 e a dimensão de S é 2;

Solução. Observe que para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x, y, x+y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \implies S = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Logo, S é um subespaço finitamente gerado e sua dimensão é 2 pois é gerado por dois vetores linearmente independentes.

F (1) $\{(1, 2, 3), (4, 5, 12), (0, 8, 0)\}$ é base de \mathbb{R}^3 ;

Solução. Note que esses vetores são linearmente dependentes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0\Delta_{31} + 8\Delta_{32} + 0\Delta_{33} = 8(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -8(12 - 12) = 0.$$

V (2) Se u, v e w são vetores linearmente independentes, então $v + w, u + w$ e $u + v$ são também linearmente independentes;

Solução. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(v + w) + b(u + w) + c(u + v) = 0 \implies (a + c)v + (b + c)u + (a + b)w = 0$$

então, pela independência linear de u, v e w ,

$$a + c = 0 = b + c = a + b \implies a = b = c = 0;$$

o que prova a independência linear dos vetores $v + w, u + w$ e $u + v$.

F (3) Se S é um subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por vetores linearmente dependentes, então podemos afirmar que S tem 4 elementos ou mais;

Solução. Considere por exemplo $S = \{(0, 0, 0)\}$ ou também $S\{(1, 0, 0), (2, 0, 0)\}$.

ANPEC (2011 Q6-(1)). Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Julgue a afirmativa:

V (1) Se $v \in \mathbb{R}^3$ é tal que $v^T = (-1, -1, 1)$, então $\{v\}$ é base para o Núcleo de L .

Solução. $L(v) = 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = -z \quad \wedge \quad x = -z \\ &\Leftrightarrow v \in \{(-z, -z, z)^T; z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, -1, 1)^T; z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Logo, $\{(-1, -1, 1)^T\}$ é base para o Núcleo de L.

ANPEC (2015 Q15-(3)). Analise a veracidade das seguintes afirmações:

F (3) Seja V um espaço vetorial de dimensão n , com n inteiro positivo. Então um conjunto de $n + 1$ vetores é mais do que suficiente para gerar todo o espaço.

Solução. Os vetores podem ser L.D. e gerar um subespaço com dimensão menor a n . Por exemplo, em \mathbb{R}^2 , $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$ gera apenas $\mathbb{R} \times \{0\}$.

ANPEC (2018 Q12-(4)). Verifique a veracidade das questões abaixo, considerando que o conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual:

F (4) É possível achar 4 vetores em V , diferentes do vetor nulo e que sejam ortogonais entre si.

Solução. V é um espaço vetorial de dimensão 3; logo, qualquer sistema com 4 ou mais vetores em V é necessariamente L.D. (vide Proposição 4.40). Sejam $v_i \in V$, 4 vetores não-nulos quaisquer e suponha, por contradição, que sejam ortogonais entre si. Pela dependência linear, existem escalares α_i , $i = 1, 2, 3, 4$, nem todos nulos e tais que

$$0_v = \sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i \Rightarrow 0 = \langle 0_v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2, \quad \forall j$$

pois $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $i \neq j$. Então, algum vetor é nulo: uma contradição.

Capítulo 5

Transformações Lineares

Dedicaremos este capítulo ao estudo das funções lineares (aditivas e homogêneas de grau um) entre espaços vetoriais. Pode parecer pouco relevante se comparado ao vasto universo das funções não lineares em geral mas, a teoria de aproximação local se encarrega de aproveitar a simplicidade destas funções face a complexidade das não lineares.

Definição 5.1. A função $F : V \rightarrow W$ definida entre o domínio V e o contradomínio W , em que $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ e $W(\mathbb{K}), \hat{+}, \hat{\cdot}$ são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo escalar \mathbb{K} , é chamada de *transformação linear* quando satisfaz a seguinte propriedade

$$F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \hat{\cdot} F(u) \hat{+} \beta \hat{\cdot} F(v), \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \quad (5.1)$$

Destacamos que as operações que definem a estrutura de espaço vetorial em V e W não precisam ser as mesmas; ou seja, a soma ou a multiplicação por escalar de $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ pode ser diferente da operação correspondente do espaço $W(\mathbb{K}), \hat{+}, \hat{\cdot}$; contudo, é usual na literatura tratar as operações com as mesma simbologia; assim, (5.1) torna-se, simplesmente,

$$F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot F(u) + \beta \cdot F(v), \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Exemplo 5.2. A função que calcula o traço das matrizes quadradas de números reais é uma transformação linear entre o espaço vetorial $V = M(n, n)$ (i.e., $M(n, n)(\mathbb{R}), +, \cdot$) e o espaço vetorial $W = \mathbb{R}$ (i.e., $\mathbb{R}(\mathbb{R}), +, \cdot$) e, obviamente, a soma no universo das matrizes é diferente da soma em \mathbb{R} ; assim como a multiplicação por escalar: $Tr : M(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \quad \forall A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M(n, n).$$

Logo, quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in M(n, n)$ e as constantes reais α e β tem-se

$$Tr(\alpha A + \beta B) = Tr(\alpha A) + Tr(\beta B) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B).$$

□

Destacamos, a seguir, que conceito de linearidade pode ser desmembrado em duas propriedades elementares (uma para cada operação da estrutura dos espaços vetoriais): aditividade e homogeneidade de grau um.

Proposição 5.3. $F : V \rightarrow W$ é uma transformação linear se e somente se

$$F(u + v) = F(u) + F(v), \quad \forall u, v \in V \quad (\text{aditiva}) \quad \text{e}$$

$$F(\alpha u) = \alpha F(u), \quad \forall u \in V, \alpha \in \mathbb{K} \quad (\text{homogênea grau um}).$$

Demonstração. Suponha que F é linear. Então, aplicando (5.1) com $\alpha = 1 = \beta$ obtém-se a aditividade; e com $\beta = 0$, a homogeneidade de grau um. Por outro lado, se F é aditiva e homogênea de grau um então, para qualquer combinação linear $\alpha u + \beta v$ tem-se

$$F(\underbrace{\alpha u}_{\hat{u}} + \underbrace{\beta v}_{\hat{v}}) = F(\hat{u}) + F(\hat{v}) = \underbrace{F(\alpha u)}_{\alpha F(u)} + \underbrace{F(\beta v)}_{\beta F(v)} = \alpha F(u) + \beta F(v).$$

□

Exemplo 5.4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, é uma função linear. De fato,

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(cx) = 2(cx) = c(2x) = cf(x).$$

Exemplo 5.5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, não é uma função linear (é não-linear). Note que f não é homogênea de grau um, por exemplo,

$$f(3x) = (3x)^2 = 9x^2 \neq 3x^2 = 3f(x).$$

Exemplo 5.6. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, não é uma função linear. Note que g não é aditiva:

$$g(x + y) = 2(x + y) + 1 = 2x + 1 + 2y = g(x) + g(y) - 1 \neq g(x) + g(y).$$

Observe que a função g do exemplo acima é uma translação da função linear $2x$; ou seja, g é uma função afim e, mesmo afim, não atende à definição de linearidade. Neste caso, um outro detalhe poderia ter facilitado a análise: $g(0) = 1 \neq 0$. Mostraremos a seguir, que a condição $F(O_V) = O_W$ é necessária para a linearidade (não é, obviamente, uma condição suficiente como mostra o exemplo da função x^2).

Proposição 5.7. Se $F : V \rightarrow W$ é uma transformação linear então $F(O_V) = O_W$.

Demonstração. Da homogeneidade da grau um e fixando o escalar $\alpha = 0$ temos, para um vetor qualquer fixado em V ,

$$F(O_V) = F(0 \cdot u) = 0 \cdot F(u) = O_W.$$

□

Exemplo 5.8 (A aplicação nula). $F : V \rightarrow W$ tal que $F(v) = O_W, \forall v \in V$, é obviamente linear. De fato,

$$O_W = F(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot O_W + \beta \cdot O_W = \alpha \cdot F(u) + \beta \cdot F(v).$$

A aplicação nula, normalmente denotada O , é o neutro do espaço vetorial das funções lineares entre V e W , $L(V, W)$: Note que $L(V, W) \subset F(V, W)$ e que se f e g são lineares então também são lineares as funções soma, $f + g$, e multiplicação por escalar c , cf ; ou seja, $L(V, W)$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções entre V e W , $F(V, W)$. Além disso, se $T : V \rightarrow W$ é linear então, $T + O = T$.

Exemplo 5.9 (Expansão/contração uniforme). Fixados $k \in \mathbb{R}$ e $V(\mathbb{R})$, $+$, \cdot , defina $F : V \rightarrow V$ pondo,

$$F(v) = k \cdot v, \quad \forall v \in V.$$

Então, F é obviamente linear. Observe que se $k = 1$ então $F(v) = v, \forall v \in V$; ou seja, é a função identidade de V . Se, ainda, V for normado então $\|F(v)\| = |k| \cdot \|v\|$; assim, se $|k| > 1$, F expande a norma do vetor ($\|F(v)\| > \|v\|, v \neq O_V$) e se $|k| < 1$ então F contrai a norma do vetor ($\|F(v)\| < \|v\|, v \neq O_V, k \neq 0 - k = 0$ é o caso particular do operador nulo).

Exemplo 5.10 (Operador de multiplicação por uma matriz). Seja $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz de números reais. Defina $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como sendo a função que a cada x de \mathbb{R}^n , identificado com uma matriz coluna, associa o vetor $F(x) = Ax$. Usando as propriedades do produto matricial obtém-se a linearidade de F . Este operador costuma ser denotado por T_A ou, simplesmente, A .

Exemplo 5.11 (Rotação em ângulo θ). É o operador linear $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associado à matriz $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Note que para qualquer vetor não nulo u ,

$$\begin{aligned} \frac{\langle u, Au \rangle}{\|u\| \|Au\|} &= \frac{u_1(u_1 \cos(\theta) - u_2 \sin(\theta)) + u_2(u_1 \sin(\theta) + u_2 \cos(\theta))}{\|u\|^2} \\ &= \frac{u_1^2 \cos(\theta) + u_2^2 \cos(\theta)}{\|u\|^2} = \cos(\theta). \end{aligned}$$

□

5.1 Núcleo e imagem

Dedicamos esta seção às questões relativas à injetividade e sobrejetividade de funções lineares, que permitem um tratamento relativamente simples se comparado à contraparte não-linear.

Definição 5.12. O núcleo (kernel) de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é o conjunto $N(T) = \{v \in V; T(v) = 0_W\}$ e a imagem de T é o conjunto $Im(T) = \{T(v); v \in V\}$.

Exemplo 5.13. No caso do operador de multiplicação pela matriz A (Exemplo 5.10), $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$ é o conjunto solução do sistema de equações lineares homogêneo $Ax = 0$ e $Im(A) = \{Ax; x \in \mathbb{R}^n\}$ corresponde ao espaço vetorial gerado pelos vetores-coluna de A .

Exemplo 5.14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = x - y$. Então T é obviamente linear, $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ e $Im(T) = \mathbb{R}$. Para mais detalhes consulte a Figura 5.1.

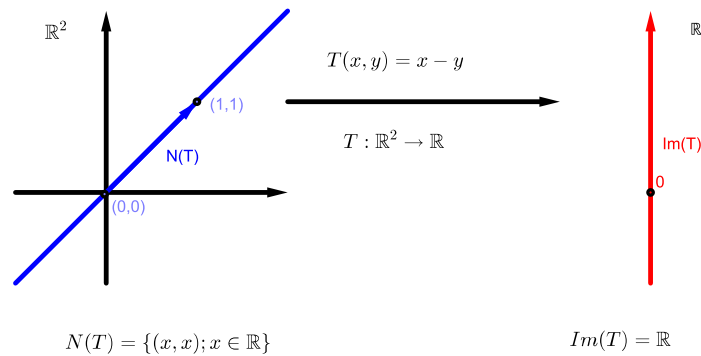


Figura 5.1: Núcleo e imagem de $T(x, y) = x - y$.

Proposição 5.15. Seja $T : V \rightarrow W$ linear. Então $N(T)$ é subespaço vetorial de V e $Im(T)$, de W .

Demonstração. $N(T) \subseteq V$ e $Im(T) \subseteq W$, por definição; além disso, $O_v \in N(T)$ e $O_w \in Im(T)$ pois $T(O_v) = O_w$ sendo linear. Suponha então que $u, v \in N(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; vamos provar que $\alpha u + \beta v \in N(T)$:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha O_w + \beta O_w = O_w \implies \alpha u + \beta v \in N(T).$$

De forma análoga, se $w_1, w_2 \in Im(T)$ então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $w_1 = T(v_1)$ e $w_2 = T(v_2)$; logo,

$$\underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_w = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{v \in V}) = T(v) \implies w \in Im(T).$$

□

Proposição 5.16. *Seja $T : V \rightarrow W$ linear. Então T é injetora se e somente se $N(T) = \{0\}$.*

Demonstração. Suponha que T é injetora e que $v \in N(T)$. Então

$$T(v) = O_w = T(O_v) \Rightarrow v = O_v;$$

ou seja, $N(T) \subseteq \{O_v\}$ e assim, $N(T) = \{O_v\}$ (pois sempre vale $\{O_v\} \subseteq N(T)$).

Para a volta, suponha que $N(T) = \{O_v\}$ e que $x, y \in V$ sejam tais que $T(x) = T(y)$. Então,

$$T(x) - T(y) = O_w \Rightarrow T(x - y) = O_w \Rightarrow x - y \in N(T) \Rightarrow x - y = O_v \Rightarrow x = y;$$

o que prova a injetividade de T . □

Teorema 5.17 (Núcleo e imagem). *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow W$, uma transformação linear. Então*

$$\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V).$$

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base do subespaço vetorial $N(T)$ e, completando dito sistema L.I. em V , $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m\}$, base de V ; isto suposto que $\dim(V) = n + m$ e $\dim(N(T)) = n$; logo, precisamos provar que $\dim(\text{Im}(T)) = m$. Defina $w_1 = T(u_1), w_2 = T(u_2), \dots, w_m = T(u_m)$ de modo que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é um sistema com m vetores dentro do subespaço vetorial $\text{Im}(T)$. Basta provar que este sistema é uma base de $\text{Im}(T)$, i.e., gerador e L.I.: se $w \in \text{Im}(T)$ então existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$ e assim, existem a_1, a_2, \dots, a_m e b_1, \dots, b_m tais que $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_1u_1 + \dots + b_mu_m$ e

$$\begin{aligned} w &= T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_1u_1 + \dots + b_mu_m) \\ &= a_1 \underbrace{T(v_1)}_{O_w} + \dots + a_n \underbrace{T(v_n)}_{O_w} + b_1 \underbrace{T(u_1)}_{w_1} + \dots + b_m \underbrace{T(u_m)}_{w_m} \\ &= b_1w_1 + \dots + b_mu_m \in \text{Vet}\{w_1, \dots, w_m\}; \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Im}(T) \subseteq \text{Vet}\{w_1, \dots, w_m\} \Rightarrow \text{Im}(T) = \text{Vet}\{w_1, \dots, w_m\} \quad (\text{gerador}).$$

Quanto à independência linear, suponha que $b_1w_1 + \dots + b_mu_m = O_w$; ou seja,

$$\underbrace{b_1T(u_1) + \dots + b_mT(u_m)}_{T(b_1u_1 + \dots + b_mu_m)} = O_w \iff \underbrace{b_1u_1 + \dots + b_mu_m}_u \in N(T).$$

Lembrando que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base do $N(T)$, pode-se concluir que existem escalares a_1, a_2, \dots, a_n tais que

$$\underbrace{b_1u_1 + \dots + b_mu_m}_u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \iff (-a_1)v_1 + \dots + (-a_n)v_n + b_1u_1 + \dots + b_mu_m = O_v.$$

Como o sistema $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ é L.I., pode-se concluir que $-a_1 = 0 = -a_2 = \dots = -a_n$ e também, $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$; o que prova a independência linear de w_1, w_2, \dots, w_m . \square

Corolário 5.18. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $T : V \rightarrow W$, uma transformação linear. Se $\dim(V) = \dim(W)$ então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.17, do núcleo e imagem, e pela hipótese $\dim(V) = \dim(W)$ temos

$$\dim(W) = \dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)).$$

Por outro lado, T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{O_v\}$; ou seja, se, e somente se, $\dim(N(T)) = 0$; que por sua vez, substituindo na equação acima, equivale a

$$\dim(W) = \dim(Im(T)) \Leftrightarrow W = Im(T) \quad (\text{sobrejetora}).$$

\square

Corolário 5.19. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $T : V \rightarrow W$, uma transformação linear injetora. Se $\dim(V) = \dim(W)$ então T transforma base de V em base de W .*

Demonstração. Do Corolário acima, T é uma bijeção linear; logo, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V então

$$\begin{aligned} W &= Im(T) = \{T(u); u \in V\} = \left\{ T \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right); a_i \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i T(u_i); a_i \in \mathbb{K} \right\} \\ &= Vet\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^n a_i T(u_i) = O_w \Leftrightarrow T \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) = O_w \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i u_i \in N(T) = \{O_v\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i u_i = O_v;$$

e, da independência linear dos vetores u_1, \dots, u_n decorre $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$ e, assim, a independência linear de $T(u_1), \dots, T(u_n)$. \square

5.2 Matriz de representação

Do Exemplo 5.10 sabe-se que toda matriz A gera uma transformação linear via a operação de multiplicação T_A . Mostraremos, nesta seção que a volta é válida em dimensão finita; ou seja, se T é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita então T pode ser representada como um operador de multiplicação por uma certa matriz.

Seja $T : V \rightarrow W$ linear, e $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base em V . Então, os vetores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ definem unicamente T . De fato, qualquer $v \in V$ possui únicas coordenadas $[v]_\delta = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ na base δ ; ou seja, existem únicos escalares x_1, x_2, \dots, x_n tais que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n.$$

Então, pela linearidade de T ,

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \dots + x_nT(v_n).$$

Se fixarmos ainda uma base $\delta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ em W , cada $T(v_i)$ terá únicas coordenadas nessa base e, conseqüentemente, após algum esforço algébrico, podemos chegar à relação

$$[T(v)]_\delta = x_1[T(v_1)]_\delta + x_2[T(v_2)]_\delta + \dots + x_n[T(v_n)]_\delta = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot [v]_\gamma, \quad \forall v \in V,$$

em que

$$A_{m \times n} = [[T(v_1)]_\delta \quad [T(v_2)]_\delta \quad \dots \quad [T(v_n)]_\delta]$$

Dita matriz A é chamada matriz de representação de T nas bases γ de V e δ de W e denotada $A = [T]_\delta^\gamma$. Com isto, qualquer transformação linear entre espaços vetoriais finitamente gerados pode ser identificada com um operador de multiplicação por uma matriz ou, simplesmente, com uma matriz. Resumindo,

Teorema 5.20. *Seja $T : V \rightarrow W$ linear; γ , uma base em V ; e δ , uma base de W . Então*

$$[T(v)]_\delta = [T]_\delta^\gamma \cdot [v]_\gamma, \quad \forall v \in V.$$

Em particular,

$$\dim(N(T)) = \text{nulidade}([T]_\delta^\gamma) \quad \text{e} \quad \dim(\text{Im}(T)) = \text{posto}([T]_\delta^\gamma).$$

Exemplo 5.21. Construa uma transformação linear que rotacione os vetores de \mathbb{R}^2 em $+\pi/2$.

Solução. Considere a base natural $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 e rotacione apenas esses dois vetores; ou seja, defina

$$R(1, 0) = (0, 1) \quad \text{e} \quad R(0, 1) = (-1, 0).$$

Então, para qualquer outro vetor (x, y) de \mathbb{R}^2 tem-se

$$R(x, y) = R(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \underbrace{R(1, 0)}_{(0,1)} + y \underbrace{R(0, 1)}_{(-1,0)} = x(0, 1) + y(-1, 0) = (-y, x).$$

No caso, a matriz que representa R da base canônica de \mathbb{R}^2 pra própria base canônica é

$$A = [R]_{\alpha}^{\alpha} = [[R(1,0)]_{\alpha} \ [R(0,1)]_{\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.22. Determine a matriz que representa $T : M(2,2) \rightarrow M(2,2)$, definida por $T(A) = A^T$, na base $\beta = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ em que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução. Note que

$$T(M_1) = M_1, \quad T(M_2) = M_3, \quad T(M_3) = M_2 \quad \text{e} \quad T(M_4) = M_4;$$

logo,

$$[T(M_1)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(M_2)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(M_3)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(M_4)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e colocando ditos vetores por colunas, respeitada a ordem, obtém-se a matriz de representação

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 5.23. Determine a matriz que representa $D : \mathcal{P}_{\leq 2} \rightarrow \mathcal{P}_{\leq 1}$, que a cada polinômio de grau menor ou igual a dois associa a sua derivada, $D(p(x)) = p'(x)$, e da base $\gamma = \{x^2, x, 1\}$ para a base $\delta = \{x, 1\}$.

Solução. $D(x^2) = 2x$, $D(x) = 1$, $D(1) = 0$. Então

$$[D(x^2)]_{\delta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x)]_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [D(1)]_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D]_{\delta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Em particular, pode-se calcular a derivada de $p(x) = ax^2 + bx + c$, multiplicando suas coordenadas $(a, b, c)^T$, na base γ , pela matriz $[D]_{\delta}^{\gamma}$:

$$[p'(x)]_{\delta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow p'(x) = 2a \cdot x + b \cdot 1 = 2ax + b.$$

5.3 Operadores lineares: autovalores e autovetores

Nesta seção trataremos transformações lineares com domínio igual a contradomínio, ou seja, $T : V \rightarrow V$ linear do espaço vetorial $V = V(\mathbb{K}), +, \cdot$ nele próprio de modo que para cada $v \in V$, $T(v)$ pertence ao mesmo universo V ; caso em que a transformação linear é usualmente chamada de *operador* linear. Assim, dizemos que o escalar $\lambda \in \mathbb{K}^1$ é autovalor de T se existe $v \in V$, $v \neq O_v$, tal que $T(v) = \lambda v$. Nesse caso, v é chamado autovetor associado a λ e define-se o auto-espaço associado a λ como sendo conjunto $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$.

Observação 5.24. Quando $v \neq O_v$ é autovetor de T tem-se que v e $T(v)$ são vetores co-lineares; ou seja, $T(v)$ é um elemento da reta $\{tv; t \in \mathbb{K}\}$.

Observação 5.25. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear com núcleo não trivial, i.e., T não é injetora, então $N(T)$ é um auto-espaço e está associado ao autovalor $\lambda = 0$.

Exemplo 5.26 (Operador Nulo). Considere $T : V \rightarrow V; T(v) = O_v, \forall v \in V$, em que V é um espaço vetorial de dimensão positiva (não trivial). Então,

$$O_v = T(v) = \lambda \cdot v, \quad v \neq O_v \quad \Leftrightarrow \lambda = 0;$$

logo, $\lambda = 0$ é seu único autovalor e o autoespaço associado é todo o espaço vetorial V :

$$V_0 = \{v \in V; T(v) = 0 \cdot v = O_v\} = V.$$

Exemplo 5.27 (Operador Identidade). Considere $T : V \rightarrow V; T(v) = v, \forall v \in V$, em que V é um espaço vetorial não trivial. Então,

$$v = T(v) = \lambda \cdot v, \quad v \neq O_v \quad \Leftrightarrow \lambda = 1;$$

logo, $\lambda = 1$ é seu único autovalor e o autoespaço associado é todo o espaço vetorial V :

$$V_1 = \{v \in V; T(v) = 1 \cdot v = v\} = V.$$

Proposição 5.28. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor da transformação linear $T : V \rightarrow V$ então V_λ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração. Da definição decorre que V_λ é um conjunto não vazio contido em V , supondo que λ seja autovalor. Por outro lado, se $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ então

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{\lambda v_1} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{\lambda v_2} = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2);$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V_\lambda, \quad \forall v_1, v_2 \in V_\lambda, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.$$

□

¹A definição de autovalor poderia ser tratada em corpos de escalares mais gerais que os reais, como os complexos, desde que V seja um espaço vetorial sobre esse mesmo corpo escalar.

Exemplo 5.29. Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então $T(x, y) = \lambda(x, y)$ se e somente se

$$(x, 0) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow x = \lambda x \quad \wedge \quad 0 = \lambda y \Leftrightarrow (x = 0 \vee \lambda = 1) \quad \wedge \quad (\lambda = 0 \vee y = 0)$$

Logo, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ são autovalores de T , $V_0 = \{0\} \times \mathbb{R}$ e $V_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Exemplo 5.30. Voltando ao operador de multiplicação por uma matriz A , Exemplo 5.10, com $m = n$, $Ax = \lambda x$ se e somente se $[A - \lambda I]x = 0$. Assim, λ é autovalor se e somente se existir solução não trivial do sistema de equações lineares homogêneo com matriz de coeficientes $A - \lambda I$; ou seja, se e somente se $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$. Nesse caso, $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; [A - \lambda I]x = 0\}$.

Definição 5.31 (Polinômio característico). Fixada a matriz quadrada A , de números reais, o polinômio característico de A é o polinômio obtido, na variável $\lambda \in \mathbb{R}$, calculando o determinante da matriz $A - \lambda I$:

$$p_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I).$$

Exemplo 5.32. Determine o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e use dele para calcular os autovalores e autoespaços de A .

Solução. $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$; logo,

$$p_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

As raízes reais deste polinômio são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ e, conseqüentemente, esses são os autovalores de A . Para calcular os autoespaços associados precisamos resolver os sistemas lineares $[A - \lambda I]x = 0$ correspondentes:

V_1 :

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & 2 \\ 0 & 3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow V_1 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}.$$

V_3 :

$$\begin{bmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 0 & 3 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = x \Rightarrow V_3 = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

□

Lembrando que em dimensão finita uma transformação linear se identifica com sua matriz de representação (fixando as bases), a metodologia do exemplo acima pode ser estendida a qualquer $T : V \rightarrow V$ linear com V finitamente gerado. Basta observar que fixada uma base γ em V o polinômio obtido $p(\lambda) = \text{Det}([T]_\gamma^\gamma - \lambda I)$ no muda se mudarmos a base γ a uma base δ ; e logo, $A = [T]_\gamma^\gamma$ para $B = [T]_\delta^\delta$ (Exercício). O polinômio $p(\lambda)$ é chamado *polinômio característico* de T (e não apenas de A ou de B , etc.). Resumindo,

Teorema 5.33. *Seja $T : V \rightarrow V$ linear e V , finitamente gerado. Então, λ é autovalor de T se e somente se λ é raiz (no mesmo corpo escalar sobre o qual está definido V) do polinômio característico de T .*

Demonstração. Fixe uma base γ qualquer em V e suponha que $A = [T]_\gamma^\gamma$ seja a matriz que representa T em dita base. Então, $[T(v)]_\gamma = A[v]_\gamma, \forall v \in V$. Assim, para um dado escalar λ ,

$$T(v) = \lambda v, \quad v \neq O_v \Leftrightarrow \underbrace{[T(v)]_\gamma}_{A[v]_\gamma} = \underbrace{[\lambda v]_\gamma}_{\lambda[v]_\gamma}, \quad \underbrace{[v]_\gamma}_{x_{n \times 1}} \neq \underbrace{[O_v]_\gamma}_{0_{n \times 1}} \Leftrightarrow Ax = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

O resto da prova decorre da análise feita no Exemplo 5.30. □

No é verdade, porém, que qualquer operador linear sempre tenha autovalores, como ilustra o Exemplo 5.21 do operador que rotaciona em ângulo de $+\pi/2$: $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $R(x, y) = (-y, x)$. De fato, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que o representa na base canônica de \mathbb{R}^2 possui o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$; polinômio este que não possui raízes no corpo dos números reais.

5.3.1 Diagonalização

Considere, hipoteticamente, que s_k seja o salário de cada funcionário de uma certa empresa (igualmente pagos) e f_k , o número de funcionários dessa empresa no ano k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Suponha ainda que o número de empregados caíria pela metade (na ausência de pagamento e num período) no fosse (uma parcela/índice/porcentagem de) seu salário, isto é,

$$f_{k+1} = \frac{1}{2}f_k + \frac{1}{100}s_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Suponha, por outro lado, que o empregador ofereceria uma reposição salarial de 25% não fosse o número de empregados (que desconta 12.5 u.m. cada), ou seja,

$$s_{k+1} = -\frac{50}{4}f_k + \frac{5}{4}s_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Surge então a questão de determinar o salário e o número de funcionários no longo prazo sabendo que a empresa inicia (em $k = 0$) com 50 funcionários sendo pagos a 1600 unidades

monetárias cada. Como proceder? Pode-se observar que a informação é gerada iterativamente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix}}_{Y_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/100 \\ -50/4 & 5/4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} f_k \\ s_k \end{bmatrix}}_{Y_k} \implies Y_1 = AY_0, \quad Y_2 = AY_1 = AAY_0 = A^2Y_0, \quad \dots$$

Ou seja,

$$Y_k = A^k Y_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

assim, determinar a tendência de longo prazo depende do estudo das potências sucessivas da matriz A ; o que pode ser difícil ou custoso numericamente. Há suas exceções, no entanto, como quando A é uma matriz diagonal, que não é o caso; o quando A é semelhante a uma matriz diagonal D , ou seja, existe P inversível tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Neste caso,

$$D^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P, \quad D^3 = D^2(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^3P \dots$$

e assim sucessivamente, de modo que o difícil cálculo de A^k pode ser substituído pelo cálculo trivial de D^k

$$D^k = P^{-1}A^kP \implies A^k = PD^kP^{-1} \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = PD^\infty P^{-1},$$

em que D^∞ é a matriz com os limites correspondentes das sequências potenciais $\{d_{ii}^k\}_{k \geq 0}$, $i = 1, \dots, n$, caso existam. A pergunta que fica é: e quando existe P inversível tal que $P^{-1}AP = D$ seja diagonal? Note que

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$$

e, representando as colunas de P pelos vetores v_1, \dots, v_n , i.e.,

$$P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]_{n \times n}, \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

tem-se $AP = PD$ se, e somente se,

$$[Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] = [d_{11}v_1 \ d_{22}v_2 \ \dots \ d_{nn}v_n] \Leftrightarrow Av_i = d_{ii}v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ou seja, A é semelhante a uma matriz diagonal caso existam n autovetores linearmente independentes para a matriz A em \mathbb{R}^n , e apenas nesse caso (aqui a independência linear

decorre da condição P inversível; ou seja $\text{Det}(P) \neq 0$ - posto máximo). Noutras palavras, A é semelhante a uma matriz diagonal se, e somente se, existe base de autovetores de A em \mathbb{R}^n . Nesse caso, a matriz P que possui ditos vetores por coluna é chamada *matriz diagonalizante*; mais ainda, essa matriz corresponde à matriz de mudança de base da base de autovetores para a base canônica. Por outro lado, a matriz diagonal semelhante é formada pelos autovalores de A . Esta ideia será estendida para operadores lineares em geral na Definição 5.34, mais adiante. Por ora vamos voltar ao nosso problema hipotético:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/100 \\ -50/4 & 5/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1/25 \\ -50 & 5 \end{bmatrix}}_B, \quad p_B(\beta) = \underbrace{\beta^2 - 7\beta + 12}_{(\beta-3)(\beta-4)}.$$

Assim, $\beta_1 = 3$ e $\beta_2 = 4$ são os autovalores B e, conseqüentemente, $\lambda_1 = 3/4$ e $\lambda_2 = 1$, os de A . Por outro lado, os autoespaços são os mesmos:

$$V_{\lambda_1}: \begin{bmatrix} -1 & 1/25 \\ -50 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 25x \Rightarrow V_{\lambda_1} = \text{Vet}\{(1, 25)\}.$$

$$V_{\lambda_2}: \begin{bmatrix} -2 & 1/25 \\ -50 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 50x \Rightarrow V_{\lambda_2} = \text{Vet}\{(1, 50)\}.$$

Logo, $v_1 = (1, 25)$ e $v_2 = (1, 50)$ formam base de autovetores em \mathbb{R}^2 e a matriz diagonalizante é $P = [v_1^T \ v_2^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}$. Além disso,

$$P^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 50 & -1 \\ -25 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^k = \begin{bmatrix} (3/4)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A^\infty = PD^\infty P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 50 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{25} \\ -1 & \frac{1}{25} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{25} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & 1/25 \\ -50 & 2 \end{bmatrix}.$$

No longo prazo,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = Y_\infty = A^\infty Y_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1/25 \\ -50 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_0 + s_0/25 \\ -50f_0 + 2s_0 \end{bmatrix},$$

e, lembrando que $f_0 = 50$ e $s_0 = 1600$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = -50 + 1600/25 = 14 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = -50^2 + 2 \cdot 1600 = 700 \text{ u.m.}$$

□

Definição 5.34. Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ é dita diagonalizável se existe um base em V cujos elementos são autovetores de T .

Observe que em dito caso, denotando os autovalores por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e a respectiva base por $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, em que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, obtemos

$$[T(v_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \quad [T(v_n)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, nesse caso T possui uma matriz de representação diagonal.

Proposição 5.35. Se $T : V \rightarrow V$ é linear, $\dim(V) = n$ e T possui n autovalores distintos então T é diagonalizável.

A demonstração dessa proposição é consequência direta do lema a seguir.

Lema 5.36. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

A proposição acima não esgota, obviamente, as possibilidades para um operador linear ser diagonalizável. Por exemplo, a identidade em dimensão $n \geq 2$ é obviamente diagonalizável e possui apenas um autovalor, $\lambda = 1$; o detalhe é que esse único autovalor fornece todos os n autovetores l.i. necessários. Logo, o essencial, para T ser diagonalizável conhecida a dimensão n do espaço V , é que a soma total das dimensões de seus autoespaços seja n .

Proposição 5.37. Se $T : V \rightarrow V$ é linear, $\dim(V) = n$ e T possui k autovalores distintos λ_i , $i = 1, \dots, k$, $k \leq n$, então T é diagonalizável se e somente se

$$\sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = n.$$

A dimensão do autoespaço V_λ é conhecida como *dimensão geométrica* (d.g.) do autovalor λ ; assim, o resultado acima poderia ser descrito como: “ T é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões geométricas dos seus autovalores coincidir com a dimensão do espaço vetorial V em que T está definido”.

5.3.2 Polinômio minimal

Fixado um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e um operador linear $T : V \rightarrow V$ define-se $p(T)$ como sendo a função

$$p(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n$$

em que T^k representa a composta $T \circ T \circ \cdots \circ T$ k -vezes; em particular, fixada uma matriz quadrada A , $p(A)$ é a matriz da mesma ordem definida por

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n.$$

Assim como $p(A)$ ainda é uma matriz, $p(T)$ é um operador linear e diz-se que p anula A (respectivamente, T) quando $p(A)$ for a matriz nula (respectivamente, $p(T)$ for o operador nulo).

Lema 5.38. *Se λ é autovalor de T e v é um autovetor associado a λ então $\mu = p(\lambda)$ é autovalor de $p(T)$ e v é autovetor $p(T)$ associado a μ .*

Demonstração. Suponha que $T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} p(T)v &= [a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n]v = a_0v + a_1T(v) + \cdots + a_nT^n(v) \\ &= a_0v + a_1\lambda v + a_2\lambda^2v + \cdots + a_n\lambda^nv = [a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n]v \\ &= p(\lambda)v = \mu v \end{aligned}$$

Teorema 5.39 (Cayley-Hamilton). *O polinômio característico do operador linear $T : V \rightarrow V$, em que V é uma espaço vetorial de dimensão finita, anula T .*

Demonstração. Caso $T = T_A$, $A = [a_{ij}]$ de ordem 2: $p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \text{Det}(A)$; logo,

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \text{Det}(A) \cdot I \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - (a_{11} + a_{22}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{22}a_{11} & a_{12}a_{11} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.40. A demonstração acima pode ser feita observando que $p_A(A) = [0]$ se, somente se, $\text{tr}(A)A - A^2 = \text{Det}(A)I$; e, de fato, para ordem dois,

$$\text{tr}(A)A - A^2 = [\text{tr}(A)I - A]A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}_{\text{Adj}(A)} A = \text{Adj}(A)A = \text{Det}(A)I.$$

Definição 5.41. O polinômio minimal da matriz $A_{n \times n}$ é um polinômio $m(x)$ que anula A , é mônico (o coeficiente do termo que define o grau do polinômio é um) e tem grau mínimo (entre todos os outros mônicos que anulam A).

A existência de tal polinômio decorre do Teorema de Cayley-Hamilton pois o polinômio característico anula A ; deste poderemos via fatoração retirar os fatores redutíveis até obtermos o de grau mínimo que anule A . Claro que qualquer múltiplo de um polinômio que anule A continua anulando A ; causa disso, coloca-se a condição de ser mônico para estabelecer a unicidade do minimal.

Exemplo 5.42. O polinômio minimal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é $m(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$; ou seja, o próprio característico. Note que nem $x-1$ nem $x-3$ anulam A .

Exemplo 5.43. O polinômio minimal de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ também é polinômio característico $m(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ posto que $x-1$ não anula A .

Exemplo 5.44. O polinômio minimal de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ é $m(x) = x - 1$. De fato, $x-1$ anula I , é mônico e não tem como reduzir o grau. Note que o polinômio característico de I é $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ e pode-se eliminar um fator $x-1$ que ainda o restante $x-1$ anula I .

Proposição 5.45. Se A e B são matrizes semelhantes então possuem o mesmo polinômio minimal.

Demonstração. Seja P inversível e tal que $P^{-1}AP = B$ de modo que $B^k = P^{-1}A^kP$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Suponha agora que A e B possuam os polinômios minimais $m_A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ e $m_B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m$ respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \underbrace{m_B(B)}_{[0]} &= b_0I + b_1B + b_2B^2 + \dots + B^p = b_0I + b_1P^{-1}AP + b_2P^{-1}A^2P + \dots + P^{-1}A^mP \\ &= P^{-1}(b_0I + b_1A + b_2A^2 + \dots + A^m)P = P^{-1}m_B(A)P \implies m_B(A) = [0] \end{aligned}$$

Assim, $m_A(x)$ é fator de $m_B(x)$, sendo m_A o de grau mínimo que anula A . De forma análoga,

$$[0] = m_A(A) = Pm_A(B)P^{-1} \implies m_A(B) = [0]$$

e, consequentemente, m_B é fator de m_A . Ou seja, $m_B = m_A$. □

Proposição 5.46. Seja $T : V \rightarrow V$ linear, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita e suponha que A e B sejam matrizes de representação de T nas bases β e γ respectivamente. Então, o polinômio minimal de A coincide com o polinômio minimal de B ; ou seja, o polinômio minimal de T é invariante por representação matricial de T .

Demonstração. Como A e B representam T , A e B são semelhantes; logo, pela proposição anterior 5.45, o polinômio minimal é o mesmo. \square

Proposição 5.47. *O polinômio minimal e o polinômio característico de uma transformação linear (ou matriz) possuem as mesmas raízes.*

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n (representação da transformação linear $T : V \rightarrow V$ numa certa base). E suponha que λ seja uma raiz do polinômio característico (no corpo que define o espaço vetorial V); ou seja, um autovalor. Então, existe um (auto)vetor não nulo v tal que $Av = \lambda v$, $A^2v = \lambda^2v$, \dots , $A^kv = \lambda^kv$. Digamos que o polinômio minimal de A seja $m_A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$. Então,

$$0_{n \times n} = m_A(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_{k-1}A^{k-1} + A^k$$

implica

$$\begin{aligned} 0_{n \times 1} &= 0_{n \times n}v = m_A(A)v = [a_0I + a_1A + \dots + a_{k-1}A^{k-1} + A^k]v \\ &= a_0v + a_1Av + \dots + a_{k-1}A^{k-1}v + A^kv = a_0v + a_1\lambda v + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1}v + \lambda^kv \\ &= [a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k]v = m_A(\lambda) \cdot v \\ \implies & m_A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $m_A(\lambda) = 0$ então, $m_A(x) = (x - \lambda)q(x)$ em que $q(x)$ é um polinômio mônico de grau menor do que m_A , e, conseqüentemente, q não anula A (ou T) pois caso contrário m_A não seria o minimal (de grau mínimo que anula A); assim, existe $v \neq O_V$ tal que $u = q(T)v \neq O_V$. Logo,

$$0_{n \times 1} = m_A(A)v = (A - \lambda I)q(A)v = (A - \lambda I)u \implies (A - \lambda I)u = 0,$$

ou seja, λ é autovalor e, conseqüentemente, raiz do polinômio característico. \square

Teorema 5.48. *A transformação linear $T : V \rightarrow V$, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K , é diagonalizável se e somente se o polinômio minimal de T for produto de fatores lineares diferentes, i.e.,*

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ escalares diferentes.

Com o resultado descrito no teorema a seguir podemos caracterizar os operadores diagonalizáveis desde que conhecidos seus autovalores.

Teorema 5.49. *Seja $T : V \rightarrow V$ linear e V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares K . Suponha ainda que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ são os autovalores distintos de T . Então, T é diagonalizável se e somente se o polinômio $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r)$ anula T , ou seja, $p(T) = 0$.*

Demonstração. Aplique o Teorema 5.48 lembrando que as raízes (diferentes) do polinômio minimal e do característico são as mesmas (Proposição 5.47). \square

Exemplo 5.50. Nos exemplos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ os polinômios minimais são $m_A(x) = (x - 3)(x - 1)$, $m_B(x) = (x - 1)^2$ e $m_C(x) = x - 1$, respectivamente; logo, A e C são diagonalizáveis e B não é diagonalizável.

5.4 Exercícios: Transformações lineares.

Q 5.1. Checar a linearidade (ou não) das transformações:

1. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^3$.
2. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (2x, 0, x + y)$.
3. $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n, D(f) = f'$ em que f' representa a função derivada de f .
4. $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_A(x) = Ax$ em que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e x é tratado como vetor coluna.
5. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, -y)$.
6. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + a, y + b)$ em que a e b são constantes reais fixadas.

Q 5.2. Calcule núcleo e imagem dos operadores lineares na questão anterior. Quais são injetores, quais são sobrejetores, quais são bijeções?

Definição 5.51. Diz-se que $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo quando T é um operador linear bijetor. Nesse caso, V e W são ditos isomorfos.

Q 5.3. Mostre que $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ é um isomorfismo de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 e calcule T^{-1} (sua inversa como função).

Q 5.4. Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Prove que V é isomorfo a \mathbb{R}^n .

Q 5.5. Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares T, S, L, M e H satisfazendo:

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobrejetora.
2. $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, N(S) = \{(0, 0, 0)\}$.
3. $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, Im(L) = \{(0, 0)\}$.
4. $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, N(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
5. $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, N(H) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\}$.

Q 5.6. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 0), \quad T(0, 1, 0) = (1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, -1).$$

Q 5.7. Seja $T : U \rightarrow V$ linear e $\{u_1, \dots, u_n\}$ um sistema linearmente independente em U . Prove que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é L.I. em V desde que T seja injetor.

Q 5.8. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente e

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Ache T .

2. Se $S(x, y) = (2x, x - y, x)$, ache $[S]_{\beta}^{\alpha}$.

3. Ache uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_{\gamma}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Q 5.9. Mostre que $E = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ linear}\}$ é um espaço vetorial (subespaço do espaço vetorial das funções de V para W : $F(V, W)$).

Q 5.10. Seja $A : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Assinale verdadeiro ou falso:

() Se $v \in E$ é tal que $Av = 0$ então $v = 0$.

() Se $Aw = Au + Av$ então $w = u + v$.

() Se $v \in E$ é combinação linear de u_1, \dots, u_m então Av é combinação linear de $A(u_1), \dots, A(u_m)$.

() Se u, v, w são colineares então Au, Av, Aw são colineares.

Q 5.11. Seja $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ definido por $T(p) = 5p - 4p' + p''$. Mostre que

1. T é linear.

2. $N(T) = \{0\}$.

3. Para cada polinômio $b(x)$ de grau menor ou igual a n , existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$5p(x) + p''(x) - 4p'(x) = b(x).$$

Q 5.12. Defina um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tenha a reta $y = 2x$ como imagem e, a reta $y = -x/2$ como núcleo.

5.4.1 Autovalores e autovetores.

Q 5.13. Seja $T : V \rightarrow V$ linear e λ autovalor de T . Prove que V_λ é subespaço vetorial de V . Mais ainda, prove que $V_\lambda = N(T - \lambda I)$, onde $I : V \rightarrow V$ é o operador identidade, i.e., $I(v) = v$ para todo $v \in V$. Conclua que são equivalentes as seguintes afirmações:

1. λ é autovalor de T
2. $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$
3. $\dim(N(T - \lambda I)) \geq 1$
4. $T - \lambda I$ não é injetor.
5. $T - \lambda I$ não é sobrejetor.
6. $\exists u \in V; \|u\| = 1$ e $T(u) = \lambda u$ (isto supondo que V é normado).

Conclua que $\lambda = 0$ é autovalor de T se, e somente se, T não é injetor.

Q 5.14. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rotação de $+90^\circ$: $T(x, y) = (-y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- a) Mostre que se $V = \mathbb{R}^2$, como espaço vetorial real (escalares $K = \mathbb{R}$) então T não possui autovalores.
- b) Mostre que sobre $K = \mathbb{C}$ (complexos) dito operador possui autovalores. Calcule ditos autovalores assim como os autoespaços associados (neste caso $V = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$).

Q 5.15. Considere o operador $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t).$$

- a) Determine a matriz que o representa na base canônica de \mathbb{R}^4 .
- b) Determine seus autovalores.

Q 5.16. Seja $T : V \rightarrow V$ linear e F um subespaço invariante por T . Mostre que

1. $T|_F : F \rightarrow F$ é linear.
2. Se λ é autovalor então V_λ é invariante.
3. Se $\dim(F) = 1$ então F está contido num autoespaço.

Q 5.17. Ache os autovalores e autovetores correspondentes de

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2y, x)$.

2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

3. $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

4. $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$, $T(A) = A^T$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Q 5.18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Ache os autovalores de A .
2. Ache os autovalores de A^{-1} .
3. Quais são os autovetores correspondentes (em cada caso)?

5.4.2 Diagonalização.

Q 5.19. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. Calcule $p_A(\lambda)$.
2. Determine os autovalores de A . Calcule a multiplicidade algébrica de cada (como raiz de $p_A(\lambda)$).
3. Determine os autoespaços associados. Calcule a dimensão de cada um (multiplicidade geométrica de cada autovalor).
4. A é diagonalizável?

Q 5.20. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

1. A é diagonalizável ?
2. Encontre seu polinômio minimal.

Q 5.21. Seja $A_{n \times n}$ uma matriz de números reais. Observe que dita matriz representa um operador linear na base canônica de \mathbb{R}^n : $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_A(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Prove que se T_A é diagonalizável (caso em que dizemos, simplesmente, que A é diagonalizável) então A é semelhante a uma matriz diagonal, i.e., existe P não singular tal que

$$P^{-1}AP = D, \quad \text{e} \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Além disso

1. λ_i é autovalor de A
2. Cada coluna de P é autovetor de A (a j -ésima coluna v_j é autovetor associado a λ_j , $j = 1, \dots, n$).
3. $P = [I]_{\alpha}^{\beta}$, com $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de autovetores e $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n .

A matriz P é chamada *matriz diagonalizante*. Note que P^{-1} é a matriz de mudança de base da canônica para a base de autovetores.

Q 5.22. Ache a matriz P que diagonaliza a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e ache a forma diagonal de A .

Q 5.23. Ache, caso exista, a matriz diagonalizante e a representação diagonal de $\begin{bmatrix} -17 & 18 & -6 \\ -18 & 19 & -6 \\ -9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$.

Q 5.24. Determine quais matrizes são diagonalizáveis e, no caso afirmativo, obtenha um base

(em \mathbb{R}^n) de autovetores: $\begin{bmatrix} -23/7 & 12/7 \\ -40/7 & 23/7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Q 5.25. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear. Suponha que α é a base canônica e que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Encontre o polinômio característico de T , os autovalores e os autovetores correspondentes.
2. Se $\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ ache $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ e $p_A(\lambda)$ (observe que pode-se dizer que $p_A(\lambda) = p_T(\lambda)$).
3. Encontre uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_{\gamma}^{\gamma}$ seja diagonal, se possível.

Definição 5.52 (Operador Nilpotente). Diz-se que um operador linear $T : V \rightarrow V$ é *nilpotente* se existir um número inteiro positivo n tal que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$.

Q 5.26. Sobre operadores nilpotentes, responda:

1. Quais são os possíveis autovalores dos operadores nilpotentes?
2. Encontre uma matriz $A_{2 \times 2}$, não nula, tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja nilpotente.
3. Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

Definição 5.53 (Operador Idempotente). Diz-se que um operador linear $T : V \rightarrow V$ é *idempotente* se $T^2 = T$.

Q 5.27. Dado T idempotente:

1. Determine os possíveis autovalores.
2. Encontre uma matriz $A_{2 \times 2} \neq 0$, $A_{2 \times 2} \neq I$, e tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja idempotente.
3. Prove que todo operador idempotente é diagonalizável:

Q 5.28. Utilize a forma diagonal para encontrar A^n nos seguintes casos:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

5.4.3 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 14/96; 14/97; 15/98; 6 e 14/99; 7/2001; 6-(0,1)/2002; 4 e 5-(3,4)/2003; 4-(3-4)/2004; 1/2005; 3-(3), 11-(4) e 12/2006; 1/2007; 2, 8 e 14 /2008; 3, 6 e 11/2009; 11-(1-3)/2010; 5-(2), 6 e 12-(0,2) de 2011; 5 e 6 de 2012; 7 e 10 de 2013; Q1-(4) e Q2 de 2014; Q15-(0,1,4) de 2015; 2 e 4/2017; 14/2019; 6-(0-2) e 7-(0-3)/2020.

5.5 Gabarito: Transformações lineares.

Q 5.1. Checar a linearidade (ou não) das transformações:

1. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^3.$

Solução. Não é linear: $F(cx) = (cx)^3 = c^3F(x) \neq cF(x).$

2. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (2x, 0, x + y).$

Solução. É linear: $F(x, y) = x(2, 0, 1) + y(0, 0, 1).$ Logo,

$$\begin{aligned} F(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= F(\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_x, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_y) \\ &= (\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_x)(2, 0, 1) + (\underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_y)(0, 0, 1) \\ &= \alpha x_1(2, 0, 1) + \beta x_2(2, 0, 1) + \alpha y_1(0, 0, 1) + \beta y_2(0, 0, 1) \\ &= \alpha[x_1(2, 0, 1) + y_1(0, 0, 1)] + \beta[x_2(2, 0, 1) + y_2(0, 0, 1)] \\ &= \alpha F(x_1, y_1) + \beta F(x_2, y_2). \end{aligned}$$

3. $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n, D(f) = f'$ em que f' representa a função derivada de $f.$

Solução. Linear:

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g).$$

4. $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_A(x) = Ax$ em que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e x é tratado como vetor coluna.

Solução. Linear:

$$T_A(x+y) = A(x+y) = Ax+Ay = T_A(x)+T_A(y) \quad \text{e} \quad T_A(cx) = A(cx) = cAx = cT_A(x).$$

5. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, -y).$

Solução. Linear: aplique o item anterior com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

6. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + a, y + b)$ em que a e b são constantes reais fixadas.

Solução. Não é linear quando $(a, b) \neq (0, 0)$ pois, nesse caso, $T(0, 0) = (a, b) \neq (0, 0).$ Por outro lado, quando $(a, b) = (0, 0)$ temos, sim, uma transformação linear representada pela matriz identidade.

Q 5.2. Calcule núcleo e imagem dos operadores lineares na questão anterior. Quais são injetores, quais são sobrejetores, quais são bijeções?

1. Não é linear

2. $F(x, y) = (2x, 0, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0 = y$; logo, $N(F) = \{(0, 0)\}$ e F é injetora.

$$Im(F) = \{F(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(2, 0, 1) + y(0, 0, 1); x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^3.$$

Assim, F não é sobrejetora.

3. $f \in N(D)$ se, e somente se, $D(f) = 0$; ou seja, se f for um polinômio de grau zero, isto é, $N(D) = \mathcal{P}_0$. Consequentemente, D não é injetora (nem sobrejetora). $Im(D) = \mathcal{P}_{n-1}$.

4. $T_A(x) = 0$ se, e somente se, $Ax = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = 0 \wedge x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 \Rightarrow N(T) = \{(0, 0)\}.$$

Logo, T é injetora. Por outro lado, $Dim(Im(T)) = posto(A) = 2$ e, assim, T não é sobre \mathbb{R}^3 .

5. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, -y)$: $N(T) = \{(0, 0)\}$, injetora e sobrejetora (bijetora).

6. Caso $a = 0 = b$: bijetora.

Q 5.3. $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$; logo, T é obviamente linear e $(x, y, z) \in N(T)$ se, e somente se, $z = 0$ e $x - 2y = 0 = x + y$; ou seja, $x = 0 = y$ e $z = 0$. Assim, T é injetora e como a dimensão do domínio e contradomínio é a mesma, também é sobrejetora. Para o cálculo da inversa note que $T^{-1}(a, b, c) = (x, y, z)$ sse $(a, b, c) = T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ sse $z = b$ e

$$a = x - 2y \quad \wedge \quad c = x + y \quad \Rightarrow \quad c - a = 3y \quad \wedge \quad x = c - y = c - \frac{c - a}{3} = \frac{a + 2c}{3}.$$

Ou seja,

$$T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a + 2c}{3}, \frac{c - a}{3}, b \right).$$

Q 5.4. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base da e.v. V e defina $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo a função que a cada v associa as suas coordenadas na base β : $F(v) := [v]_{\beta}^T$. Observe então que F é linear e injetora (e sobre).

Q 5.5. Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares T, S, L, M e H satisfazendo:

1. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobrejetora: $T(x, y, z) = (x, y)$.

2. $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(S) = \{(0, 0, 0)\}$: impossível.

$$\underbrace{\text{Dim}(\mathbb{R}^3)}_3 = \underbrace{\text{Dim}(N(S))}_0 + \underbrace{\text{Dim}(Im(S))}_{\leq 2}.$$

3. $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Im(L) = \{(0, 0)\}$: $L(x, y, z) = (0, 0)$, $\forall(x, y, z)$.

4. $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $N(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$: $M(x, y) = (x - y, x - y)$.

5. $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $N(H) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\}$: $H(x, y, z) = (x + z, 0, 0)$.

Q 5.6. Se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear e tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 0), \quad T(0, 1, 0) = (1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, -1)$$

então,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(2, 0) + y(1, 1) + z(0, -1) = (2x, 0) + (y, y) + (0, -z) = (2x + y, y - z). \end{aligned}$$

Q 5.7. Seja $T : U \rightarrow V$ linear, injetor, e $\{u_1, \dots, u_n\}$, um sistema linearmente independente em U . Queremos provar que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é L.I. em V :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = 0 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in N(T)$$

logo, $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_U$ pois $N(T) = \{0_U\}$ sendo T injetor. Lembrando que o sistema $\{u_1, \dots, u_n\}$ é L.I., obtemos $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ e, assim, a independência linear de $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$.

Q 5.8. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 respectivamente e

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Ache T (da base canônica de \mathbb{R}^2 , $\alpha_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, na base canônica de \mathbb{R}^3 , $\alpha_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$): $[T]_{\alpha_3}^{\alpha_2} = [I]_{\alpha_3}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\alpha_2}$.

Cálculo de $[I]_{\alpha}^{\alpha_2} = [[(1, 0)]_{\alpha} \ [(0, 1)]_{\alpha}]$:

$$(1, 0) = x(1, -1) + y(0, 2) = (x, -x + 2y) \Rightarrow x = 1, \quad y = 1/2 \implies [(1, 0)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(0, 1) = x(1, -1) + y(0, 2) = (x, -x + 2y) \Rightarrow x = 0, y = 1/2 \Rightarrow [(0, 1)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$[I]_{\alpha}^{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $[I]_{\alpha_3}^{\beta}$:

$$[I]_{\alpha_3}^{\beta} = [(1, 0, -1)]_{\alpha_3} [(0, 1, 2)]_{\alpha_3} [(1, 2, 0)]_{\alpha_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [T]_{\alpha_3}^{\alpha_2} &= [I]_{\alpha_3}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y \right).$$

2. Se $S(x, y) = (2x, x - y, x)$, ache $[S]_{\beta}^{\alpha}$:

$$[S]_{\beta}^{\alpha} = [[S(1, -1)]_{\beta} [S(0, 2)]_{\beta}] = [[(2, 2, 1)]_{\beta} [(0, -2, 0)]_{\beta}]$$

$$(2, 2, 1) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) + z(1, 2, 0) = (x + z, y + 2z, -x + 2y) \quad e$$

$$(0, -2, 0) = (x + z, y + 2z, -x + 2y)$$

Basta então resolver, simultaneamente, os sistemas de equações lineares aplicando eliminação na matriz 2-ampliada

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \end{array} \right] \\ &\hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \end{array} \right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \end{array} \right] \\ &\hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \end{array} \right] \Rightarrow [S]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & -4/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Ache uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= [T]_\gamma^\alpha = [T]_\gamma^\beta [T]_\beta^\alpha = \underbrace{[[(1, 0, -1)]_\gamma \quad [(0, 1, 2)]_\gamma \quad [(1, 2, 0)]_\gamma]}_{[x_{ij}]_{3 \times 3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} + x_{12} & x_{12} - x_{13} \\ x_{21} + x_{22} & x_{22} - x_{23} \\ x_{31} + x_{32} & x_{32} - x_{33} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{11} + x_{12} = 1 & x_{12} - x_{13} = 0 \\ x_{21} + x_{22} = 0 & x_{22} - x_{23} = 0 \\ x_{31} + x_{32} = 0 & x_{32} - x_{33} = 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Logo, uma escolha viável (inversível) poderia ser $[x_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Nesse caso,

$$[(1, 0, -1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [(0, 1, 2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad [(1, 2, 0)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim, se a base γ for formada pelos vetores (a calcular) u , v e w então

$$(1, 0, -1) = \underbrace{1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w}_{u+v}, \quad (0, 1, 2) = \underbrace{0 \cdot u - 1 \cdot v + 0 \cdot w}_{-v}$$

e

$$(1, 2, 0) = \underbrace{0 \cdot u - 1 \cdot v - 1 \cdot w}_{-v-w}.$$

Logo,

$$v = (0, -1, -2), \quad u = (1, 0, -1) - v = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad w = (-1, -2, 0) - v = (-1, -1, 2).$$

Q 5.9. Mostre que $E = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ linear}\}$ é um espaço vetorial (subespaço do espaço vetorial das funções de V para W : $F(V, W)$).

Solução. Cada transformação linear $T : V \rightarrow W$ é uma função (aditiva e homogênea de grau um); ou seja, $E \subset F(V, W)$. Obviamente, E não é um conjunto vazio. Por exemplo, a função constante e igual ao neutro de W pertence a E . Mais ainda, a soma de funções lineares é linear e a multiplicação por uma constante também não altera a linearidade da função; ou seja, E é um conjunto fechado por combinações lineares dos seus elementos.

Q 5.10. Seja $A : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Assinale verdadeiro ou falso:

F () Se $v \in E$ é tal que $Av = 0$ então $v = 0$.

Solução. Só se for injetora.

F () Se $Aw = Au + Av$ então $w = u + v$.

Solução. Só se for inversível.

V () Se $v \in E$ é combinação linear de u_1, \dots, u_m então Av é combinação linear de $A(u_1), \dots, A(u_m)$.

Solução. Se $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ então, pela linearidade de A ,

$$A(v) = A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 A(u_1) + \dots + \alpha_n A(u_n).$$

V () Se u, v, w são colineares então Au, Av, Aw são colineares.

Solução. Vide item anterior ou suponha que uma deles, digamos w , seja combinação linear dos restantes: $w = \alpha u + \beta v$. Então,

$$A(w) = A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v).$$

Ou seja, $A(w)$ também é combinação linear, agora de $A(u)$ e $A(v)$. Em particular, se $w = \alpha u$ então, $A(w) = \alpha A(u)$.

Q 5.11. Seja $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ definido por $T(p) = 5p - 4p' + p''$. Mostre que

1. T é linear.

Solução. Sejam p, q elementos de \mathcal{P}_n e c , constante real. Então,

$$\begin{aligned} T(p+q) &= 5(p+q) - 4(p+q)' + (p+q)'' = 5p + 5q - 4(p' + q') + (p'' + q'') \\ &= 5p - 4p' + p'' + 5q - 4q' + q'' = T(p) + T(q) \quad (\text{aditivo}) \end{aligned}$$

e

$$T(cp) = 5(cp) - 4(cp)' + (cp)'' = 5cp - 4cp' + cp'' = c(5p - 4p' + p'') = cT(p),$$

que corresponde à homogeneidade de grau um.

2. $N(T) = \{0\}$.

Solução. $p \in N(T)$ sse $T(p) = 0$, ou seja,

$$5p - 4p' + p'' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{5p}_{\text{grau } n} = \underbrace{4p' - p''}_{\text{grau } n-1}$$

o que seria contraditório, a menos que o grau seja zero; i.e., $p(x) = k$, e, consequentemente,

$$5k = 4k' - k'' = 4 \cdot 0 - 0 = 0 \implies k = 0 \implies p(x) \equiv 0.$$

3. Para cada polinômio $b(x)$ de grau menor ou igual a n , existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$5p(x) + p''(x) - 4p'(x) = b(x).$$

Solução. De fato, T é sobrejetor.

Q 5.12. Defina um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tenha a reta $y = 2x$ como imagem e, a reta $y = -x/2$ como núcleo.

Solução. Note que as retas possuem os vetores diretores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-2, 1)$, respectivamente. Mais ainda $v_1 \perp v_2$; ou seja, as retas são perpendiculares. Em particular, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é um sistema L.I. com dois elementos no espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ que possui dimensão 2 e, conseqüentemente, uma base. Assim, basta definir A nessa base do modo desejado:

$$A(v_1) = v_1 \quad \text{e} \quad A(v_2) = (0, 0) \implies [A]_{\alpha}^{\beta} = [[A(v_1)]_{\alpha}] [A(v_2)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em que $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ representa a base canônica de \mathbb{R}^2 . Por último, se preferir descrever o resultado de A para α precisaria determinar $[I]_{\beta}^{\alpha}$:

$$[(1, 0)]_{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow (1, 0) = x(1, 2) + y(-2, 1) = (x - 2y, 2x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

e, assim, $x = 1/5$ e $y = -2/5$. Analogamente,

$$[(0, 1)]_{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2/5, \quad y = 1/5.$$

Logo,

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [A]_{\alpha}^{\alpha} = [A]_{\alpha}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Que corresponde à regra

$$A(x, y) = ((x + 2y)/5, (2x + 4y)/5) = \frac{x + 2y}{5} \cdot (1, 2).$$

5.5.1 Autovalores e autovetores.

Q 5.13. Seja $T : V \rightarrow V$ linear, λ autovalor de T e $V_{\lambda} = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$. Então, $\emptyset \neq V_{\lambda} \subseteq V$ e se v_1 e v_2 são elementos de V_{λ} e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

ou seja, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V_\lambda$; assim, V_λ é um subespaço vetorial de V . Isto também decorre da seguinte observação:

$$v \in V_\lambda \Leftrightarrow T(v) = \lambda v \Leftrightarrow 0 = T(v) - \lambda I v = [T - \lambda I](v) \Leftrightarrow v \in N(T - \lambda I);$$

ou seja, V_λ coincide com o núcleo da transformação linear $T - \lambda I$ e, o núcleo de uma transformação linear sempre é um subespaço vetorial do domínio. Sobre as equivalências: λ é autovalor de T sse existe $v \neq O_v$ tal que $v \in V_\lambda = N(T - \lambda I)$, ou seja, se e somente se, $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$ sse $\text{Dim}(N(T - \lambda I)) \geq 1$, que equivale a dizer que a transformação linear $F = T - \lambda I$ não é injetora e, conseqüentemente, que não é sobrejetora pois o domínio e o contradomínio coincidem. Por último, $v \in V_\lambda$ implica $tv \in V_\lambda, \forall t \in \mathbb{R}$, pois V_λ é um subespaço vetorial; logo, se V é um espaço vetorial normado e $v \neq O_v$ é um dos seus elementos então $\|v\| \neq 0$ e $u = t^*v$, com $t^* = 1/\|v\|$, é um autovetor unitário.

Observação 5.54. Em particular, $\lambda = 0$ é autovalor de T se, e somente se, $T = T - 0I$ não é injetor.

Q 5.14. Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de rotação de $+90^\circ$: $T(x, y) = (-y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $T(x, y) = \lambda(x, y)$, com $(x, y) \neq (0, 0)$, se e somente se

$$(-y, x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow -y = \lambda x \quad \wedge \quad x = \lambda y \Rightarrow -y = \lambda^2 y \Rightarrow y(\lambda^2 + 1) = 0 \text{ com } y \neq 0.$$

Logo, ter-se-ia $\lambda^2 = -1$, o que é impossível no universo dos números reais; ou seja, se $V = \mathbb{R}^2$, como espaço vetorial real (escalares $K = \mathbb{R}$) então T não possui autovalores.

b) Suponha agora que \mathbb{R}^2 se identifica com o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , em que cada par (x, y) está associado ao número complexo $x + yi$, e que a multiplicação por escalar em \mathbb{C} é realizada pelos elementos do corpo $K = \mathbb{C}$ (complexos). Dessa forma, $T(a + yi) = -y + ix$ e $\lambda = \alpha + \beta i$ é autovalor se, e somente se, existe $x + yi \neq 0$ tal que

$$T(a + yi) = \underbrace{\lambda}_{\alpha + \beta i}(x + yi) \Leftrightarrow -y + ix = (\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x)i \Leftrightarrow$$

$$-y = \alpha x - \beta y \quad \wedge \quad x = \alpha y + \beta x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + (1 - \beta)y = 0 \\ (\beta - 1)x + \alpha y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ \beta - 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } (x, y) \neq (0, 0).$$

De modo que o determinante da matriz de coeficientes é zero:

$$0 = \alpha^2 - (1 - \beta)(\beta + 1) = \alpha^2 + (\beta - 1)^2 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \wedge \quad \beta = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0 + 1i = i.$$

Ou seja, dito operador possui um autovalor no corpo dos complexos: $\lambda = i$. O autoespaço associado é todo $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$:

$$V_i = \left\{ \overbrace{x + yi}^z \in \mathbb{C}; \underbrace{T(\overbrace{x + yi}^z)}_{-y+xi} = i \cdot \overbrace{(x + yi)}^z = ix + yi^2 = ix - y = -y + ix \right\} = \mathbb{C}.$$

Q 5.15. Do operador $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t).$$

a) Matriz que o representa na base canônica de \mathbb{R}^4 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Seus autovalores: 3 e -1.

Q 5.16. Seja $T : V \rightarrow V$ linear e F um subespaço invariante por T . Então, $T(u) \in F$, $\forall u \in F$; assim:

1. A função $G = T|_F : F \rightarrow F$ está bem definida entre o domínio F e o contradomínio F pois, para cada elemento $u \in F$, $G(u) = T(u) \in F$ e, obviamente, é linear pois T é linear
2. Se λ é autovalor e $v \in V_\lambda$ então $T(v) = \lambda v \in V_\lambda$, pois V_λ é um subespaço e, assim, fechado pela multiplicação por escalares; ou seja, V_λ é invariante por T .
3. Se $\dim(F) = 1$ então $F = \text{Vect}\{u\}$, para algum $u \in V$, $u \neq O_v$, e sendo F invariante por T tem-se

$$T(u) \in F = \text{Vect}\{u\} = \{t \cdot u; t \in K\} \Rightarrow \exists t^* \in K; \quad T(u) = t^* \cdot u.$$

Isto é, t^* é um autovalor, u um autovetor associado a t^* e $F \subseteq V_{t^*}$. □

Q 5.17. Autovalores e autovetores correspondentes de

1. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2y, x)$: $\lambda = \mp\sqrt{2}$, $V_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\{(-\sqrt{2}, 1)\}$ e $V_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\{(\sqrt{2}, 1)\}$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$ com $V_{-2} = \text{Vect}\{(1, -3, 1)\}$, $V_{-1} = \text{Vect}\{(2, -4, -1)\}$ e $V_2 = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.
3. $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ com $V_{-1} = \{bx - b; b \in \mathbb{R}\}$ e $V_1 = \{ax^2 + cx + c; a, c \in \mathbb{R}\}$.

4. $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$, $T(A) = A^T$: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ com $V_{-1} = \{A \in M(2, 2); A^T = -A\}$ e $V_1 = \{A \in M(2, 2); A^T = A\}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ com $V_{-1} = Vet\{(1, 0)\}$ e $V_1 = Vet\{(1, -1)\}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda = 1$ e $V_1 = Vet\{(1, 0, 0)\}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: $p(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, $V_{-1} = Vet\{(1, 0, -3, 0)\}$, $V_1 = Vet\{(0, 1, 0, -1)\}$ e $V_6 = Vet\{(1, 0, 4, 0)\}$.

Q 5.18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Autovalores de A : $\lambda_1 = -1$ com $V_{-1} = Vet\{(2, -1)\}$ e $\lambda_2 = 2$ com $V_2 = Vet\{(1, 1)\}$.

2. Autovalores de A^{-1} : Note que $u \neq (0, 0)^T$ verifica

$$A^{-1}u = \beta u \Leftrightarrow u = A(\beta u) = \beta A(u) \Leftrightarrow \beta \neq 0 \wedge Au = \frac{1}{\beta}u.$$

Logo, β é autovalor de A^{-1} sse $1/\beta$ for autovalor de A e compartilham os mesmos autoespaços. No caso, $\beta_1 = -1$ e $\beta_2 = 1/2$ com $V_{\beta_1}^{A^{-1}} = Vet\{(2, -1)\}$ e $V_{\beta_2}^{A^{-1}} = Vet\{(1, 1)\}$.

5.5.2 Diagonalização.

Q 5.19. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1. Polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3 - \lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(3 - \lambda)(-1 - \lambda) \\ &= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

2. Autovalores de A : $\lambda_1 = -1$ com multiplicidade um (dimensão algébrica=1) e $\lambda_2 = 3$ com multiplicidade dois (dimensão algébrica = 2).

3. Autoespaços associados:

$$V_{-1}: \begin{bmatrix} 3+1 & 0 & -4 \\ 0 & 3+1 & 5 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então $y = -(5/4)z$ e $x = z$; ou seja,

$$V_{-1} = \{(z, -(5/4)z, z); z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(4, -5, 4)\} \Rightarrow d.g(-1) = \text{Dim}(V_{-1}) = 1.$$

$$V_3: \begin{bmatrix} 3-3 & 0 & -4 \\ 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então $z = 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$; ou seja,

$$V_3 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \Rightarrow d.g(3) = \text{Dim}(V_3) = 2.$$

4. A é diagonalizável? Sim, as dimensões algébricas e geométricas de cada autovalor coincidem e a soma das dimensões geométricas coincide com a do domínio ($d.g(-1) + d.g(3) = 1 + 2 = 3 = \text{Dim}(\mathbb{R}^3)$) \square .

Q 5.20. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

1. Diagonalizável? Não.

Solução. A não é diagonalizável. Observe que os autovalores de A são os elementos da diagonal pois A é uma matriz triangular superior: $\lambda_1 = 2$ com multiplicidade algébrica 3 e $\lambda_2 = 3$ com multiplicidade algébrica 1. Porém, o polinômio $(x-2)(x-3)$ não anula A (verifique!).

2. Polinômio minimal: $m(x) = (x-2)^3(x-3)$.

Solução. Partindo do polinômio característico $p_A(x) = (x-2)^3(x-3)$ temos ainda o candidato $q(x) = (x-2)^2(x-3)$ (lembre que $(x-2)(x-3)$ já foi eliminado no item anterior). Observe que $q(A) \neq [0]_{4 \times 4}$; conseqüentemente, o polinômio minimal é $p_A(x) = (x-2)^3(x-3)$ que certamente anula A (Teorema de Cayley-Hamilton).

Q 5.21. Seja $A_{n \times n}$ diagonalizável e suponha que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de autovetores de A em \mathbb{R}^n , associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Defina então a matriz P pondo por colunas as coordenadas de cada autovetor na base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n ; ou seja,

$$P = [[v_1]_\alpha \ [v_2]_\alpha \ \cdots \ [v_n]_\alpha] = [I]_\alpha^\beta = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$$

que corresponde, simplesmente, à matriz de mudança de base, de β para α . Logo, P é inversível e sua inversa P^{-1} é a matriz de mudança da base α para a base β : $[I]_\beta^\alpha$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} AP &= [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n] \\ &= [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \\ \Rightarrow P^{-1}(AP) &= P^{-1}(PD) = P^{-1}PD = ID = D. \end{aligned}$$

□

Q 5.22. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Q 5.23. Cálculo de autovalores de $A = \begin{bmatrix} -17 & 18 & -6 \\ -18 & 19 & -6 \\ -9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$ via polinômio característico:

$$\begin{aligned} p(x) &= \text{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} -17-x & 18 & -6 \\ -18 & 19-x & -6 \\ -9 & 9 & -2-x \end{vmatrix} \\ &= (-17-x)(19-x)(-2-x) + 18 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 9 \cdot 18 \\ &\quad - 6 \cdot 9(19-x) + 6 \cdot 9(-17-x) + 18 \cdot 18(-2-x) \\ &= (-17-x)(19-x)(-2-x) + 18^2(-2-x) + 6 \cdot 18^2 - 6 \cdot 9(19+17) \\ &= [(-17-x)(19-x) + 18^2](-2-x) + 6 \cdot 18^2 - 6 \cdot 9 \cdot 36 \\ &= [-17 \cdot 19 + 17x - 19x + x^2 + 18^2](-2-x) = (x^2 - 2x + 1)(-2-x) \\ &= -(x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1. \end{aligned}$$

Cálculo dos autoespaços:

$$V_{-2}: \begin{bmatrix} -17+2 & 18 & -6 \\ -18 & 19+2 & -6 \\ -9 & 9 & -2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -15 & 18 & -6 \\ -18 & 21 & -6 \\ -9 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = y \wedge -15x + 18x = 6z \Leftrightarrow x = y \wedge x = 2z \Rightarrow V_{-2} = Vet\{(2, 2, 1)\}.$$

Analogamente,

$$V_1 : \begin{bmatrix} -17-1 & 18 & -6 \\ -18 & 19-1 & -6 \\ -9 & 9 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -18 & 18 & -6 \\ -18 & 18 & -6 \\ -9 & 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -3x + 3x = z \Rightarrow V_1 = Vet\{(0, 1, 3), (1, 0, -3)\}.$$

A matriz diagonalizante P e a representação diagonal D de A são, respectivamente,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Q 5.24. 1. $\begin{bmatrix} -23/7 & 12/7 \\ -40/7 & 23/7 \end{bmatrix}$ é diagonalizável. Base de autovetores: $\{(3, 4), (2, 5)\}$.

2. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

3. $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ não é diagonalizável a menos que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, casos em que qualquer base de \mathbb{R}^2 é de autovetores.

4. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável. Para montar a base de auto-vetores escolha um autovetor em cada autoespaço associado aos autovalores 1, 2 e 5.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. Note que $\lambda = 2$ é seu único autovalor, enquanto $x - 2$ não anula a matriz.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. Note que $\lambda = 1$ é um autovalor de multiplicidade dois, enquanto $\text{Dim}(V_1) = 1$.

Q 5.25. Seja α é a base canônica de \mathbb{R}^3 e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Então

1. Polinômio característico de T , os autovalores e os autovetores correspondentes:

Solução.

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \text{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & -3-x & 1 \\ 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -3-x & 1 \\ 0 & -3-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(-3-x)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2 \quad (\text{Autovalores}). \end{aligned}$$

$$V_{-3} : \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = 0 \wedge y = -5x \Rightarrow V_{-3} = \text{Vet}\{(1, -5, 0)\}.$$

Analogamente,

$$V_2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0 \wedge z = 5y = 0 \Rightarrow V_2 = \text{Vet}\{(1, 0, 0)\}.$$

2. Se $\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ ache $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ e $p_A(\lambda)$ (observe que pode-se dizer que $p_A(\lambda) = p_T(\lambda)$).

Solução.

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\beta}^{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, lembrando que $[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}$ tem-se

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

que possui o polinômio característico

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \text{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} -3-x & 1 & -2 \\ -1 & -3-x & -3 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-3-x)^2(2-x) - 3 - 2 + 2(-3-x) - 3(-3-x) + (2-x) \\ &= (2-x)(-3-x)^2 - 5 - (-3-x) + 2-x \\ &= (2-x)(-3-x)^2 = p_T(x). \end{aligned}$$

3. Encontre uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_\gamma^\gamma$ seja diagonal, se possível.

Solução. T não é diagonalizável pois $\dim(V_{-3}) + \dim(V_2) = 2 < 3$.

Q 5.26. Seja T nilpotente.

1. Possíveis autovalores: $\lambda = 0$.

Solução. Sejam $v \in V \setminus \{0\}$ e λ escalar tais que $T(v) = \lambda v$. Então

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \quad \dots \quad T^n(v) = \lambda^n v.$$

Mas, sendo T nilpotente podemos supor que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Assim, $T^n(v) = 0$ implica $\lambda^n v = 0$. Logo, $\lambda = 0$ pois $v \neq 0_V$. Ou seja, se λ é autovalor de T então $\lambda = 0$. Provemos agora que $\lambda = 0$ é autovalor. Como $T^{n-1} \neq 0$ podemos escolher $u \neq 0_V$ tal que $w = T^{n-1}(u) \neq 0$. Então

$$0 \cdot w = 0 = T^n(u) = T(T^{n-1}(u)) = T(w).$$

2. Exemplo de uma matriz $A_{2 \times 2} \neq 0$ e tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja nilpotente.

Solução. Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

Solução. Se T fosse diagonalizável existiria base de autovetores β em V tal que $[T]_\beta^\beta$ é a matriz diagonal dos autovalores de T ; conseqüentemente (vide item (1)), a matriz nula. Ou seja, T seria o operador nulo. \square

Q 5.27. Dado T idempotente:

1. Possíveis autovalores: $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Solução. Sejam $v \in V \setminus \{0\}$ e λ escalar tais que $T(v) = \lambda v$. Então $\lambda v = T(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$; ou seja, $0 = \lambda^2 v - \lambda v = \lambda(\lambda - 1)v$ e, conseqüentemente, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ são as opções possíveis. Observe agora que o operador nulo e a identidade são exemplos triviais de operadores idempotentes para os quais 0 e 1 são os (únicos) autovalores respectivamente. Suponhamos então que $0 \neq T \neq I$. Então, existe $u \neq 0$ tal que $v = T(u) \neq 0$ (c.c., $T=0$) e assim $1 \cdot v = T(u) = T(T(u)) = T(v)$ garante que um (1) é autovalor. De forma análoga existe $u \neq 0$ tal que $v = [T - I](u) \neq 0$ (c.c., $T=I$) obtendo $T(v) = T(T(u) - u) = T(T(u)) - T(u) = T(u) - T(u) = 0_V = 0 \cdot v$. Ou seja, 0 também é autovalor.

2. Exemplo de uma matriz $A_{2 \times 2} \neq 0$, $A_{2 \times 2} \neq I$, e tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja idempotente.

Solução. Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Idempotente implica diagonalizável:

Solução. Se $T = 0$ ou $T = I$ não tem nada a provar. Suponhamos então que $0 \neq T \neq I$. Aplicando o resultado de item (1), T possui os autovalores 0 e 1 . Seja $m(x) = x(x - 1) = x^2 - x$ (polinômio de termos lineares com os autovalores distintos de T). Então $m(T) = T^2 - T = 0$, pois T é idempotente. Ou seja, $m(x)$ anula T provando que T é diagonalizável. \square

Q 5.28.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \cdot 2^n - 1 & 4(2^n + 1) \\ -2^n - 1 & 2^n + 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & -3 & 1 \\ 1/2 & 4/3 & -1 \\ -2/3 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5.3 Questões da ANPEC

ANPEC (1996 Q14). Indique as afirmativas verdadeiras e falsas. Considere as matrizes A e B , ambas quadradas de ordem n . Afirma-se:

V (0) Se A é não-singular então:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

V (1) $|A| = |A'|$.

V (2) $\text{traço}(A+B) = \text{traço}(A) + \text{traço}(B)$.

F (3) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A . Se A é não singular, $\prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$.

Solução. A não singularidade apenas garante que nenhum autovalor seja igual a zero. O produto pode ser negativo (descreva um exemplo como exercício).

V (4) Sejam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ os autovalores de B , e $B = A^{-1}$. Então

$$[\prod_{i=1}^n \lambda_i] [\prod_{i=1}^n \theta_i] = 1.$$

Solução. Note que

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(B) = [\prod_{i=1}^n \lambda_i] [\prod_{i=1}^n \theta_i].$$

V (5) Se A é não singular, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

F (6) Se A e B são não singulares, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Solução. O correto seria $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solução. Os itens (0), (1), (2) e (5) descrevem propriedades elementares.

ANPEC (1997 Q14). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas abaixo:

V (0) $[(\det A) - 98]^2 + 11 = \text{tr}A$ (onde $\text{tr}A$ é o traço de A).

Solução. $\det(A) = 48 - 10 + 3 + 45 + 4 + 8 = 98$ e $\text{tr}(A) = 4 + 3 + 4 = 11$. Então $[(\det A) - 98]^2 + 11 = 0^2 + 11 = 11 = \text{tr}A$.

F (1) A é uma matriz idempotente.

Solução. $\det(A) \notin \{0, 1\}$ (Vide questão 5.27).

F (2) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{92}$.

Solução. Na verdade,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{98}.$$

V (3) O núcleo do operador linear definido pela matriz A é o vetor zero.

Solução. Note que $\det(A) \neq 0$ implica que A é de posto máximo, assim a nulidade de A é $3 - 3 = 0$ e o sistema $Ax = 0$ possui apenas a solução trivial.

ANPEC (1998 Q15). Considere uma matriz de números reais X , nem todos nulos,

F (0) A matriz X^tX é sempre simétrica e singular

Solução. Considere o contra-exemplo $X = I$.

V (1) O escalar v^tX^tXv , onde v é vetor não nulo, é não-negativo

Solução. $v^t X^t X v = (Xv)^t (Xv) = \|Xv\|^2 \geq 0$.

F (2) Os valores característicos de $X^t X$ podem ser negativos

Solução. Sejam λ escalar e v unitário tais que $X^t X v = \lambda v$ então, do item (1),

$$\lambda = \lambda \|v\|^2 = \lambda v^t v = \langle \lambda v, v \rangle = \langle X^t X v, v \rangle = v^t X^t X v \geq 0.$$

F (3) Se X é quadrada então $X^t X$ é invertível.

Solução. Considere o contra-exemplo $X = [0]$.

ANPEC (1999 Q6). Seja X matriz quadrada de ordem n cujos elementos são números reais nem todos nulos. Indique se falsas ou verdadeiras as afirmações:

F (0) X é necessariamente não-singular.

Solução. Considere por exemplo a matriz quadrada não nula $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

V (1) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ forem os seus valores característicos e se X for singular, o produto deles será necessariamente nulo.

Solução. Lembre que $\det(X) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n$. Logo, $\det(X) = 0$ se e somente se algum autovalor for zero.

V (2) A matriz inversa de X , se existir, atenderá necessariamente à equação: $X \cdot X^{-1} = I$, onde I representa a matriz identidade de ordem n .

Solução. Vide a definição de matriz inversa.

V (3) Quando qualquer das linhas de X pode ser expressa como combinação linear de outra(s), pelo menos um dos valores característicos é nulo.

Solução. Nesse caso $\det(X) = 0$ e aplique a propriedade em (1).

ANPEC (1999 Q14). Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas sobre a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

F (0) Suas colunas são vetores linearmente independentes

Solução. $c_4 = 2c_3$.

V (1) Seu determinante é nulo

Solução. Vide (0)

F (2) É matriz ortogonal

Solução. $\|c_4\| \neq 1$.

F (3) Suas colunas constituem uma base para \mathbb{R}^4

Solução. São linearmente dependentes (Vide (0)).

F (4) Suas linhas constituem uma base para \mathbb{R}^4

Solução. $\det(A) = 0$ implica linhas linearmente dependentes.

ANPEC (2001 Q7). Seja T o operador linear cuja matriz na base natural $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é dada por $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V (0) A imagem de T é o \mathbb{R}^2 ;

F (1) O núcleo de T é uma reta em \mathbb{R}^2 ;

V (2) Os auto valores de T são positivos e distintos;

F (3) Os auto vetores de T são ortogonais;

V (4) O operador T possui um operador inverso T^{-1} tal que para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$.

Solução. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T = T_M$ e $\dim(N(T)) = nulidade(M) = 2 - posto(M) = 0$ pois $posto(M) = 2$ (Note que $\det(M) = 6 - 2 = 4 \neq 0$. Então, $N(T) = \{(0, 0)\}$, que não é uma reta; T é injetora; conseqüentemente, sobrejetora pois as dimensões do domínio e contradomínio coincidem; e assim, bijetora de modo que T possui inversa. Sobre autovalores note que o polinômio característico é

$$p(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) \Rightarrow (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = 4).$$

Logo, os autovalores são positivos e distintos. O item (3) tem solução imediata escolhendo dois autovetores colineares de um mesmo autoespaço (logo não ortogonais). Por uma questão de completez incluímos o cálculo efetivo dos autoespaços:

$$V_1 : (x, y); \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow V_1 = \{(x, -2x); x \in \mathbb{R}\} = Vet\{(1, -2)\}.$$

e

$$V_4: (x, y); \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x+y=0 \Rightarrow V_1 = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1)\}.$$

Em particular, mesmo escolhendo autovetores de autoespaços diferentes, obtemos

$$\langle (1, -2), (1, 1) \rangle = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

indicando que não são ortogonais.

ANPEC (2002 Q6-(0,1)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (0) Seja A uma matriz não-singular com autovalores r_1, r_2 e r_3 , com $r_1 < r_2 < r_3$. Se $r_1 = 1$ e $\text{traço}(A) = \det(A) = 6$, então $\frac{r_2}{r_1} - r_3 = -2$.

Solução. Usando propriedades do traço e do determinante obtemos

$$6 = \text{tr}(A) = r_1 + r_2 + r_3 = 1 + r_2 + r_3 \quad \text{e} \quad 6 = \det(A) = r_1 r_2 r_3 = r_2 r_3 \implies$$

$$r_2 + r_3 = 5 \quad \text{e} \quad r_3 = \frac{6}{r_2} \implies r_2 + \frac{6}{r_2} = 5 \implies$$

$$r_2^2 - 5r_2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (r_2 - 2)(r_2 - 3) = 0 \Leftrightarrow r_2 = 2 \vee r_2 = 3.$$

Quando $r_2 = 2$, $r_3 = 5 - 2 = 3$ e $r_2/r_1 - r_3 = r_2 - r_3 = 2 - 3 = -1 \neq -2$; e quando $r_2 = 3$, $r_3 = 5 - 3 = 2$ e $r_2/r_1 - r_3 = r_2 - r_3 = 3 - 2 = 1 \neq -2$.

V (1) Uma matriz é singular se, e somente se, possui um autovalor igual a 0.

Solução. Lembre que $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ onde $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, representam os autovalores de A .

ANPEC (2003 Q4). Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, assinale V (Verdadeiro)

ou (F) Falso:

F (0) A é inversível.

V (1) Todos os autovalores de A são reais.

F (2) A é diagonalizável.

F (3) A tem um autoespaço de dimensão 2.

V (4) Se P é uma matriz inversível tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, então $c > 0$.

Solução. Calculemos os autovalores de A :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 0 & 1-x & 3 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)^2(-x) + 3(1-x) - 3(1-x) \\ &= -x(x-1)^2 \implies \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 \quad (\text{multiplicidade } 2). \end{aligned}$$

De aqui podemos concluir que (0) é falso pois o determinante de A é zero e que (1) é verdadeiro. Note agora que A não é diagonalizável porque $x(x-1)$ não anula A :

$$A[A-I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{3 \times 3} \neq 0, \quad \text{pois} \quad c_{11} = -3.$$

De aqui podemos concluir que não há autoespaço de dimensão dois. Caso contrário, dito autoespaço seria V_1 e A seria diagonalizável. Por último, $c+1 = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0+1+1 = 2$ implica $c = 1 > 0$.

ANPEC (2003 Q5-(3,4)). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (3) Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ são tais que $T(\vec{x}_0) = 0$ e $T(\vec{x}_1) = y \neq 0$, então $T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = y$ quaisquer que sejam os números $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução. Usando a linearidade de T obtemos

$$T(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1) = aT(\vec{x}_0) + bT(\vec{x}_1) = a0 + by = by \neq y \quad \forall b \neq 1 \wedge y \neq 0.$$

V (4) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear. Então, existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = a_1x - a_2y + a_3z$.

Solução. Considere a base canônica em \mathbb{R}^3 : $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$ e $e^3 = (0, 0, 1)$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^3$ existem únicos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(x) = T(x_1, x_2, x_3) = T(x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3) = x_1T(e^1) + x_2T(e^2) + x_3T(e^3).$$

Defina $a_1 = T(e^1)$, $a_2 = -T(e^2)$ e $a_3 = T(e^3)$ para obter o resultado desejado.

ANPEC (2004 Q4-(3,4)). Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

F (3) Se u e v são dois autovetores de uma matriz X associados a dois autovalores distintos, então u e v são colineares.

Solução. Vetores colineares não são linearmente independentes.

F (4) Se X é uma matriz inversível e simétrica, então seus autovetores são dois-a-dois ortogonais.

Solução. Escolha $v = 2u$, $u \neq 0$, num mesmo autoespaço.

ANPEC (2005 Q1-(0,1,2,4)). Avalie as afirmativas: Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

V (0) O polinômio característico de A é produto de fatores lineares diferentes.

Solução. Note que A é triangular superior e que todos os elementos da sua diagonal principal são diferentes estes por tanto, autovalores diferentes. Ou faça a conta:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5-x & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8-x & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10-x \end{vmatrix} = (1-x)(5-x)(8-x)(10-x).$$

V (1) Se $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ são os autovalores de A , então $\sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 = \text{traço}(A^2)$.

Solução (Solução 1). Uma solução imediata pode ser obtida a partir da aplicação direta do seguinte exercício:

Exercício. Se A é diagonalizável e seus autovalores são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ então para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

Note que A é diagonalizável (Vide item (2)) e faça $n = 4$ e $k = 2$.

Solução (Solução 2). Neste caso A^2 não é difícil de ser calculada e, de (0), os autovalores são 1, 5, 8 e 10. Logo,

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 39 & 85 \\ 0 & 25 & 78 & 159 \\ 0 & 0 & 64 & 162 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{tr}(A) = 1 + 25 + 64 + 100 = 1^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2.$$

V (2) A é diagonalizável.

Solução. A , de ordem 4, possui 4 autovalores distintos.

F (4) A dimensão do núcleo da matriz $(A - 5I_4)$ é maior ou igual a dois.

Solução. Se isso fosse verdade obteríamos um sistema L.I. de 5 ou mais elementos em \mathbb{R}^4 (uma contradição pois $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$); a saber, um sistema de autovetores associados aos autovalores distintos: um para cada, a menos $\lambda = 5$ que forneceria no mínimo dois (note que o núcleo de $(A - 5I_4)$ é o autoespaço do autovalor 5).

ANPEC (2006 Q3-(3)). Avalie as opções

F (3) Uma matriz A $n \times n$ é diagonalizável somente se seus autovalores forem todos distintos.

Solução. Considere, por exemplo, a matriz identidade. É trivialmente diagonalizável e possui apenas um autovalor de multiplicidade n .

ANPEC (2006 Q11-(4)). Avalie as opções

V (4) Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores reais diferentes. Se todos os autovalores de A são menores do que 1 (em módulo) então $A^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Solução. A existência de n autovalores reais diferentes garante que A é diagonalizável então existe P inversível tal que $P^{-1}AP = D$ onde $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal com os autovalores de A e P é matriz de mudança de base (da base de \mathbb{R}^n , como espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, formada de autovetores de A para a base canônica). Então

$$\text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = D^2 = (P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}A^2P$$

e, via indução em $t \in \mathbb{N}$,

$$\text{Diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t) = D^t = P^{-1}A^tP.$$

Em particular,

$$A^t = P \text{Diag}(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t) P^{-1} = P D^t P^{-1}.$$

Logo, se todos os autovalores de A são menores do que 1 (em módulo) então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i^t = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad A^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P \text{Diag}(0, \dots, 0) P^{-1} = P 0 P^{-1} = 0.$$

ANPEC (2006 Q12). Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule $\lambda_1 \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)$.

Solução. Calcule os autovalores e substitua na expressão ou note que

$$\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) = \det(A) - \operatorname{tr}(A) = 7(3) - 2(2) - (7 + 3) = 21 - 4 - 10 = 7.$$

ANPEC (2007 Q1). Seja A a matriz, na base canônica, do operador linear $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$. Denote por $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ os autovalores da matriz A . Julgue os itens abaixo:

V (0) O posto de A é 2.

V (1) $L(1, -2, 1) = (0, 0, 0)$.

F (2) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

V (3) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$.

V (4) L é diagonalizável.

Solução. Note que $L(1, -2, 1) = (1 - 4 + 3, 4 - 10 + 6, 7 - 16 + 9) = (0, 0, 0)$ garante que (1) é verdadeiro e conseqüentemente que o sistema $Ax = 0$ possui solução não trivial, ou seja, que o posto de A é menor do que três. Obtenhamos A : $L(1, 0, 0) = (1, 4, 7)$,

$L(0, 1, 0) = (2, 5, 8)$ e $L(0, 0, 1) = (3, 6, 9)$. Então $A = [L]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Observe que

a submatriz $A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ possui determinante $5 - 8 = -3$ não nulo. Assim, o posto de A é no mínimo dois. Ou seja, $\operatorname{posto}(A) = 2$ e (0) é verdadeiro, além disso, $\det(A) = 0$ o que implica que há um autovalor igual a zero e (2) é falso. O item (3) pode ser justificado pelo fato de que $\operatorname{tr}(A)$ é a soma de seus autovalores e, neste caso, $\operatorname{tr}(A) = 15$. Ou também, podemos efetuar o cálculo dos autovalores (o que também resolverá o item (4)).

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5 - \lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(5 - \lambda)(9 - \lambda) + 84 + 96 - 21(5 - \lambda) - 48(1 - \lambda) - 8(9 - \lambda) \\ &= (5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2)(9 - \lambda) + 180 - 105 + 21\lambda - 48 + 48\lambda - 72 + 8\lambda \\ &= 45 - 54\lambda + 9\lambda^2 - 5\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 77\lambda - 45 \\ &= -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 15\lambda + 18) \implies \\ p_A(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4(18)}}{2}. \end{aligned}$$

De modo que A possui três autovalores distintos em dimensão três o que é suficiente para ser diagonalizável. Em particular:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + \frac{15 - \sqrt{153}}{2} + \frac{15 + \sqrt{153}}{2} = \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = 15.$$

ANPEC (2008 Q2-modificada). Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 identificado com \mathbb{R}^4 de sorte que cada matriz $(a_{ij}) \in V$ seja identificada² com o ponto $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$. Denote por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ os autovalores do operador linear $T : V \rightarrow V$ dado por $T(A) = A^t$, em que A^t é a transposta da matriz A . Sejam $E, B, C, D \in V$ tais que $M = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$ é a matriz, na base canônica de $\mathbb{R}^4 \cong V$, do operador linear T . Julgue as afirmativas:

F (0) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ e $(TA = A \Leftrightarrow A$ é simétrica).

V (1) $|A|^2 = |TA|^2 = \lambda^2|A|^2$ sempre que se tenha $T(A) = \lambda A$.

V (2) $\lambda_1 = -1$ e $(TA = \lambda_1 A \Leftrightarrow A$ é anti-simétrica).

F (3) $\text{Traço}(M) = 0$ e $\det M = -1$.

V (4) $E + D$ é a matriz identidade de V .

Solução. Obtenhamos M :

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong (1, 0, 0, 0) \\ T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong (0, 0, 1, 0) \\ T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong (0, 1, 0, 0) \\ T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $E + D = I$ ((4) é V); $\text{tr}(M) = 2$ ((3) é F) e que os autovalores são as raízes do

²Em relação à questão divulgada na prova da ANPEC2008 modificamos a identificação com \mathbb{R}^4 pois o vetor $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ descrito nessa prova, provavelmente devido a erro de digitação, anula a questão.

polinômio característico de M :

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 [(-\lambda)^2 - 1] \\ &= (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 1)(\lambda + 1) = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 1) \implies \\ p_M(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad (\text{mult. } 1) \quad \vee \quad \lambda = 1 \quad (\text{mult. } 3). \end{aligned}$$

Logo, (0) é Falso. Para checar o item (1) seja λ autovalor e A autovetor associado ($A^t = T(A) = \lambda A$). Então

$$\det^2(A) = \det^2(A^t) = \det^2(T(A)) = \det^2(\lambda A) = (\lambda^2 \det(A))^2 = \lambda^4 \det^2(A) = \lambda^2 \det^2(A)$$

onde a última igualdade decorre de $\lambda = \pm 1$. Por último, checado que -1 é autovalor, note que

$$T(A) = (-1)A \Leftrightarrow A^t = -A,$$

ou seja, A pertence ao autoespaço associado a $\lambda_1 = -1$ se, e somente se, é antissimétrica (e (2) é V).

ANPEC (2008 Q8-modificada). Seja $P(t) = (-1)^n t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_{n-1} t + c_n$ o polinômio característico³ de uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ com entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Julgue as afirmativas:

V (0) Se A é simétrica, então A é diagonalizável.

Solução. Sendo simétrica representa um operador autoadjunto.

F (1) Se A é invertível e $P(t) = tQ(t) + c_n$ então $Q(A) = (\det A)A^{-1}$.

Solução. Note que $c_n = P(0) = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$ e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, o polinômio característico de p_A anula a matriz A , ou seja,

$$0 = p_A(A) = P(A) = AQ(A) + \det(A)I.$$

Multiplicando a esquerda pela inversa de A chega-se a

$$0 = A^{-1}[AQ(A) + \det(A)I] = Q(A) + \det(A)A^{-1} \implies Q(A) = -(\det A)A^{-1}.$$

³Tomei a liberdade de modificar sutilmente esta questão pela introdução do coeficiente $(-1)^n$ para o termo de mais alta ordem t^n do polinômio característico assumindo erro de digitação na questão da ANPEC2008 pois, se considerado o polinômio mônico descrito em dita questão estaríamos assumindo ordem n par para a matriz e conseqüentemente a afirmação no item (4) seria verdadeira tratando-se de uma condicional com hipótese declaradamente falsa (n ímpar): em contradição com o gabarito divulgado pela ANPEC em que (4) é falsa.

F (2) Se A é invertível, então A e A^{-1} possuem os mesmos autovalores.

Solução. Considere, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ que possui o único autovalor $\lambda = 2$ e é invertível. A matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e possui o autovalor $1/2$ diferente de 2.

F (3) $\det(-A) = (-1)^{n+1}\det A$.

Solução. Lembre que $\det(cA) = c^n \det(A)$ onde n é a ordem da matriz A .

F (4) Se A é anti-simétrica e n é ímpar, então $\det A \neq 0$.

Solução. $A^T = -A$ implica $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Sabendo que n é ímpar obtemos

$$\det(A) = -\det(A) \implies 2\det(A) = 0 \implies \det(A) = 0.$$

ANPEC (2008 Q14). Seja H uma matriz 4×4 idempotente, simétrica e não-singular. Seja $0_{4 \times 5}$ a matriz nula de ordem 4×5 e $0_{5 \times 4} = 0'_{4 \times 5}$ sua transposta. Seja ainda L uma matriz 5×5 ortogonal. Considere a matriz 9×9 dada por :

$$A = \begin{bmatrix} H & 0_{4 \times 5} \\ 0_{5 \times 4} & L \end{bmatrix}.$$

Seja $D = \det(A'A)$ o determinante de $A'A$, em que A' é a transposta de A . Calcule $9D + 3$.

Solução. Note que $\det(A)$ é o produto dos determinantes de H e de L (propriedades do determinante⁴), logo $D = \det^2(A) = \det^2(H)\det^2(L)$. De H sabemos que $\det(H) \neq 0$ pois é não singular e $HH = H$, pois é idempotente. Então

$$\det^2(H) = \det(H) \implies 0 = \det(H)[\det(H) - 1] \implies \det(H) = 1, \quad \text{pois } \det(H) \neq 0.$$

⁴Na passagem $\det(A) = \det(H)\det(L)$ estamos usando propriedades do determinante que poderiam ser resumidas na seguinte sequência de exercícios. Sejam $X = [x_{ij}]_{r \times r}$, $Y = [y_{ij}]_{(n-r) \times (n-r)}$, $C = [c_{ij}]_{(n-r) \times r}$ e $D = [d_{ij}]_{r \times r}$ onde $d_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$ matrizes reais, $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$:

a) Se $B = \begin{bmatrix} D & 0 \\ C & Y \end{bmatrix}$ então $\det(B) = \prod_{i=1}^r d_{ii} \det(Y)$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ então $A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$.

c) Se $A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ então $\det(A) = \det(X)\det(Y)$.

A ortogonalidade de L implica $L^T L = I$, de modo que

$$1 = \det(I) = \det(L^T L) = \det(L^T) \det(L) = \det^2(L).$$

Consequentemente,

$$D = \det^2(H) \det^2(L) = 1(1) = 1 \implies 9D + 3 = 9 + 3 = 12.$$

ANPEC (2009 Q3). Se A é a matriz na base canônica de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$, julgue as afirmativas:

F (0) A dimensão do núcleo de T é 2.

Solução (Solução 1). Usando a definição, $(x, y, z) \in N(T)$ equivale a $(z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$, i.e., $z = 0$ e $x = y$. Ou seja,

$$N(T) = \{(x, x, 0); x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\} \implies \dim(N(T)) = 1.$$

Solução (Solução 2). Nulidade de $A = 3 - \text{posto}(A) = 3 - 2 = 1$. Onde A está descrita no item (2) a seguir. Para concluir que o posto dela é dois note que a linha três é múltiplo da linha um implicando $\det(A) = 0$ e $\text{posto}(A) < 2$. Por outro lado, a submatriz A_{31} obtida de A eliminando a linha três e a coluna um possui determinante diferente de zero garantindo $\text{posto}(A) \geq 2$.

V (1) $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base da imagem de T .

Solução. Vide o Gabarito sobre Espaços Vetoriais.

V (2) A transposta de A e $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução. Lembre que a base canônica α em \mathbb{R}^3 é o sistema ordenado $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Então

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (0, 1, 0), & T(0, 1, 0) &= (0, -1, 0), & \text{e} & T(0, 0, 1) &= (1, 0 - 1) \implies \\ [T(1, 0, 0)]_\alpha &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & [T(0, 1, 0)]_\alpha &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{e} & [T(0, 0, 1)]_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \\ A = [T]_\alpha^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

F (3) Se $U = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ então $T(U) \subseteq U$.

Solução. $T(0, 0, z) = zT(0, 0, 1) = z(1, 0, -1) \notin U$.

V (4) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 1, 0)\}$ é uma reta no plano xy .

Solução. Note que $T(x, y, z) = (0, 1, 0)$ se, e somente se, $A[x]_\alpha = [T(x, y, z)]_\alpha = [(0, 1, 0)]_\alpha$, i.e.,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_3 = 0 \quad \wedge \quad x_1 - x_2 = 1 \quad \wedge \quad -x_3 = 0.$$

Ou seja,

$$T^{-1}((0, 1, 0)) = \{(x_1, x_1 - 1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{(0, -1, 0) + x_1(1, 1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

ANPEC (2009 Q6). Denote por M_n o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Seja $D : M_2 \times M_2 \rightarrow M_4$ a aplicação dada por

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

em que $0 \in M_2$ é identicamente nula. Seja A a matriz da aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $L(x, y) = (y - x, y)$. Se $B = D(A, A)$, julgue as afirmativas:

V (0) O polinômio característico de A é dado por $p(t) = -(1 - t^2)$.

F (1) $A^{-1} = A$ e $\det A = \det B = 1$.

V (2) Se λ é um autovalor de A , então λ é um autovalor de B .

F (3) O polinômio característico de B é dado por $q(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

V (4) A é diagonalizável.

Solução. Seja $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Então $L(1, 0) = (0 - 1, 0) = (-1, 0)$ e $L(0, 1) = (1 - 0, 1) = (1, 1)$ então

$$A = [L]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\det(A) = -1$ (e (1) é falso) e $P_A(t) = t^2 - 1 = -(1 - t^2) = p(t)$ (obtendo que (0) é verdadeiro). Em particular, A possui dois autovalores reais distintos: -1 e 1 . Lembrado que

L está definido em \mathbb{R}^2 que possui dimensão 2 podemos concluir que L (ou A) é diagonalizável (ou seja, (4) é verdadeiro). Observe agora que $D(A-tI, A-tI) = B-tI$. Conseqüentemente

$$P_B(t) = \det(B-tI) = \det(D(A-tI, A-tI)) = [\det(A-tI)]^2 = [P_A(t)]^2.$$

De modo que se λ é um autovalor de A (i.e., raiz de $p_A(t)$), então λ é um autovalor de B (e (2) é verdadeiro). Mais ainda,

$$P_B(t) = [t^2 - 1]^2 = t^4 - 2t^2 + 1 \neq q(t) \quad \implies (3) \text{ Falso.}$$

ANPEC (2009 Q11). Sejam $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$. Julgue os itens

abaixo:

V (0) $\text{tr}(A) = -\det(B)$ então $k = 1$.

Solução. $\text{tr}(A) = k - 1 + k = 2k - 1$ e $\det(B) = -k^2$. Logo,

$$\text{tr}(A) = -\det(B) \Leftrightarrow 2k - 1 = k^2 \Leftrightarrow 0 = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 \Leftrightarrow k = 1.$$

F (1) Se $k = 1$ então 0 é autovalor de A .

Solução. Calculemos os possíveis autovalores de A :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} k - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & k - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (k - \lambda)^2(-1 - \lambda) - (k - \lambda) \\ &= -(k - \lambda)[(k - \lambda)(1 + \lambda) + 1] \\ &= (\lambda - k)[- \lambda^2 + (k - 1)\lambda + k + 1] \\ &\Leftrightarrow \lambda = k \quad \vee \quad \lambda^2 + (1 - k)\lambda - (k + 1) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Logo, se $k = 1$ os autovalores de A são $\lambda = 1$ e as soluções da equação de segundo grau $\lambda^2 + 0\lambda - 2 = 0$, que são $\lambda = \pm\sqrt{2}$. De modo que $\lambda = 0$ não é um dos possíveis autovalores.

F (2) Para todo k , $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k - 1 \end{pmatrix}$ é autovetor associado ao autovalor k .

Solução. Do item anterior sabemos que $\lambda = k$ sempre é autovalor de A . Vamos então checar se $Av = kv$:

$$Av = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ k(k - 1) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k - 1 \end{bmatrix} \neq kv.$$

V (3) Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então o sistema $Ax = b$ tem solução única em que $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ e $b = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$.

Solução. Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ então $\lambda = 0$ não é autovalor de A (vide (5.2)). Logo, $\text{Det}(A) \neq 0$; o posto de A é três e sua nulidade é zero independentemente de b . Ou seja, $Ax = b$ é compatível determinado.

F (4) Se $k = 0$ então o sistema $Bx = 0$, em que 0 é o vetor nulo, só admite a solução trivial, isto é, $x = 0$.

Solução. Se $k = 0$, o posto de B é menor do que três (de fato, é igual a dois) e sua nulidade positiva (um). Consequentemente o sistema de equações lineares homogêneo $Bx = 0$ possui infinitas soluções.

ANPEC (2010 Q11-(1,2,3)). Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas:

V (1) Se -1 é autovalor de A , então $a = 0$;

Solução. Calculando o polinômico característico de A obtemos

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (0)\lambda + (-1 - 2a) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 + 2a.$$

Logo, se -1 é autovalor de A , então $1 = (-1)^2 = 1 + 2a$; ou seja, $a = 0$.

F (2) Se $b = 2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um autovetor de B ;

Solução. Note que dito v é um autovetor de B se, e somente se $Av = \lambda v$ para algum escalar λ ; assim, fazendo $b = 2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5 = \lambda \quad \wedge \quad 4 = 2\lambda \quad \Leftrightarrow 5 = \lambda = 2,$$

o que é impossível.

V (3) Se $a > -1/2$, então A é diagonalizável.

Solução. Se $a > -1/2$, então $2a + 1 > 0$ e do item (1) sabe-se que nesse caso $\lambda_1 = -\sqrt{1 + 2a}$ e $\lambda_2 = \sqrt{1 + 2a}$ são dois autovalores (reais) distintos da matriz quadrada de ordem dois A ; o que é suficiente para garantir que A é diagonalizável (em \mathbb{R}^2 como espaço vetorial sobre os escalares reais).

ANPEC (2011-Q5-(2)). Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Considere o sistema $Ax = b$ abaixo e julgue as afirmativas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

F (2) Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ e 0 é autovalor de A , então o sistema possui uma única solução.

Solução. Nesse caso o conjunto solução é o núcleo de A , que possui dimensão maior ou igual a um sob a hipótese de zero ser autovalor. Logo, é um conjunto infinito.

ANPEC (2011-Q6). Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ 3y - 2z \\ -y + 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seja A a matriz de T relativa à base canônica de \mathbb{R}^3 . Julgue a afirmativa:

F (0) L é sobrejetora.

Solução. Note que a matriz que representa L é singular pois a linha 1 é a linha 3 menos a linha 2; ou seja, seu determinante é zero. Logo, não é injetora e, conseqüentemente, não é sobrejetora pois a dimensão do domínio e do contradomínio é a mesma.

V (1) Se $v \in \mathbb{R}^3$ é tal que $v^T = (-1, -1, 1)$, então $\{v\}$ é base para o Núcleo de L .

Solução. $L(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Então $v \in N(L)$. Em particular, v é autovetor associado ao autovalor zero e a matriz que representa L na base canônica não é de posto máximo. Note ainda que o posto de dita matriz é dois, pois o determinante da submatriz quadrada obtida dela eliminando a linha e coluna três é diferente de zero. Logo, seu posto é dois e sua nulidade é um. De modo que $\dim(N(T)) = 1$.

$$V (2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução. Seja $\alpha = \{e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Então, $T(e_1) = (2, 0, 0)^T$, $T(e_2) = (-2, 3, -1)^T$ e $T(e_3) = (3, -2, 2)$. Então,

$$[T(e_1)]_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

V (3) A possui três autovalores distintos e portanto é diagonalizável.

Solução. Da resolução do item (2) temos

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} + 0\Delta_{21} + 0\Delta_{31} \\ &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4) \\ &= 0 \iff \lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 2 \quad \vee \quad \lambda = 4. \end{aligned}$$

F (4) Se $v \in \mathbb{R}^3$ é tal que $v^T = (1, 1, 1)$, então v é autovetor de A associado ao autovalor 1.

Solução. $T((1, 1, 1)^T) = (2 - 2 + 3, 3 - 2, -1 + 2)^T = (3, 1, 1)^T \neq 1 \cdot (1, 1, 1)^T$.

ANPEC (2011-Q12-(0,2)). Seja A a matriz 2×2 à qual está associado o sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes reais

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Avalie os seguintes itens:

F (0) Para $a = b = d = 1$ e $c = 4$, os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\mu = 3$.

Solução. Neste caso $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$$p_A(x) = x^2 - (1+1)x + (1-4) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \iff x = -1 \quad \vee \quad x = 3.$$

V (2) Para $a = d = -b = -1$ e $0 < c < 1$, os autovalores de A são números reais negativos distintos.

Solução. Se $a = d = -b = -1$ e $0 < c < 1$ então $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}$. Logo,

$$p_A(x) = x^2 - (-1-1)x + (1-c) = x^2 + 2x + (1-c) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-c)}}{2} = -1 \pm \sqrt{c}.$$

Note agora que $c \in (0, 1)$ implica $\sqrt{c} \in (0, 1)$; o que garante que os autovalores são números reais negativos distintos:

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{c} < -1 + \sqrt{c} = \lambda_2 < 0.$$

ANPEC (2012 Q5). Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + y - z, x + y)$. Denote por A a matriz da transformação T relativa as bases canônicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 . Julgue as afirmativas:

F (0) A matriz A tem três linhas e duas colunas.

Solução. A tem três colunas (tantas quanto o número de elementos de uma base do domínio \mathbb{R}^3) e duas linhas (tantas quanto o número de elementos de uma base do contradomínio \mathbb{R}^2). Note que $T(1, 0, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 0)$; assim,

$$[T(1, 0, 0)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(0, 1, 0)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(0, 0, 1)]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

V (1) O posto da matriz A é igual a 2.

Solução. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma submatriz quadrada de A , de ordem dois e com determinante diferente de zero; logo, A é de posto máximo (A possui apenas duas linhas) 2.

F (2) O núcleo e a imagem de T são dois subespaços de \mathbb{R}^3 , cujas dimensões são 2 e 1, respectivamente.

Solução. A imagem de T é um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$.

V (3) O Núcleo da transformação T é gerado pelo vetor $(-1, 1, 0)$.

Solução. $(x, y, z) \in N(T)$ se e somente se $x + y - z = 0$ e $x + y = 0$, i.e., $z = 0$ e $y = -x$. Logo,

$$N(T) = \{(x, -x, 0); x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 0); x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, -1, 0)\} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0)\}.$$

V (4) O sistema $Ax = b$ sempre tem solução para qualquer $b \in \mathbb{R}^2$.

Solução. Pelo Teorema do núcleo e da imagem,

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 1 + \dim(\text{Im}(T)) \implies \dim(\text{Im}(T)) = 2.$$

Ou seja, T é sobrejetora.

ANPEC (2012 Q6). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas:

F (0) A matriz A tem 3 autovalores distintos.

Solução. Calculando o polinômio característico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda [(-1 - \lambda)^2 - 1] = -\lambda(1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1) = -\lambda^2(2 + \lambda) \implies \\ p_A(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = -2 \end{aligned}$$

concluimos que A possui apenas dois autovalores distintos.

V (1) A matriz A tem um autovalor de multiplicidade algébrica 2.

Solução. O autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicidade 2 (vide o polinômio característico no item (0)).

F (2) A matriz A não é diagonalizável por que o número de autovalores é menor do que a sua ordem.

Solução. Vide item (3)

V (3) A matriz A é diagonalizável.

Solução. Do item (0) temos os autovalores distintos 0 e -2 . Logo, basta checar se o polinômio $x(x + 2)$ anula ou não a matriz A :

$$\begin{aligned} A(A + 2I) &= A^2 + 2A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então, A é diagonalizável.

V (4) Os autovalores da matriz A produzem três autovetores linearmente independentes.

Solução. Sim, pois A , de ordem 3, é diagonalizável (vide item (3)).

ANPEC (2013 Q7). Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - ay)$, $a \in \mathbb{R}$. Denote por A a matriz que representa T na base canônica de \mathbb{R}^2 . Julgue as seguintes afirmativas:

F (0) A matriz associada à transformação T é não singular para $a = -1$.

V (1) Se $a = -1$, o núcleo de T é um subespaço de dimensão 1.

V (2) O sistema $Ax = c$ sempre tem solução para $a = 1$ e c qualquer vetor de \mathbb{R}^2 .

F (3) O núcleo e a imagem de T são subespaços cujas dimensões são maiores do que 2.

V (4) Para qualquer valor de a o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem solução nula.

Solução. $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, -a)$; assim, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$. Então, para $a = -1$,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz com determinante igual a zero, i.e., singular (e (0) é falso), de posto um e nulidade um. Lembrando que a nulidade de A coincide com a dimensão do seu núcleo conclui-se que (1) é verdadeiro e, em particular, (3) é falso. O item (4) é trivial pois todo sistema homogêneo admite a solução nula. Quanto ao item (2), seja $a = 1$. Então, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz com determinante diferente de zero e, aplicando por exemplo a Regra de Cramer, o sistema linear $Ax = c$ possui solução única qualquer que seja $c \in \mathbb{R}^2$

ANPEC (2013 Q10). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Julgue as afirmativas:

F (0) O número de autovalores distintos da matriz A é igual à ordem da matriz A .

Solução. O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 \\ 3 & -x & -3 \\ 1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -x(1+x)^2 + x = -x[(x+1)^2 - 1] \\ &= -x(x+1-1)(x+1+1) = -x^2(x+2). \end{aligned}$$

Então, os autovalores de A são $\lambda_1 = -2$, com multiplicidade um, e $\lambda_2 = 0$ com multiplicidade dois; ou seja, A possui apenas dois autovalores sendo de ordem três.

F (1) A dimensão do subespaço associado ao maior autovalor é 1.

Solução. O maior autovalor é $\lambda_2 = 0$ e $(x, y, z) \in V_0$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x + z = 0 \Leftrightarrow z = x \wedge x, y \in \mathbb{R} \implies$$

$$V_0 = \{(x, y, x); x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \implies \text{Dim}(V_0) = 2.$$

V (2) A dimensão do subespaço associado ao menor autovalor é 1.

Solução. A dimensão de um autoespaço é sempre maior ou igual a um. Também é verdade que a soma das dimensões dos autoespaços é menor ou igual à ordem da matriz, no caso 3. Da resolução do item (1) sabe-se que $\text{dim}(V_0) = 2$; logo, $\text{dim}(V_{-2}) = 1$.

V (3) Os autovetores de A , $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (-1, 3, 1)$, formam uma base de \mathbb{R}^3 .

Solução. v_1 e v_2 são uma base de V_0 (vide item (1)). Basta checar se $v_3 \in V_{-2}$:

$$Av_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -3-3 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2v_3, \quad \text{ok.}$$

Lembrando que autovetores associados a autovalores distintos são L.I. concluímos que v_1, v_2, v_3 são três vetores L.I. em \mathbb{R}^3 , que possui dimensão 3; ou seja, formam uma base de \mathbb{R}^3 .

V (4) A matriz A é diagonalizável.

Solução. Vide item (3).

ANPEC (2014 Q1-(4)). Analisar a veracidade das seguintes afirmações:

V (4) A função $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ é bijetora se e só se $ad \neq bc$.

Solução. Note que f representa uma transformação linear de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 e que

$$f(1, 0) = (a, c) \quad \text{e} \quad f(0, 1) = (b, d) \implies A = [f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

em que $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Logo, f é bijetora se e somente se o posto de A é máximo, i.e., $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

ANPEC (2014 Q2). Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x + 2y, x, y - x)$. Julgue as seguintes afirmativas:

F (0) A matriz que representa T em quaisquer bases tem 3 colunas.

Solução. Note que $T(1, 0) = (2, 1, -1)$ e $T(0, 1) = (2, 0, 1)$. Logo, a matriz que representa T nas bases canônicas é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz esta que possui apenas duas colunas.

V (1) A transformação linear T não é sobrejetora.

Solução. O posto da matriz A que representa T (vide item (0)) é dois.

F (2) Existe um vetor não nulo que é levado ao vetor zero.

Solução. O posto da matriz A que representa T (vide item (0)) é dois; logo, sua nulidade é zero (pois tem apenas duas colunas). Ou seja, a dimensão do núcleo de T é zero e, com isto, $N(T) = \{0\}$.

V (3) O sistema $Tx = v$ sempre tem solução para v na imagem da T .

Solução. Claro, pela definição de imagem.

F (4) A imagem de T é um plano que passa pela origem e tem vetor normal $(0, 4, 2)$.

Solução. É um plano sim, que passa pela origem: $\{x(2, 1, -1) + y(2, 0, 1); x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vet}\{(2, 1, -1), (2, 0, 1)\}$. Porém, $(0, 4, 2)$ não é múltiplo escalar do vetor normal $N = (2, 1, -1) \times (2, 0, 1) = (1, -4, -2)$.

ANPEC (2015 Q15-(0,1,4)). Analise a veracidade das seguintes afirmações:

F (0) Se $\lambda_1 \neq 0$ é autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então A é invertível (possui inversa) e um autovalor da inversa é λ_1^{-1} ;

Solução. Considere, por exemplo, a matriz singular $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A possui um autovalor não nulo ($\lambda = 1$); porém, A não é invertível pois seu determinante é igual a zero. Ou seja, A possui um outro autovalor que é igual a zero.

V (1) Os autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ não são ortogonais;

Solução. O polinômio característico é $p(x) = x^2 - 15x + 54 = (x - 6)(x - 9)$; logo, $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 9$ são os autovalores da matriz. Calculemos então os autoespaços associados:

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 2 \\ -2 & 10-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -x+2y=0 \iff x=2y \implies V_6 = \text{Vect}\{(2,1)\}.$$

e

$$\begin{bmatrix} 5-9 & 2 \\ -2 & 10-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -2x+y=0 \iff y=2x \implies V_9 = \text{Vect}\{(1,2)\}.$$

Então ou os autovetores estão numa mesma reta (paralelos), caso do mesmo autoespaço, ou são vetores não nulos alinhados com $(2,1)$ e $(1,2)$ respectivamente; vetores estes que não são ortogonais. De fato,

$$\langle (2,1), (1,2) \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

F (4) O núcleo da transformação definida por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, então essa matriz tem somente um autovalor não nulo.

Solução. Note que $\text{Dim}(N(A)) = 2$ e que $\text{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$, de modo que $\text{Dim}(\text{Im}(A)) = 3 - 2 = 1$; assim, A não pode possuir mais do que um autovalor não nulo. Porém, isso

não garante que A possua algum autovalor não nulo. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Claro, que chegar a uma matriz tal pode ser um tanto “trabalhoso” ainda que “interessante”. Bastaria construir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que só possua $\lambda = 0$ como autovalor e núcleo como descrito no enunciado acima. Observe que $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ se, e somente se, $x_2 = 3x_3 - 2x_1$; de modo que

$$\begin{aligned} N(A) &= \{(x_1, 3x_3 - 2x_1, x_3); x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, -2x_1, 0) + (0, 3x_3, x_3); x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -2, 0) + x_3(0, 3, 1); x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}$ é uma base do subespaço núcleo de A , que pode ser completada até formar uma base em \mathbb{R}^3 adicionando um vetor que não seja combinação linear deles; digamos, $(1, 0, 0)$. Defina $\beta = \{(1, -2, 0), (0, 3, 1), (1, 0, 0)\}$ como sendo essa base. Para construir T basta defini-lo apropriadamente nessa base: $T(1, -2, 0) = (0, 0, 0) = T(0, 3, 1)$ e $T(1, 0, 0) = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, pois queremos que o núcleo de T seja o mesmo; e $[(a, b, c)]_\beta = (x, y, 0)^T$, pois queremos que T não possua autovalores não nulos. Esta última condição decorre do cálculo da matriz de representação de T na base β

$$\begin{aligned} [T]_\beta^\beta &= [[T(1, -2, 0)]_\beta, [T(0, 3, 1)]_\beta, [T(1, 0, 0)]_\beta] = \left[[\vec{0}]_\beta, [\vec{0}]_\beta, [(a, b, c)]_\beta \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \text{em que} \\ (a, b, c) &= x(1, -2, 0) + y(0, 3, 1) + z(1, 0, 0) \end{aligned}$$

que, sendo triangular superior, possui os autovalores 0 e z ; logo, fixando $z = 0$, reduz-se a escolha de a , b e c às condições

$$(a, b, c) = x(1, -2, 0) + y(0, 3, 1) + 0(1, 0, 0) = (x, -2x + 3y, y) \neq (0, 0, 0).$$

Fixemos, por exemplo, $x = 0$ e $y = 1$ para obter $(a, b, c) = (0, 3, 1)$ e $[(a, b, c)]_\beta = (0, 1, 0)^T$; de modo que $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ representa uma transformação linear com núcleo igual ao $\text{Vet}\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}$ e autovalor $\lambda = 0$ com multiplicidade três (e nenhum autovalor não nulo). Para obter uma matriz com tais propriedades na base natural (canônica) basta mudar a base:

$$A = [T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha \quad \text{em que} \quad [I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que $[I]_\beta^\alpha = ([I]_\alpha^\beta)^{-1}$, pode-se calcular dita matriz por eliminação simultânea:

$$\begin{aligned}
 [[I]_\alpha^\beta \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right] \\
 &\leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{array} \right] \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{array} \right] \\
 &= [I \mid ([I]_\alpha^\beta)^{-1}] \implies ([I]_\alpha^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Finalmente, A pode ser escolhida como sendo

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3/2 & -9/2 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ou qualquer outro múltiplo escalar não nulo dela.

ANPEC (2017 Q2). Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada idempotente se $M^2 = M$. Uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada nilpotente se existe um número inteiro positivo k tal que $N^k = 0$ (matriz com todas as entradas nulas). Classifique as seguintes afirmações segundo a sua veracidade:

V (0) O determinante de uma matriz nilpotente é zero;

Solução. Vide o gabarito da Questão 5.26 que mostra que zero é autovalor; ou, simplesmente aplique propriedades do determinante:

$$0 = \text{Det}(0) = \text{Det}(N^k) = (\text{Det}(N))^k \Rightarrow \text{Det}(N) = 0, \quad \text{pois } k \geq 1.$$

V (1) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é nilpotente, então existe um número inteiro r tal que

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots + M^r;$$

Solução. Note que

$$\begin{aligned} (I - M)(I + M + M^2 + \dots + M^r) &= I + M + \dots + M^r - M - M^2 - \dots - M^{r+1} \\ &= I - M^{r+1} = I \Leftrightarrow M^{r+1} = 0. \end{aligned}$$

Logo, basta fixar $r = k - 1$ em que k representa a constante de nilpotência de M .

F (2) A soma de matrizes nilpotentes é uma matriz nilpotente;

Solução. Considere, por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que são nilpotentes; porém, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é nilpotente pois seu determinante é diferente de zero.

F (3) O determinante de uma matriz idempotente é sempre 1;

Solução. Pode ser zero (consulte o gabarito da Questão 5.27).

V (4) A matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é idempotente se, e somente se, $(I - M)$ é idempotente.

Solução. Note que

$$(I - M) = (I - M)^2 = (I - M)(I - M) = I - M - M + M^2 \Leftrightarrow 0 = -M + M^2 \Leftrightarrow M = M^2.$$

ANPEC (2017 Q4). Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

V (0) Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se T é injetora, então T também é sobrejetora;

Solução. Aplique o Corolário 5.18.

F (1) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - 5y, x - 2y)$. Então existe um subespaço unidimensional V de \mathbb{R}^2 tal que $TV \subset V$;

Solução. Note que a matriz que representa T na base canônica de \mathbb{R}^2 é $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Então, o polinômio característico de T é $p(x) = x^2 - 0x + 1$, que não possui raízes reais (autovalores); logo, não existe $v \in \mathbb{R}^2$, não nulo, e tal que $T(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$; assim, nenhuma reta é invariante por T pois $T(v) \neq \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, e qualquer $v \neq 0$.

F (2) Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear tal que as colunas da matriz que a representa são linearmente independentes. Então o posto de T é m ;

Solução. No caso, n é o número de colunas e m , o número de linhas da matriz que representa T . Desse modo, a afirmação é falsa quando $m > n$ (e só é verdadeira se $n = m$ pois, por hipótese, n é o posto da matriz - aqui n não pode ser maior do que m pois inviabilizaria a hipótese de independência linear dos n vetores coluna do espaço de dimensão m , \mathbb{R}^m).

F (3) Sob as mesmas condições do item anterior, podemos afirmar que existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Tv = 0$;

Solução. Nas condições do item anterior o posto de T é n e, conseqüentemente, sua nulidade é zero; logo $\dim(N(T)) = 0$, isto é, $N(T) = \{0\}$.

V (4) Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares. Então todo autovalor de TG é também um autovalor de GT , em que TG e GT são as duas compostas das transformações T e G .

Solução. Seja λ um autovalor de TG . Se $\lambda = 0$ então $\det([TG]) = 0$ e assim $\det([GT]) = \det([T])\det([G])$ também é zero; ou seja, $\lambda = 0$ também é autovalor de GT , e vice-versa. Podemos supor, então, $\lambda \neq 0$. Seja $v \neq 0$ tal que $TG(v) = \lambda v$ e defina $u = G(v)$. Então, $u \neq 0$ pois $T(0) = 0$ e $\lambda v \neq 0$; e ainda

$$GT(u) = G(TG(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v) = \lambda u;$$

ou seja, λ também é autovalor de GT .

ANPEC (2019 Q14). Considere o operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Seja D a região do plano limitada pelas retas: $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$. Julgue as seguintes afirmativas:

F (0) A matriz que representa o operador T é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Note que $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$; logo,

$$A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = [[T(1, 0)]_{\alpha} \ [T(0, 1)]_{\alpha}] = [[(1, 1)]_{\alpha} \ [(1, -1)]_{\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

F (1) A reta $x + y = 1$ é transformada por T em uma reta horizontal.

Solução. Na verdade, $x + y = 1$ é transformada por T em uma reta vertical:

$$T(x, 1 - x) = (x + (1 - x), x - (1 - x)) = (1, 2x - 1), \quad x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{reta } x = 1.$$

V (2) As retas $x = 0$ e $y = 0$ são transformadas por T em duas retas ortogonais.

Solução. De fato,

$$T(0, y) = (0 + y, 0 - y) = (y, -y) = y(1, -1) \quad \text{e} \quad T(x, 0) = (x, x) = x(1, 1);$$

ou seja, $x = 0$ é transformada na reta $y = -x$ e $y = 0$, em $y = x$; que são perpendiculares.

F (3) O operador T transforma a região D em um retângulo.

Solução. T transforma a região D em um triângulo: região $T(D)$ delimitada pelas retas $x = 1$, $y = x$ e $y = -x$ (consulte os itens (1) e (2)). Para mais detalhes consulte a Figura 5.2

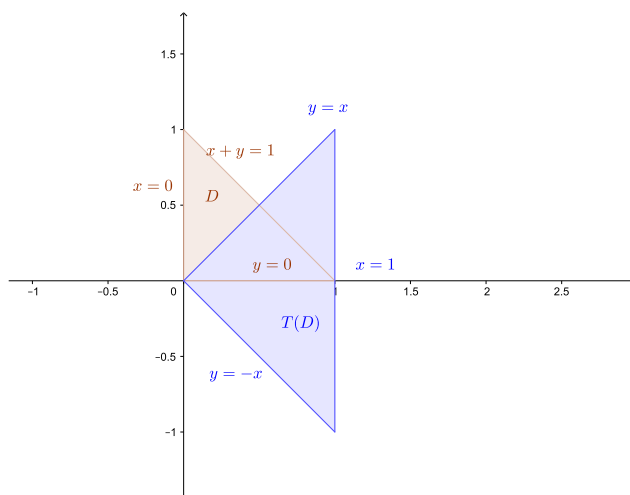


Figura 5.2: Regiões D e E .

F (4) A área da região $T(D)$ é a metade da área de D .

Solução. Na verdade é o dobro, pois $|\text{Det}(A)| = 2$. Ou, simplesmente, calcule as áreas: $A(D) = 1/2$, $A(T(D)) = 2$.

ANPEC (2020 Q6-(0-2)). Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (2x + y, x + 2y, x + y).$$

Julgue as seguintes afirmativas:

V (0) f é uma transformação linear injetora.

Solução. $f(x, y) = (0, 0, 0)$ se, e somente se,

$$2x + y = 0 \quad \wedge \quad x + 2y = 0 \quad \wedge \quad x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \quad \wedge \quad x = 0 \quad \wedge \quad y = 0.$$

Então, $N(f) = \{(0, 0)\}$. Aplique então a Proposição 5.16 para concluir que f é injetora.

F (1) f é uma transformação linear sobrejetora.

Solução. $\dim(\text{Im}(f)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (Vide item (2)).

V (2) Os vetores $(2, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$ formam uma base para a imagem de f .

Solução. Note que

$$f(x, y) = (2x + y, x + 2y, x + y) = (2x, x, x) + (y, 2y, y) = x(2, 1, 1) + y(1, 2, 1).$$

Então, $\text{Im}(f) = \text{Vet}\{(2, 1, 1), (1, 2, 1)\}$; além disso, $(2, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$ são linearmente independentes (não co-lineares); logo, formam uma base para a imagem de f .

ANPEC (2020 Q7-(0-3)). Dado o número real $r \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

V (0) A equação característica de A_r é $(1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 3(1 + r)) = 0$.

Solução. O polinômio característico de A_r é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \text{Det}(A_r - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & r & 0 \\ 3 & -2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(-2 - \lambda) - (1 - \lambda) - 3r(1 - \lambda) = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 1 - 3r] \\ &= (1 - \lambda)[-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 1 - 3r] = (1 - \lambda)[\lambda^2 + \lambda - 3(1 + r)] \end{aligned}$$

F (1) Todos os autovalores associados à matriz A_r são números reais se, e somente se, $r = 3$.

Solução. Da estrutura do polinômio característico de A_r , item (0), os autovalores são $\lambda = 1$, que independe de r , e as raízes de $\lambda^2 + \lambda - 3(1 + r)$, que são reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-3(1 + r)] = 1 + 12(1 + r) = 13 + 12r \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \geq -\frac{13}{12}.$$

V (2) Os autovalores da matriz A_3 são -4 , 1 e 3 .

Solução. Do item (0), $p(\lambda) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 1$ ou

$$\lambda^2 + \lambda - 3(1 + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \lambda = -4 \quad \vee \quad \lambda = 3.$$

V (3) As colunas da matriz B são autovetores da matriz A_3 .

Solução. Basta checar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{35}} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{\sqrt{35}} \\ \frac{-20}{\sqrt{35}} \\ \frac{-4}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{35}} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{14}} \\ \frac{6}{\sqrt{14}} \\ \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 6

Espaços vetoriais com produto interno

Seja V , $+$, \cdot um espaço vetorial sobre os escalares reais. Uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada produto interno se verifica as seguintes propriedades:

1. Bilinear.

2. Simétrica: $\forall x, y \in V$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

3. Para $x \in V$,

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{e} \quad (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = O).$$

Observação 6.1. O postulado 1.) refere-se à linearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em cada uma das suas variáveis vetoriais separadamente; ou seja, fixado $w \in V$,

$$\langle w, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle w, u \rangle + \beta \langle w, v \rangle, \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

e

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle, \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.2. \mathbb{R}^n possui o produto interno Euclideano em que $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Observação 6.3. O postulado 2.) pode ser generalizado para atender espaços vetoriais complexos; ou seja, quando o corpo escalar K que define o espaço é \mathbb{C} e não \mathbb{R} . Nesse caso, $\langle x, y \rangle = a + bi \in \mathbb{C}$ e a simetria é reformulada:

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = a - bi$$

ou seja, $\langle y, x \rangle$ coincide com o complexo conjugado de $\langle x, y \rangle$. Em particular,

$$\langle w, \alpha u \rangle = \bar{\alpha} \langle w, u \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda w, v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle, \quad \alpha, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Observação 6.4. O postulado 3.) refere-se à não-negatividade do produto interno de um vetor com ele próprio; assim, fica bem definida a função $N(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $\forall v \in V$, que é chamada norma induzida pelo produto interno. No caso produto Euclideano em \mathbb{R}^2 tem-se

$$N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|_2,$$

que é a norma Euclideana.

Proposição 6.5. A função $N : V \rightarrow \mathbb{R}$; $N(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $\forall v \in V$, é uma norma; ou seja, verifica as seguintes propriedades:

- i) $N(v) \geq 0$, $\forall v \in V$ e $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = O_v$.
- ii) $N(\alpha v) = |\alpha|N(v)$, $\forall v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$, $\forall u, v \in V$.

Exemplo 6.6. Em \mathbb{R}^2 , a função $\varphi(x, y) = ax_1y_1 + bx_2y_2$, a e b positivos, também é um produto interno (diferente do Euclideano para a ou b diferentes de um). Neste caso, a “bola” fechada de centro a origem e raio um

$$B[(0, 0), 1] := \{x \in \mathbb{R}^2; \sqrt{ax_1^2 + bx_2^2} \leq 1\},$$

é uma elipse, e seu interior, de semi-eixos $\sqrt{1/a}$ e $\sqrt{1/b}$ respectivamente. Consulte a Figura 6.1 (para $a = 2$ e $b = 8$)

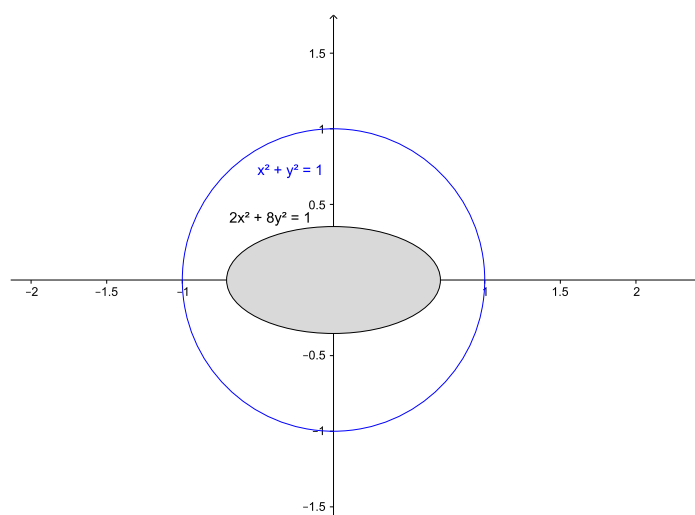


Figura 6.1: Bolas unitárias

Exercício. Prove que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ é um produto interno em $M(m, n)$. Qual seria a norma induzida?

Teorema 6.7 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz). *Seja V , $\varphi(\cdot, \cdot)$, um espaço vetorial munido de produto interno e N , a norma induzida, então*

$$|\varphi(u, v)| \leq N(u)N(v), \quad u, v \in V.$$

Demonstração. Um bom desafio (exercício).

Definição 6.8. Num espaço vetorial munido de produto interno, $V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle$, diz-se que um vetor é unitário quando sua norma induzida for um; e, que dois vetores são ortogonais quando o produto interno entre eles for igual a zero.

Desse modo, um vetor não nulo que não for unitário pode ser normalizado ao multiplicar pelo recíproco da sua norma:

$$N\left(\frac{1}{N(u)}u\right) = \left|\frac{1}{N(u)}\right|N(u) = \frac{N(u)}{N(u)} = 1.$$

Exemplo 6.9. Em \mathbb{R}^2 , $v = (1, 0)$ é unitário em relação ao p.i. Euclideano; porém, não é unitário em relação ao p.i. $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 8x_2y_2$ pois

$$N_\varphi(1, 0) = \sqrt{2(1)^2 + 8(0)^2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Nesse novo p.i., a normalização de $(1, 0)$ é o vetor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Exemplo 6.10. $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são ortogonais em relação ao p.i. Euclideano: $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$. De fato, são perpendiculares. Porém, não são ortogonais em relação a φ :

$$\varphi((1, 1), (1, -1)) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot (-1) = -6 \neq 0.$$

Na verdade, os vetores $x = (x_1, x_2)$ ortogonais a $(1, 1)$ em relação ao p.i. Euclideano verificam a equação linear $x_1 + x_2 = 0$ (i.e., $x_1 = -x_2$); e, em relação a φ , $2x_1 + 8x_2 = 0$ (i.e., $x_1 = -4x_2$).

Definição 6.11. Seja $V, +, \cdot$ um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um sistema de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ é dito ortogonal se seus elementos são dois a dois ortogonais, ou seja, $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$. Se ainda todos os vetores são unitários, o sistema ortogonal passa a ser chamado ortonormal.

Observação 6.12. Num espaço vetorial finitamente gerado sempre é possível obter uma base ortonormal. Basta fixar um base qualquer, efetuar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e normalizar os vetores resultantes (Vide [1, 8.4]). De fato, se v_1 e v_2 formam

uma base do espaço vetorial (plano) $\pi = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ e $v_1 \not\perp v_2$ então, pode-se projetar v_2 sobre a reta gerada por v_1 :

$$P_{v_1}(v_2) = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

e, imediatamente, escolher o vetor diferença

$$w_2 = v_2 - P_{v_1}(v_2)$$

que é ortogonal a v_1 (Consulte a Figura 6.2). Analogamente, se $V = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ então pode-se aplicar o esquema anterior para gerar o plano $\pi = \text{Vect}\{v_1, w_2\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ e projetar v_3 sobre dito plano:

$$P_\pi(v_3) = P_{v_1}(v_3) + P_{w_2}(v_3) = \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

e escolher o vetor diferença $w_3 = v_3 - P_\pi(v_3)$ para compor a base ortogonal de V com $\{v_1, w_2, w_3\}$ (Consulte a Figura 6.2). Finalmente, normalize os vetores para chegar numa base ortonormal. De forma indutiva, pode-se aplicar o processo de ortogonalização para qualquer quantidade finita $n \in \mathbb{N}$ de vetores l.i.

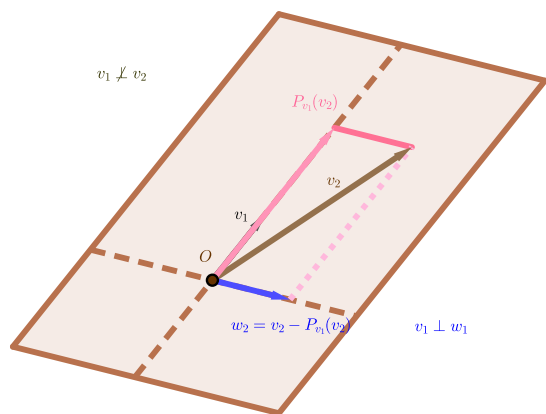


Figura 6.2: Ortogonalização de v_1 e v_2 .

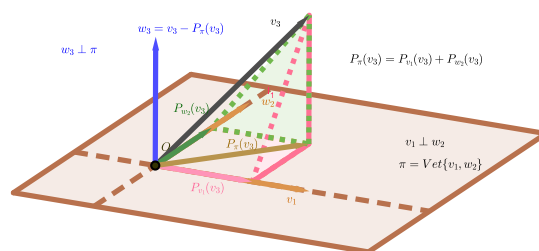


Figura 6.3: Ortogonalização de v_1, v_2, v_3 .

□

Não importa a origem do produto interno em V , fixada uma base ortonormal, ele se comporta via identificação com \mathbb{R}^n como o produto interno Euclidiano. Descrevemos esta propriedade na proposição a seguir.

Proposição 6.13. *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial munido do produto interno $\varphi(\cdot, \cdot)$ e $\delta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal em V . Então, para cada $v, w \in V$,*

$$\varphi(v, w) = \langle x^T, y^T \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

em que $[v]_\delta = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[w]_\delta = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ são as coordenadas na base δ de v e w

respectivamente.

Demonstração. Conhecidas as coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n de v , na base δ , temos $v = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ e, pela linearidade de $\varphi(\cdot, w)$,

$$\varphi(v, w) = \varphi(x_1u_1 + \dots + x_nu_n, w) = x_1\varphi(u_1, w) + \dots + x_n\varphi(u_n, w) = \sum_{j=1}^n x_j\varphi(u_j, w).$$

Analogamente, sendo $w = y_1u_1 + \dots + y_nu_n$ e $\varphi(u_j, \cdot)$ uma função linear, tem-se

$$\varphi(u_j, w) = \varphi(u_j, y_1u_1 + \dots + y_nu_n) = y_1\varphi(u_j, u_1) + \dots + y_n\varphi(u_j, u_n) = y_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

pois a base é ortonormal; ou seja, $\varphi(u_j, u_i) = 0, \forall i \neq j$, e $\varphi(u_j, u_j) = 1, \forall j$. Logo,

$$\varphi(v, w) = \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\varphi(u_j, w)}_{y_j} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \langle x^T, y^T \rangle.$$

□

Observação 6.14. A identificação de qualquer produto interno com o Euclideano, quando fixada base ortonormal, faz com que a nomenclatura usual de um p.i. seja a do Euclideano: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6.1 Transformações autoadjuntas

Considere o contexto de um espaço vetorial real (ou complexo) V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e de uma base ortonormal δ , em relação a esse produto interno. Estudaremos, então, os operadores lineares $T : V \rightarrow V$ que possuem um comportamento simétrico em relação ao produto interno, o que poderá ser traduzido na simetria da matriz de representação.

Definição 6.15. O operador linear $T : V \rightarrow V$ é dito autoadjunto quando

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle, \forall v, w \in V.$$

Lembre que se A é a matriz que representa a T na base δ , $[T]_\delta^\delta$, então

$$[T(v)]_\delta = A \underbrace{[v]_\delta}_x = Ax \quad \text{e} \quad [T(w)]_\delta = A \underbrace{[w]_\delta}_y = Ay$$

em que x e y são as coordenadas de v e de w respectivamente. Então, pela Proposição 6.13,

$$\langle T(v), w \rangle = \langle [T(v)]_\delta^T, y^T \rangle = \langle (Ax)^T, y^T \rangle = x^T Ay$$

e

$$\langle v, T(w) \rangle = \langle x^T, [T(w)]_\delta^T \rangle = \langle x^T, (Ay)^T \rangle = x^T A^T y.$$

Logo, dizer que T é autoadjunto, equivale a dizer que

$$x^T Ay = x^T A^T y, \quad \forall x, y \in M(n, 1) \cong \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T.$$

Resumindo,

Teorema 6.16. T é autoadjunto se, e somente se, $[T]_\delta^\delta$ é simétrica.

O resultado a seguir, conhecido como Teorema Espectral, descreve as principais propriedades dos operadores autoadjuntos em relação aos seus autovalores e autovetores.

Teorema 6.17 (Espectral). *Seja T autoadjunto. Então*

1. *As raízes características são reais.*
2. *Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*
3. *Existe base ortonormal de autovetores de T em V (em particular, T é diagonalizável).*

Demonstração. Seja $T : V \rightarrow V$ autoadjunto. Para provar o item 1) suponha que V seja um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos e que $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, seja um autovalor complexo; fixe então um autovetor unitário $v \in V$, associado a λ , i.e., $T(v) = \lambda v$ e $\|v\| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} a + bi = \lambda &= \lambda \underbrace{\|v\|^2}_1 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \underbrace{\langle T(v), v \rangle}_{T \text{ autoadjunto}} = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2 = \bar{\lambda} = a - bi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \lambda = a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suponha agora, pro item 2., que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ com $v_1, v_2 \in V \setminus \{O_v\}$ e λ_1, λ_2 escalares (reais - vide item 1.) diferentes. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \underbrace{\langle T(v_1), v_2 \rangle}_{T \text{ autoadjunto}} = \langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

A demonstração do item 3. é de maior complexidade. Consideraremos aqui apenas o caso mais simples em que V é um espaço de dimensão dois, situação em que a matriz simétrica que representa T numa base ortonormal é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, com a , b e c reais quaisquer. O polinômio característico de A é

$$p(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+c)x + (ac-b^2),$$

cujo discriminante verifica

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Assim, $\Delta = 0$ se, e somente se, $b = 0$ e $a = c$; ou seja $A = cI$, que é obviamente diagonal (e $T(v) = cv$ tem c como único autovalor; porém, seu autoespaço $V_c = V$ é todo o espaço e assim diagonalizável inclusive admitindo a própria base ortonormal δ como base de autovetores). Em qualquer outro caso, $b \neq 0$ ou $a \neq c$, $\Delta > 0$ e, conseqüentemente, $p(x)$ possui duas raízes reais diferentes; dois autovalores diferentes em dimensão dois implicam a existência de dois autovetores linearmente independentes (e ortogonais pois T é autoadjunto); normalizando esses autovetores obtém-se a base ortonormal de auto-vetores desejada. \square

Exemplo 6.18. O operador linear $T(x, y) = (x+2y, 2x+3y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é diagonalizável. De fato, na base natural $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , que é ortonormal em relação ao produto interno Euclidiano, a matriz que representa T é $A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, que é simétrica; logo, T é autoadjunto e assim, diagonalizável. Para efetuar a diagonalização, de fato, calculemos seus autovalores e autovetores:

$$p_A(x) = x^2 - (1+3)x + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = (4 \mp \sqrt{16+4})/2 = 2 \mp \sqrt{5}.$$

Fixando $\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 - (2 - \sqrt{5}) & 2 \\ 2 & 3 - (2 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x \Rightarrow \overbrace{v_1 = (2, 1 - \sqrt{5})}^{\text{por exemplo}}.$$

Para obter um autovetor associado a v_2 não é necessário re-fazer todas as contas pois, tratando-se de um operador autoadjunto, v_2 é ortogonal a v_1 ; ou seja, $v_2 = (x, y)$ verifica a equação linear

$$0 = \langle v_1, v_2 \rangle = 2x + (1 - \sqrt{5})y \Rightarrow x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}y \Rightarrow \overbrace{v_2 = (1 - \sqrt{5}, -2)}^{\text{por exemplo}}.$$

A base $\{v_1, v_2\}$ obtida já ortogonal e de autovetores porém, não é ortonormal posto que $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \neq 1$. Basta então normalizar para obter a base ortonormal procurada:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}(2, 1 - \sqrt{5}), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}(1 - \sqrt{5}, -2).$$

□

Obviamente, assim como nem toda matriz é simétrica nem todo operador linear é auto-adjunto; define-se então, associado a T , o *operador adjunto* de T , T^* , cuja matriz de representação na base ortonormal seja, exatamente, a matriz transposta da matriz de representação de T nessa mesma base; logo, se $A = [T]_\delta^\delta$ então,

$$[T^*(v)]_\delta = A^T[v]_\delta, \quad \text{e} \quad \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle, \forall v, w \in V.$$

Em particular, T é auto-adjunto quando $T^* = T$.

6.2 Transformações ortogonais

Nesta seção, discutimos a classe de operadores lineares $T : V \rightarrow V$ cujos inversos podem ser obtidos pelo cálculo do adjunto; ou seja, $T^* = T^{-1}$; o que, em termos de matrizes, significa: A tais que $A^{-1} = A^T$.

Definição 6.19. Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear e δ uma base ortonormal no espaço vetorial V munido de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que T é ortogonal quando $A = [T]_\delta^\delta$ for ortogonal, ou seja,

$$A^T A = I = A A^T.$$

Note que se as linhas de A são representadas pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n então, $A A^T$ coincide com a matriz de Gram associada a ditos vetores, $G = [\langle v_i, v_j \rangle]_{n \times n}$; logo, dizer que A é ortogonal equivale a dizer que

$$G = I \Leftrightarrow [\langle v_i, v_j \rangle]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j, \\ 1, & \forall i = j. \end{cases}$$

Ou seja, A é ortogonal se, e somente se, suas linhas formam um sistema ortonormal de vetores em \mathbb{R}^n .

Observe ainda que a condição $I = A A^T$ implica $(\text{Det}(A))^2 = 1$; ou seja, $\text{Det}(A) = \pm 1 \neq 0$ e, assim, A é inversível e $A^{-1} = A^T$, em particular, a condição $I = A A^T$ implica $A^T A = I$ e, vice-versa. Desta forma, também é possível afirmar que A é ortogonal se, e somente se, suas colunas formam um sistema ortonormal de vetores em \mathbb{R}^n . Resumindo,

Teorema 6.20. $A_{n \times n}$ é uma matriz ortogonal se, e somente se, $A^{-1} = A^T$ se, e somente se, suas linhas (colunas) formam um sistema ortonormal em relação ao produto interno Euclidiano de \mathbb{R}^n . Mais ainda, se A é ortogonal então, $\text{Det}(A) = -1$ ou $\text{Det}(A) = 1$.

Exemplo 6.21. São ortogonais a matriz identidade,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

Em geral, supondo que V seja munido de um produto interno, da norma induzida por esse produto e, de uma base ortonormal, podem-se enunciar as propriedades a seguir relativas a operadores lineares $T : V \rightarrow V$ ortogonais.

Teorema 6.22. As seguintes afirmações sobre a transformação linear $T : V \rightarrow V$ são equivalentes:

- (a) T é ortogonal.
- (b) T transforma base ortonormal em base ortonormal.
- (c) T preserva o produto interno.
- (d) T preserva a norma.

Demonstração. Seja $\delta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal em relação ao p.i. $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ de V e A , a matriz que representa T nessa base. Então,

$$A = [T]_{\delta}^{\delta} = [[T(v_1)]_{\delta} \ [T(v_2)]_{\delta} \ \cdots \ [T(v_n)]_{\delta}]$$

e T é ortogonal se, e somente se, A é ortogonal (veja a definição); isto é,

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle_v = \langle [T(v_i)]_{\delta}, [T(v_j)]_{\delta} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j, \\ 1, & \forall i = j; \end{cases}$$

ou seja, $\gamma = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ também é um sistema ortonormal com n elementos no espaço vetorial V de dimensão n ; e assim, uma base ortonormal em V . Logo, (a) e (b) são afirmações equivalentes. Vejamos agora que (c) e (d) também são afirmações equivalentes: Se T preserva o produto interno e $v \in V$ então,

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \implies \|T(v)\| = \|v\|.$$

Por outro lado, lembrando que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad \text{e} \quad \|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

podemos escrever

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v \rangle \quad \text{e, analogamente,} \quad \|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)-T(v)\|^2 = 4\langle T(u), T(v) \rangle$$

logo, se T preserva a norma e $u, v \in V$ então,

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= \frac{1}{4} (\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2) \quad \text{T linear} \\ &= \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \frac{1}{4} (4\langle u, v \rangle) \\ &= \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Falta então provar que $((a) \equiv (b)) \Leftrightarrow ((c) \equiv (d))$. Provaremos agora que $(a) \implies (c)$:

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle_v &= \langle [T(u)]_\delta, [T(v)]_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle A[u]_\delta, A[v]_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= (A[u]_\delta)^T A[v]_\delta = [u]_\delta^T \underbrace{A^T A}_I [v]_\delta = [u]_\delta^T [v]_\delta \\ &= \langle [u]_\delta, [v]_\delta \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, v \rangle_v. \end{aligned}$$

Por último, $(c) \implies (a)$: se $\delta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal então $\gamma = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ também é um sistema ortonormal dado que

$$\|T(v_i)\| = \|v_i\| = 1 \quad \text{e} \quad \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad j \neq i, \quad i = 1, \dots, n;$$

ou seja, T transforma base ortonormal em base ortonormal (item (b)) e, assim, também vale (a). \square

6.3 Exercícios: Espaços Vetoriais com Produto Interno.

Q 6.1. Verifique que $(1/3, -2/3, -2/3)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$ e $(2/3, 2/3, -1/3)$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 relativamente ao produto interno padrão.

Q 6.2. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ como

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

1. Prove que φ é um produto interno em \mathbb{R}^2 .
2. Mostre que $(1, 0)$ e $(2, -1)$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^2 relativamente a φ .
3. Prove que $u = (-2/5, 3/5)$ é unitário em relação a φ e ache um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{u, v\}$ seja uma base ortonormal em \mathbb{R}^2 relativa a φ .

Q 6.3. Quais das seguintes funções definem produtos internos em \mathbb{R}^2 ($x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$):

- a) $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$
- b) $\psi(x, y) = x_1^2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + y_1^2$
- c) $\xi(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$

Q 6.4. Dada a base $(2, 0, 1)$, $(3, -1, 5)$ e $(0, 4, 2)$ de \mathbb{R}^3 , construa, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal relativamente ao produto interno padrão. Calcule a fórmula da projeção sobre $V_2 = \text{vet}\{y_1, y_2\}$, com y_1 e y_2 ortogonais em \mathbb{R}^2 .

Q 6.5. Seja $V = M(n, m)$. Mostre que $\langle A, B \rangle = \text{Traço}(A^T B)$ define um produto interno em V .

Q 6.6. Mostre que se T é auto-adjunto então seus autovalores são reais¹.

Q 6.7. Mostre que $T_{A^T A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é auto-adjunto qualquer que seja a matriz real $A_{n \times n}$.

Q 6.8. Ache as matrizes ortogonais que diagonalizam cada uma das matrizes a seguir

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¹Entenda-se que V é um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} , caso em que o produto interno é antissimétrico; ou seja, $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ “complexo conjugado”.

Q 6.9. Uma transformação ortogonal é dita própria se $\text{Det}([T]_{\beta}^{\beta}) = 1$, em que β é uma base ortonormal em V ; e, imprópria se $\text{Det}([T]_{\beta}^{\beta}) = -1$. Mostre que se $T = T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ então } T \text{ é própria.}$$

a) Mostre que $\lambda = 1$ é autovalor de T .

b) Mostre que se v é um autovetor unitário associado a $\lambda = 1$ então $E = \{tv; t \in \mathbb{R}\}$ é invariante por T (E é dito eixo de rotação de T). Calculado v , determine um vetor x que seja ortogonal a v e unitário. Obtenha então os vetores: $T(x)$, $T^2(x) = T(T(x))$, $T^3(x)$, \dots . O que observa?

Q 6.10. Seja $\alpha = \{w_1, w_2, w_3\}$ base de V , onde V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam

$$[u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad [v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\langle u, v \rangle = 2$, a base é ortonormal ?

Q 6.11. Ache os valores para x e y tais que a matriz, a seguir, seja ortogonal:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q 6.12. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}.$$

1. Mostre que os auto-valores são a , $b + c$ e $b - c$.

2. Ache uma base de auto-vetores.

Q 6.13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz, em relação à base canônica, é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exiba uma base ortonormal de autovetores.

Q 6.14. Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, i.e.,

$$\|Tu - Tv\| = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

6.3.1 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: 13/97; 3/98; 9 e 12/2000; 5/2002; 5/2004; 2/2005; 1-(0-2,4), 2 e 9/2006; 4/2008; 6/2014; 4/2016; 12-(0-3)/2018; 13/2019

6.4 Gabarito: Espaços Vetoriais com Produto Interno.

Q 6.1. Sejam $v_1 = (1/3, -2/3, -2/3)$, $v_2 = (2/3, -1/3, 2/3)$ e $v_3 = (2/3, 2/3, -1/3)$. Então,

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1 \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot -1}{3 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{-4}{9} = \frac{0}{9} = 0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot -1}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9} + \frac{-4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{0}{9} = 0 \\ \langle v_2, v_2 \rangle &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1 \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{-1 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot -1}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} + \frac{-2}{9} + \frac{-2}{9} = \frac{0}{9} = 0 \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1\end{aligned}$$

Ou seja, são dois a dois ortogonais e de norma um; logo, um sistema ortonormal com três vetores linearmente independentes e, assim, também, uma base em \mathbb{R}^3 . \square

Q 6.2. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ como

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

1. Prove que φ é um produto interno em \mathbb{R}^2 .

Solução. Seja $y = (a, b)$ um vetor qualquer fixado. Então,

$$\varphi(x, (a, b)) = x_1a + 2x_1b + 2x_2a + 5x_2b = (a + 2b)x_1 + (2a + 5b)x_2$$

é obviamente linear em x . De forma análoga, fixando $x = (c, d)$ tem-se

$$\varphi((c, d), y) = cy_1 + 2cy_2 + 2dy_1 + 5dy_2 = (c + 2d)y_1 + (2c + 5d)y_2,$$

que é linear em y . Ou seja, φ é um função bi-linear. Além disso, φ é simétrica. De fato,

$$\varphi(y, x) = y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2 = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = \varphi(x, y).$$

Por último,

$$\varphi(x, x) = x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

e

$$\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 \Leftrightarrow x = (0, 0).$$

\square

2. Mostre que $(1, 0)$ e $(2, -1)$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^2 relativamente a φ .

Solução.

$$\begin{aligned}\varphi((1, 0), (1, 0)) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ \varphi((1, 0), (2, -1)) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1(-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0(-1) = 0 \\ \varphi((2, -1), (2, -1)) &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2(-1) + 2(-1) \cdot 2 + 5(-1)(-1) = 1\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|(1, 0)\|_\varphi = 1 = \|(2, -1)\|_\varphi \quad \text{e} \quad (1, 0) \perp_\varphi (2, -1).$$

□

3. Prove que $u = (-2/5, 3/5)$ é unitário em relação a φ e ache um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{u, v\}$ seja uma base ortonormal em \mathbb{R}^2 relativa a φ .

Solução. Note que

$$\varphi(u, u) = (u_1 + 2u_2)^2 + u_2^2 \Big|_{u=(-2/5, 3/5)} = \left(\frac{-2}{5} + 2\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1.$$

Assim,

$$\|u\|_\varphi = \sqrt{\varphi(u, u)} = \sqrt{1} = 1.$$

Para achar um vetor $y = (y_1, y_2)$ ortogonal a u basta resolver a equação

$$\begin{aligned}0 &= \varphi(u, y) = u_1 y_1 + 2u_1 y_2 + 2u_2 y_1 + 5u_2 y_2 = \left(\frac{-2}{5} + 2\frac{3}{5}\right) y_1 + \left(2\frac{-2}{5} + 5\frac{3}{5}\right) y_2 \\ &= \frac{4}{5} y_1 + \frac{11}{5} y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{-4}{11} y_1, \quad \text{por exemplo, } y = (11, -4).\end{aligned}$$

Logo, normalizando, obtém-se um vetor unitário e ortogonal a u como desejado

$$v = \frac{1}{\|y\|_\varphi} y = \frac{1}{\sqrt{(11 + 2(-4))^2 + (-4)^2}} (11, -4) = \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} (11, -4) = \frac{1}{5} (11, -4)$$

□

Q 6.3. a) sim, b) não e c) não.

Q 6.4. Consulte a Observação 6.12.

Q 6.5. Sejam $V = M(n, m)$, $A_1, A_2 \in V$ e α_1, α_2 escalares. Então

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B \rangle &= Tr(B^T[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2]) = Tr(\alpha_1 B^T A_1 + \alpha_2 B^T A_2) \\ &= Tr(\alpha_1 B^T A_1) + Tr(\alpha_2 B^T A_2) = \alpha_1 Tr(B^T A_1) + \alpha_2 Tr(B^T A_2) \\ &= \alpha_1 \langle A_1, B \rangle + \alpha_2 \langle A_2, B \rangle.\end{aligned}$$

O que mostra que $\langle \cdot, B \rangle$ é linear. De forma análoga obtemos a linearidade de $\langle A, \cdot \rangle$. A simetria é imediata pois

$$\langle B, A \rangle = Tr(A^T B) = Tr([A^T B]^T) = Tr(B^T [A^T]^T) = Tr(B^T A) = \langle A, B \rangle.$$

Observe agora que identificando os vetores coluna de $A = [a_{ij}]$ por $a_{(\cdot)1}, a_{(\cdot)2}, \dots, a_{(\cdot)n}$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle A, A \rangle = Tr(A^T A) &= Tr \left(\begin{bmatrix} a_{(\cdot)1} \\ a_{(\cdot)2} \\ \vdots \\ a_{(\cdot)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{(\cdot)1} & a_{(\cdot)2} & \cdots & a_{(\cdot)n} \end{bmatrix} \right) \\ &= Tr \left(\begin{bmatrix} \langle a_{(\cdot)1}, a_{(\cdot)1} \rangle & \langle a_{(\cdot)1}, a_{(\cdot)2} \rangle & \cdots & \langle a_{(\cdot)1}, a_{(\cdot)n} \rangle \\ \langle a_{(\cdot)2}, a_{(\cdot)1} \rangle & \langle a_{(\cdot)2}, a_{(\cdot)2} \rangle & \cdots & \langle a_{(\cdot)2}, a_{(\cdot)n} \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle a_{(\cdot)n}, a_{(\cdot)1} \rangle & \langle a_{(\cdot)n}, a_{(\cdot)2} \rangle & \cdots & \langle a_{(\cdot)n}, a_{(\cdot)n} \rangle \end{bmatrix} \right) \\ &= \langle a_{(\cdot)1}, a_{(\cdot)1} \rangle + \langle a_{(\cdot)2}, a_{(\cdot)2} \rangle + \cdots + \langle a_{(\cdot)n}, a_{(\cdot)n} \rangle \\ &= \|a_{(\cdot)1}\|^2 + \|a_{(\cdot)2}\|^2 + \cdots + \|a_{(\cdot)n}\|^2 \geq 0 \quad \text{e} \\ \langle A, A \rangle = 0 &\Leftrightarrow 0 = \|a_{(\cdot)j}\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \\ &\Leftrightarrow A = [0]_{n \times n}.\end{aligned}$$

Q 6.6. Vide Teorema 6.17.

Q 6.7. A matriz B que representa $T_{A^T A}$ na base canônica de \mathbb{R}^n é exatamente $A^T A$, assim,

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

ou seja, B é uma matriz simétrica e, conseqüentemente, $T_B = T_{A^T A}$ é auto-adjunto. \square

Q 6.8.

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix},$$

respectivamente

Q 6.9. As linhas de A formam um sistema ortonormal e $\text{Det}(A) = 1$; logo, T_A é própria.

a) $Ax = 1 \cdot x$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} x = 7x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 0 \wedge x_1 = 2x_2.$$

Então, $\lambda = 1$ é autovalor de T e $u = (2, 1, 0)$ é gerador do autoespaço associado.

b) Suponha agora que v seja um autovetor unitário associado a $\lambda = 1$ e $w = t \cdot v$, $t \in \mathbb{R}$. Então

$$T(w) = tT(v) = t(1 \cdot v) = tv = w \in E = \{t v; t \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, E é invariante por T . No caso, v poderia ser o vetor

$$v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{4+1}}(2, 1, 0) = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 1, 0).$$

E um vetor x que seja ortogonal a v e unitário deve satisfazer

$$0 = \langle v, x \rangle = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x_1 + x_2) \wedge 1 = \langle x, x \rangle \Rightarrow x_2 = -2x_1 \wedge x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Por exemplo, $x = (0, 0, 1)$ ou $x = (t, -2t, \sqrt{1-5t^2})$, $|t| \leq \sqrt{5}/5$, entre outros. Na verdade,

$$v^\perp = \text{Vect}\{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\} = \{(t, -2t, s); t, s \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{\sqrt{5t^2 + s^2}}(t, -2t, s).$$

Q 6.10. Não. Se a base fosse ortonormal teríamos $\langle u, v \rangle = 0$, que não é o caso, pois $\langle u, v \rangle = 2(5) + (-1)2 + 3(-3) = -1$. Ou seja, a base não é ortonormal.

Q 6.11. Sendo ortogonal seus vetores coluna formam um sistema ortonormal. Assim, $x^2 + (-1)^2 = 1$, $y^2 + 0^2 = 1$ e $xy + (-1)(0) = 0$. Então, $x = 0$ e $y = \pm 1$.

Q 6.12. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}.$$

1. Mostre que os auto-valores são a , $b + c$ e $b - c$.

Solução. Calculando o polinômio característico obtemos

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \text{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 0 & b-x & c \\ 0 & c & b-x \end{vmatrix} = (a-x) \begin{vmatrix} b-x & c \\ c & b-x \end{vmatrix} \\ &= (a-x) [(b-x)^2 - c^2] = (a-x) (|b-x| - |c|) (|b-x| + |c|) \\ &= 0? \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad b-x = \pm c. \end{aligned}$$

2. Ache uma base de auto-vetores.

Solução. Obtenção de V_a :

$$\begin{aligned} [A - aI]v = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c \\ 0 & c & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow v_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2, v_3; \quad \begin{bmatrix} b-a & c \\ c & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

levando em consideração os casos em que $a = b$, $a \neq b$ e $c = 0$ ou $c \neq 0$. De forma análoga podemos obter os autoespaços associados a $b - c$ e $b + c$. Com certeza a base de autovetores pode ser obtida pois A é simétrica, representando um operador autoadjunto.

Q 6.13. Os autovalores são -9 e 3 , com multiplicidade dois, e os autovetores associados, pela ordem, podem ser escolhidos como sendo $(1, -2, -1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, -1)$ já formando um sistema ortogonal pois T é autoadjunto. Normalizando obtemos a base ortonormal

$$\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, -1), \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1), \quad \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1).$$

Q 6.14. Lembre que toda transformação ortogonal preserva a norma; em particular, $\|(u - v)\| = \|T(u - v)\|$. O resultado segue da linearidade de T : $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

6.4.1 Questões da ANPEC

ANPEC (1997 Q13). Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Julgue as afirmativas abaixo:

V (0) Se A^t é a transposta de A , então $\det(A^t A) \geq 0$.

Solução. $\det(A^t A) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = \det^2(A) \geq 0$.

V (1) Se A é simétrica e não-singular, então A^{-1} é simétrica.

Solução. Temos que $A^T = A$ e que existe A^{-1} . Lembrando que $[A^T]^{-1} = [A^{-1}]^T$ obtemos

$$[A^{-1}]^T = [A^T]^{-1} = A^{-1}$$

F (2) O espaço gerado pelas colunas de B é igual ao espaço gerado pelas suas linhas.

Solução. Considere, por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$\text{Vet}\{(1, 0), (2, 0)\} = \text{Vet}\{(1, 0)\} = \mathbb{R} \times \{0\} \neq \text{Vet}\{(1, 2), (0, 0)\} = \text{Vet}\{(1, 2)\}.$$

V (3) Se A é simétrica, então A define um operador linear autoadjunto em relação a uma base ortonormal.

Solução. Caracterização de operadores autoadjuntos (em dimensão finita).

ANPEC (1998 Q3).) Uma matriz A, quadrada de dimensão n é dita ortogonal quando $A^t A = A A^t = I_n$, onde o superescrito t denota transposição e I_n é a identidade de dimensão n. Considere uma matriz ortogonal A de ordem n. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações (sobre A) abaixo:

V (0) O valor absoluto do seu determinante é igual a um.

Solução. $1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det^2(A)$.

V (1) $A^{-1} = A^t$.

Solução. Vide a definição de matriz inversa.

V (2) Suas colunas constituem uma base para \mathbb{R}^n .

Solução. Note que $\det(A) \neq 0$ então os n vetores coluna são linearmente independentes. Ou seja, uma base do espaço vetorial n-dimensional \mathbb{R}^n ; inclusive, uma base ortonormal pois $A^t A = I$.

F (3) Se x e y são vetores(coluna) de \mathbb{R}^n tais que $y = Ax$ então o comprimento de y é maior que o comprimento de x.

Solução. Lembre que transformações ortogonais preservam a norma.

F (4) O produto interno de Ax por Ay é igual ao produto interno de x por y multiplicado pelo determinante de A.

Solução. Lembre que transformações ortogonais preservam o produto interno e que o determinante de A pode ser -1.

V (5) Sua inversa e sua transposta são também matrizes ortogonais.

Solução. Basta checar a definição:

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = AA^T = I \quad \text{e} \quad A^{-1}(A^{-1})^T = A^T(A^T)^T = A^T A = I.$$

ANPEC (2000 Q9). Seja T o operador linear cuja matriz na base natural $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

é dada por $\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

V (0) T possui dois autovalores distintos;

Solução. Calculemos as raízes do polinômio característico;

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \begin{vmatrix} 4-x & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4-x & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)[(4-x)(3-x) - 6] = (1-x)(12 - 4x - 3x + x^2 - 6) \\ &= (1-x)(x^2 - 7x + 6) = (1-x)(x-1)(x-6) \\ &= -(x-1)^2(x-6) \implies \\ p_T(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (com mult. 2)} \quad \vee \quad x = 6. \end{aligned}$$

V (1) T é um operador diagonalizável;

Solução (Solução 1). Note que a matriz que representa T na base canônica, que é ortonormal, é simétrica de modo que T é autoadjunto e, pelo Teorema Espectral, podemos concluir que é diagonalizável.

Solução (Solução 2). Precisamos checar se $(x-1)(x-6)$ anula T ?

$$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-6 & 3\sqrt{6}-3\sqrt{6} & 0 \\ -2\sqrt{6}+2\sqrt{6} & 6-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V (2) Existe um autoespaço de dimensão 2 associado ao operador T ;

Solução. Vide (0) e (1). A dimensão de V_1 é 2, caso contrário T não seria diagonalizável.

V (3) Autovetores de T associados à autovalores diferentes são ortogonais;

Solução. T é autoadjunto.

V (4) Os vetores $t(-2, \sqrt{6}, \sqrt{6})$, $t \in \mathbb{R}$, pertencem ao autoespaço de T associado a um dos seus autovalores.

Solução.

$$\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} \implies (-2, \sqrt{6}, \sqrt{6})^T \in V_1.$$

ANPEC (2000 Q12). Sendo V o espaço vetorial de dimensão 3 sobre o corpo \mathbb{R} , munido do produto interno Euclidiano (\cdot) : $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$; $x, y \in V$, define-se uma norma $\|\cdot\|$ pelo produto interno: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, $x \in V$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (0) Se $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto de vetores LI (linearmente independentes) de V , então $\{u_1, u_2, 0\}$ é também LI em V ;

Solução. Note que $0u_1 + 0u_2 + 1 \cdot 0 = 0$ em que $\alpha_3 = 1 \neq 0$.

F (1) Se todos os vetores de V são combinações lineares de $2k+1$ vetores de V (para qualquer k , inteiro positivo) então $2k$ vetores neste espaço são LI;

Solução. Supondo algum $k \in \mathbb{N}$ com dita propriedade, escolha $2k$ vetores incluindo o vetor nulo.

F (2) Se X, Y, Z são vetores LI do espaço vetorial V , então os vetores

$$A = X + 3Z; \quad B = X - \frac{1}{2}Y + Z; \quad C = -X + Y + Z$$

também serão LI em V ;

Solução. Note que

$$2B + C = 2X - Y + 2Z + (-X) + Y + Z = X + 3Z = A.$$

F (3) O ponto $C = (3, -16, 18)$ não pertence à reta que passa pelos pontos $A = (-5, 0, 2)$ e $B = (-4, -2, 4)$;

Solução. A equação vetorial da reta r que passa pelos pontos $A = (-5, 0, 2)$ e $B = (-4, -2, 4)$ pode ser descrita na forma

$$\begin{aligned} r: \quad X &= A + t\vec{AB} = A + t(B - A) = (-5, 0, 2) + t(-4 + 5, -2 - 0, 4 - 2) \\ &= (-5, 0, 2) + t(1, -2, 2), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, $C \in r$ se e somente se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3, -16, 18) = (-5, 0, 2) + t(1, -2, 2) \Leftrightarrow (8, -16, 16) = t(1, -2, 2) \Leftrightarrow t = 1.$$

V (4) Sejam u_1, u_2, v vetores em V tais que $u_1 \cdot v = D_1$, $u_2 \cdot v = D_2$ e o vetor $u_1 - u_2$ é paralelo ao vetor v . Então,

$$\|u_1 - u_2\| = \frac{|D_2 - D_1|}{\|v\|}.$$

Solução. O vetor $u_1 - u_2$ é paralelo ao vetor v então θ , o ângulo entre eles, é 0 ou 2π ; ou seja $|\cos(\theta)| = 1$. Em particular,

$$|\langle u_1 - u_2, v \rangle| = \|u_1 - u_2\| \|v\| |\cos(\theta)| = \|u_1 - u_2\| \|v\| \implies \|u_1 - u_2\| = \frac{|\langle u_1 - u_2, v \rangle|}{\|v\|}.$$

Lembrando agora que o produto interno é bilinear obtemos

$$\langle u_1 - u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle - \langle u_2, v \rangle = D_1 - D_2 \implies |\langle u_1 - u_2, v \rangle| = |D_1 - D_2|.$$

Consequentemente,

$$\|u_1 - u_2\| = \frac{|D_1 - D_2|}{\|v\|} = \frac{|D_2 - D_1|}{\|v\|}.$$

ANPEC (2002 Q5). Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

F (0) Os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ e $(1, 0, 1)$ formam uma base de \mathbb{R}^3 .

Solução. Note que $(1, 2, 1) + (1, 0, 1) = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$, ou também que $0 = \det(A)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V (1) Se S é o espaço vetorial gerado pelos vetores $(1, 2, -1)$ e $(3, 0, 1)$ e T , o espaço vetorial gerado por $(1, 2, 2)$ e $(2, 1, 3)$, então todo vetor que passa pela origem na direção de $(-1, 1, -1)$ pertence à $S \cap T$.

Solução. Seja v um vetor que “passa pela origem na direção de $(-1, 1, -1)$ ”: $v = (0, 0, 0) + t(-1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. Então, $v \in S \cap T$ se, e somente se,

$$v \in S = \{\alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(3, 0, 1); \alpha_i \in \mathbb{R}\} \wedge v \in T = \{\beta_1(1, 2, 2) + \beta_2(2, 1, 3); \beta_i \in \mathbb{R}\}.$$

Lembrando que T e S são espaços vetoriais e, consequentemente, que $S \cap T$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ; logo, fechado pela multiplicação por escalar, basta checar que $v \in S \cap T$ para $t = 1$; i.e., $(-1, 1, -1) \in S \cap T$?

$$\begin{aligned} (-1, 1, -1) \in S \cap T &\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2; (-1, 1, -1) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(3, 0, 1) \\ &\wedge \exists \beta_1, \beta_2; (-1, 1, -1) = \beta_1(1, 2, 2) + \beta_2(2, 1, 3) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2; (-1, 1, -1) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\wedge \exists \beta_1, \beta_2; (-1, 1, -1) = (\beta_1 + 2\beta_2, 2\beta_1 + \beta_2, 2\beta_1 + 3\beta_2) \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -1/2 \quad \wedge \quad \beta_1 = 1, \beta_2 = -1. \end{aligned}$$

V (2) Os vetores $(1, 2, 3)$ e $(4, 1, -2)$ são ortogonais.

Solução. $\langle (1, 2, 3), (4, 1, -2) \rangle = 1(4) + 2(1) + 3(-2) = 4 + 2 - 6 = 0$.

F (3) O sistema de equações lineares $Ax = b$ possui uma infinidade de soluções se, e somente se, a dimensão do subespaço nulo (núcleo) da matriz A , N_A , for diferente de 0 ($\dim N_A \neq 0$).

Solução. Desde que seja compatível.

V (4) O produto AB dos operadores auto-adjuntos A , B é auto-adjunto se, e somente se, $AB = BA$.

Solução. O operador $T = T_{AB}$ é autoadjunto se, e somente se, AB é simétrica, i.e., $AB = (AB)^T$, ou seja, $AB = B^T A^T$. Como T_A e T_B são autoadjuntos, $A^T = A$ e $B^T = B$. Nestas condições AB é autoadjunto se e somente se $AB = BA$.

ANPEC (2004 Q5). Responda V (verdadeiro) ou F (falso):

F (0) Seja A uma matriz 2×2 com $\det(A) = 3$ e $\text{tr}(A) = 4$. Se x e y são seus autovalores, então $x^2 + y^2 > 10$.

Solução. Sendo A uma matriz 2×2 seu polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

e seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Logo,

$$x^2 + y^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \not> 10.$$

F (1) Seja X uma matriz 100×8 com posto igual a 8 e seja I a matriz identidade 100×100 . Então $\text{tr}(I - X(X^T X)^{-1} X^T) = 100 - 8 \times 8 = 36$, em que tr denota o traço da matriz.

Solução. Note que $X^T X$ é uma matriz quadrada de ordem 8 e assim $(X^T X)^{-1}(X^T X)$ é a identidade de ordem 8 (a hipótese sobre o posto garante a existência de $(X^T X)^{-1}$). Então, utilizando propriedades do traço, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(I - X(X^T X)^{-1} X^T) &= \text{tr}(I_{100 \times 100}) - \text{tr} \left(\underbrace{X}_A \underbrace{(X^T X)^{-1} X^T}_B \right) \\ &= 100 - \text{tr} \left(\underbrace{(X^T X)^{-1} X^T}_B \underbrace{X}_A \right) \\ &= 100 - \text{tr}((X^T X)^{-1}(X^T X)) \\ &= 100 - \text{tr}(I_{8 \times 8}) = 100 - 8 = 92. \end{aligned}$$

F (2) Sejam A e B duas matrizes $N \times N$. Se $AB \neq BA$, então $tr(AB) \neq tr(BA)$, em que tr denota o traço da matriz.

Solução. $tr(AB) = tr(BA)$ desde que os produtos AB e BA estejam bem definidos.

F (3) Seja A uma matriz simétrica não-singular definida positiva. Então não necessariamente $tr(A) > 0$, em que tr denota o traço da matriz.

Solução. Sendo definida positiva todos seus autovalores são positivos e consequentemente também a soma deles que é o valor do traço.

V (4) Seja A uma matriz simétrica 2×2 não-singular definida negativa. Então $tr(A) < 0 < det(A)$, em que tr denota o traço da matriz e det seu determinante.

Solução. Sejam λ_i , $i = 1, 2$, os autovalores de A , que são reais pois T_A é autoadjunto. Como A é definida negativa $\lambda_i < 0$, $\forall i$. Consequentemente,

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \quad e \quad det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

ANPEC (2005 Q2-(0,1,2,4)). Avalie as afirmativas:

V (0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear auto-adjunto. A matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{R}^4 é simétrica.

Solução. A base canônica é ortonormal. Aplique então a definição/caraterização de autoadjuntos.

V (1) Se uma matriz $n \times n$ A é ortogonal, então $A'A = I$, em que I é a matriz identidade de ordem n .

Solução. Vide a definição de matriz ortogonal.

V (2) A matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

Solução. Note que as linhas (colunas) de A formam um sistema ortonormal ou, simplesmente, efetue AA^T e $A^T A$ comparando com a identidade (vide a definição de matriz ortogonal), que no caso se reduz a checar se $A^2 = I$ posto que $A^T = A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V (4) Os vetores $w_1 = (1, -1, 0, 1)$, $w_2 = (2, 4, 3, 2)$ e $w_3 = (-4, 3, -6, 7)$ são ortogonais.

Solução. Efetuemos os produtos internos:

$$\begin{aligned}\langle (1, -1, 0, 1), (2, 4, 3, 2) \rangle &= 1(2) - 1(4) + 0(3) + 1(2) = 0 \implies w_1 \perp w_2 \\ \langle (1, -1, 0, 1), (-4, 3, -6, 7) \rangle &= 1(-4) - 1(3) + 0(-6) + 1(7) = 0 \implies w_1 \perp w_3 \\ \langle (2, 4, 3, 2), (-4, 3, -6, 7) \rangle &= 2(-4) + 4(3) + 3(-6) + 2(7) = 0 \implies w_2 \perp w_3.\end{aligned}$$

ANPEC (2006 Q1-(0,1,2,4)). Avalie as afirmativas abaixo. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

V (0) Os autovalores de A são 1 e -1 .

Solução. O polinômio característico de A é $p_A(x) = x^2 - (0)x + (0 - 1) = x^2 - 1$. Logo,

$$p_A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

V (1) O vetor $(1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor 1 e o vetor $(-1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor -1 .

Solução. Note que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F (2) A matriz A não é ortogonal.

Solução. Observe, por exemplo, que os vetores linha de A formam um sistema ortogonal.

V (4) Qualquer vetor (x, y) é combinação linear dos autovetores de A .

Solução. Note que A é diagonalizável.

ANPEC (2006 Q9). Avalie as afirmativas. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

F (0) Os autovalores de A são 1 e 2.

Solução. O polinômio característico de A é

$$p_A(x) = x^2 - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16}\right) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Os autovalores de A são as raízes deste polinômio:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

V (1) Os vetores $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são autovetores da matriz A .

Solução. Basta checar se $Av = \lambda v$:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 + 1/4 \\ -1/4 + 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/4 \\ 2/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 + 1/4 \\ 1/4 + 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/4 \\ 4/4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

concluindo que $(-1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor $1/2$ e $(1, 1)$ é autovetor associado ao autovalor 1 .

V (2) Seja A^k o produto de A por si mesma k vezes. Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Solução. Na resolução do item (0) vimos que $A_{2 \times 2}$ possui dois autovalores distintos $1/2$ e 1 então existe P não singular tal que $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(1/2, 1)$ e $A^k = PD^kP^{-1}$ (vide a questão a seguir 5.5.3 para formalizar este exercício²). Mais ainda, P é a matriz diagonalizante $P = [I]_{\alpha}^{\beta}$ onde α é a base canônica e β , a de autovetores. Obtenhamos então a base de autovetores de A em \mathbb{R}^2 :

$$[A - 1/2I]x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1.$$

²Se $B = P^{-1}AP$, caso em que A e B são ditas semelhantes, então para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $B^k = P^{-1}A^kP$.

Assim, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1/2$ é $V_{1/2} = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = -x_1\} = \text{Vet}\{(1, -1)\}$. De forma análoga,

$$[A - 1 \cdot I]x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

e o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ é $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1\} = \text{Vet}\{(1, 1)\}$. Note que A é simétrica de modo que os autovetores associados a estes autovalores distintos são ortogonais; assim, escolhendo autovetores unitários obtemos uma base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2\}$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}(1, -1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}(1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Então

$$P = [I]_{\alpha}^{\beta} = [[u_1]_{\alpha} \ [u_2]_{\alpha}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe que por construção P é ortonormal e assim sua inversa é simplesmente sua transposta. Finalmente,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

V (3) Os vetores $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ também são autovetores.

Solução. Note que $(-2, 2) = 2(-1, 1)$ e $(2, 2) = 2(1, 1)$. Assim eles pertencem aos espaços gerados pelos vetores $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ respectivamente. Do item (1) sabemos que $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são autovetores então $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ estão nos respectivos autoespaços concluindo que $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ também são autovetores.

F (4) A matriz A é nilpotente.

Solução. Note que zero não é autovalor de A , condição necessária para dita propriedade (Vide a questão 5.26).

ANPEC (2014 Q6). Considere a matriz cujas colunas são: $(0, 5, 1, 0)$, $(5, 0, 5, 0)$, $(1, 5, 0, 5)$ e $(0, 0, 5, 0)$. Julgue as seguintes afirmativas:

F (0) A matriz tem pelo menos um autovalor que não é real.

Solução. A matriz em questão é $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Observe que A é simétrica; logo, representa um operador autoadjunto e, assim, todos seus autovalores são reais.

V (1) A soma dos autovalores é zero.

Solução. Do item (0) sabe-se que A é diagonalizável e, em particular, toda raiz característica é autovalor; em particular, se λ_i , $i = 1, \dots, 4$, são os autovalores de A então

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{tr}(A) = 0.$$

V (2) A matriz tem inversa.

Solução. De fato, o determinante de A é diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -5 \cdot 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5^4 \neq 0.$$

F (3) A matriz tem 4 autovalores positivos.

Solução. Impossível; nesse caso a soma seria positiva em contradição com o item (1).

F (4) A matriz tem um autovalor zero.

Solução. Lembrando que o determinante de A é o produto dos autovalores concluímos, do item (2), que nenhum autovalor é igual a zero.

ANPEC (2016 Q4). Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada, cujas entradas são números 0 ou 1 e tal que em cada linha e em cada coluna há exatamente um número 1. Analise a veracidade das seguintes afirmações:

F (0) Soma de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

Solução. A matriz identidade é de permutação; porém, $I + I = 2I$, não é de permutação (entradas 0 e 2).

V (1) Produto de matrizes de permutação da mesma ordem é uma matriz de permutação;

Solução. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{1(\cdot)} \\ a_{2(\cdot)} \\ \vdots \\ a_{n(\cdot)} \end{bmatrix}_{n \times n}$ e $B = [b_{(\cdot)1} \ b_{(\cdot)2} \ \cdots \ b_{(\cdot)n}]_{n \times n}$ matrizes de permutação. Então,

$$AB = [c_{ij}]_{n \times n}; \quad c_{i(\cdot)} = (\langle a_{i(\cdot)}^T, b_{(\cdot)1} \rangle, \langle a_{i(\cdot)}^T, b_{(\cdot)2} \rangle, \dots, \langle a_{i(\cdot)}^T, b_{(\cdot)n} \rangle),$$

sendo que o vetor $a_{i(\cdot)}$ é formado de zero e, apenas, uma entrada 1; digamos que essa entrada seja a k -ésima. Por outro lado, na linha k de B , apenas uma entrada em um e, assim, apenas um dos vetores $b_{(\cdot)1}, b_{(\cdot)2}, \dots, b_{(\cdot)n}$ tem a k -ésima coordenada igual a um. Logo, $c_{ik} = 1$ e $c_{ij} = 0, \forall j \neq k$; ou seja, o vetor $a_{i(\cdot)}$ é formado de zeros e, apenas, uma entrada 1, a k -ésima; e como k é único para i , obtém-se o resultado enunciado.

Solução (2). Uma matriz de permutação resulta de uma quantidade finita de operações elementares de permutação sobre a identidade (vide Definição 3.39); ou seja, se A e B são de permutação, da mesma ordem, então, pela Questão 3.4,

$$A = \epsilon_k(\cdots \epsilon_2(\epsilon_1(I))) \quad \text{e} \quad B = \epsilon_m(\cdots \epsilon_2(\epsilon_1(I)))$$

e, pela Questão 3.4,

$$A = \epsilon_k(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) I \quad \text{e} \quad B = \epsilon_m(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) I \quad \Rightarrow$$

$$AB = \epsilon_k(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) I \epsilon_m(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) I = \epsilon_k(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) \epsilon_m(I) \cdots \epsilon_2(I) \epsilon_1(I) I$$

i.e.,

$$AB = \epsilon_k(\cdots \epsilon_m(\cdots \epsilon_2(\epsilon_1(I))))$$

também resulta de uma quantidade finita de operações elementares de permutação sobre a identidade.

V (2) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação e $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é um vetor qualquer, então Mv e v têm a mesma norma;

Solução. Sendo M uma matriz de permutação, é uma matriz ortogonal. Então, pelo Teorema 6.22-(d), $T_M(x) = Mx$ preserva a norma.

V (3) Seja $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz de permutação e $S = \{[v_1 \cdots v_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}; \sum_{i=1}^n v_i = 1\}$. A transformação linear $T(v) = Mv$ deixa invariante o conjunto S (ou seja, $T(S) \subset S$);

Solução. Seja M uma matriz de permutação; $e = [1]_{n \times 1}$, o vetor coluna com todas as entradas iguais a um; e v , um elemento de S . Então $M^T e = e$, pois M^T também é de permutação e

$$1 = \sum_{i=1}^n v_i = \langle v, e \rangle = \langle v, M^T e \rangle = \langle Mv, e \rangle = \langle T(v), e \rangle \Rightarrow T(v) \in S.$$

F (4) Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação e $M^2 = MM = I$ (matriz identidade), então $M = I$

Solução. Com essa informação tem-se $M^T = M^{-1} = M$; ou seja, M é simétrica mas, não necessariamente, a identidade. Contra-exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ANPEC (2018 Q12-(0-3)). Verifique a veracidade das questões abaixo, considerando que o conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais dotado com o produto interno usual (ou seja, dotado do produto interno $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$):

F (0) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então seu polinômio característico é de segundo grau;

Solução. Note que $\dim(V) = 3$.

V (1) Se os vetores v_1, v_2 e v_3 geram V , e se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear, então a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1), T(v_2)$ e $T(v_3)$;

Solução. Sim, toda base em V , identifica T :

$$T(xv_1 + yv_2 + zv_3) = xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

V (2) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear auto-adjunto, então seus autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais;

Solução. Teorema 6.17-ii).

V (3) Considere $U = \mathbb{R}^2$ como um espaço vetorial e seja $A : V \rightarrow U$ aplicação linear. Neste caso, o núcleo de U^3 tem dimensão maior ou igual a 1;

³Vamos supor que seja núcleo de A e não de U .

Solução. De fato, pelo Teorema 5.17,

$$3 = \dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow \dim(N(T)) \geq 3 - 2 = 1$$

pois $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(U) = 2$.

ANPEC (2019 Q13). Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ como um operador linear em \mathbb{R}^2 e o produto interno entre $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ definido por $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$. Classifique os itens como falsos ou verdadeiros:

F (0) A matriz A não corresponde a um operador ortogonal.

Solução. Vide item (2) ou, simplesmente, prove que as linhas de A formam um sistema ortonormal:

$$\begin{aligned} \langle (\cos(\theta), -\text{sen}(\theta)), (\cos(\theta), -\text{sen}(\theta)) \rangle &= \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1 \\ \langle (\cos(\theta), -\text{sen}(\theta)), (\text{sen}(\theta), \cos(\theta)) \rangle &= \cos(\theta)\text{sen}(\theta) - \text{sen}(\theta)\cos(\theta) = 0 \\ \langle (\text{sen}(\theta), \cos(\theta)), (\text{sen}(\theta), \cos(\theta)) \rangle &= \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1. \end{aligned}$$

? (1) O polinômio característico de A é $\lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta) + 1$ e suas raízes são complexas se $\theta \neq 0$ (ou seja, envolvem uma raiz quadrada de um número negativo).

Solução. Para ordem 2,

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{\text{tr}(A)}_{2\cos(\theta)}\lambda + \underbrace{\text{Det}(A)}_{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)} = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta) + 1,$$

e suas raízes são complexas se, e somente se,

$$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 < 0 \Leftrightarrow \cos^2(\theta) < 1 \Leftrightarrow \theta \neq 0 \vee \theta \neq \pi.$$

V (2) A é uma matriz de rotação, logo, para todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$, temos que se o vetor $u = Av$, então $\|u\| = \|v\|$.

Solução. A é uma matriz de rotação (vide Exemplo 5.11); assim, preserva a norma (é um operador ortogonal - Teorema 6.22).

V (3) Sejam u e v dois vetores com o mesmo comprimento (ou seja, $\|u\| = \|v\|$). Então $u \cdot Au = v \cdot Av$.

⁴A rigor, a afirmação é verdadeira desde que interpretada como: se $\theta \neq 0$ então as raízes são complexas. Porém, se a intenção/leitura na linguagem coloquial for “só se” então a afirmação é falsa (parece que foi esta a interpretação segundo o Gabarito divulgado pela ANPEC).

Solução. A preserva a norma (item (2)) e o ângulo entre u e Au é θ ; assim como o ângulo entre v e Av pois A é uma matriz de rotação em ângulo θ . Então

$$\begin{aligned}u \cdot Au &= \langle u, Au \rangle = \|u\| \cdot \|Au\| \cos(\theta) = \|u\|^2 \cos(\theta) \\ &= \|v\|^2 \cos(\theta) = \langle v, Av \rangle = v \cdot Av.\end{aligned}$$

F (4) Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução. $\cos(\pi/4) = 1 = \sin(\pi/4)$. Então,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 7

Formas Quadráticas.

Seja V um espaço vetorial real munido de produto interno e $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, uma função real. Diz-se que b é uma forma *bilinear* se for linear em cada variável (fixada a outra) e *simétrica*, se $b(u, v) = b(v, u)$, $\forall u, v \in V$. Fixada uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em V define $b_{ij} = b(v_i, v_j)$, $\forall i, j$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, $x = [u]_\beta$ e $y = [v]_\beta$. Então, $v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ e

$$b(u, v) = b(u, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = y_1 b(u, v_1) + \dots + y_n b(u, v_n) = \sum_{j=1}^n y_j b(u, v_j).$$

Substituindo $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ tem-se

$$b(u, v) = \sum_{j=1}^n y_j b(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_j) = \sum_{j=1}^n y_j \left[\sum_{i=1}^n x_i b(v_i, v_j) \right] = \langle y, B^T x \rangle = \langle x, B y \rangle.$$

Ou seja,

$$b(u, v) = [u]_\beta^T B [v]_\beta, \quad \forall u, v \in V.$$

A matriz B é chamada de *Matriz de representação* da forma bilinear b na base β e, representada por $[b]_\beta$. Mais ainda, b é simétrica se, e somente se

$$b(u, v) = b(v, u) \Leftrightarrow x^T B y = \underbrace{y^T B x}_{(y^T B x)^T} = x^T B^T y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow B = B^T,$$

ou seja, no caso, e apenas no caso de B ser uma matriz simétrica.

Exemplo 7.1. Em \mathbb{R}^n o produto interno Euclideano é uma forma bilinear simétrica:

$$b(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Mais ainda, na base canônica de $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , a matriz de representação é a matriz de Gram associada a e_1, \dots, e_n : $[\langle e_i, e_j \rangle]_{n \times n} = I_n$.

Definição 7.2. Associada a uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ define-se a Forma Quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra

$$Q(u) = b(u, u), \quad \forall u \in V, \quad \equiv \quad Q(u) = x^T B x = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j$$

em que $x = [u]_\beta$, $B = [b]_\beta^\beta$ é a matriz simétrica que representa b e β é uma base ortonormal em V .

Note que, necessariamente, $b_{ij} = b_{ji}$, pois B é simétrica; assim,

$$Q(u) = x^T B x = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2 \sum_{j>i, i=1}^n b_{ij} x_i x_j.$$

Exemplo 7.3. No caso da forma bilinear simétrica do produto interno Euclideano em \mathbb{R}^n , a forma quadrática associada é a função $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$Q(x) = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Exemplo 7.4. $Q(x) = x_1^2 - 18x_1x_2 + 5x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é uma forma quadrática com matriz de representação, na base canônica, $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$.

Proposição 7.5. Se $Q(u) = b(u, u)$ é a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ então

$$b(u, v) = \frac{1}{4} [Q(u + v) - Q(u - v)], \quad \forall u, v \in V.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} Q(u + v) &= b(u + v, u + v) = b(u + v, u) + b(u + v, v) \\ &= b(u, u) + b(v, u) + b(u, v) + b(v, v) \\ &= Q(u) + 2b(u, v) + Q(v). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$Q(u - v) = Q(u) - 2b(u, v) + Q(v).$$

Logo,

$$Q(u + v) - Q(u - v) = 4b(u, v).$$

□

Observação 7.6. A proposição acima garante a possibilidade de recuperar a forma bilinear a partir da forma quadrática e, em particular, permite determinar $B = [b]_\beta^\beta$ pois

$$b_{ij} = b(v_i, v_j) = \frac{1}{4} [Q(v_i + v_j) - Q(v_i - v_j)], \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A seguir mostramos que os termos com os produtos cruzados $x_i x_j$, $i \neq j$, na Definição 7.2 de uma forma quadrática, podem ser eliminados com uma mudança de variáveis apropriada e, conseqüentemente, nessa nova variável y , a representação da forma quadrática só possui termos do tipo quadrático $\lambda_i y_i y_i = \lambda_i y_i^2$.

Teorema 7.7 (Eixos principais). *Seja $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática com matriz de representação $B = [Q]_\beta$ na base ortonormal β do espaço vetorial V munido de produto interno. Então, existe uma base ortonormal γ de autovetores de B em V tal que, para cada $u \in V$,*

$$Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \text{em que} \quad y = [u]_\gamma$$

e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de B .

Demonstração. Sabe-se que $Q(u) = x^T B x$ em que $x = [u]_\beta$ e que B representa um operador auto-adjunto, pois B é simétrica, e, assim, B é ortogonalmente diagonalizável; isto é, existe uma base ortonormal γ de autovetores de B em V tal que a matriz de mudança de base $P = [I]_\beta^\gamma$ é ortogonal e $P^{-1} B P = D$ é a matriz diagonal com os autovalores de B , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Logo,

$$y = [u]_\gamma = [I]_\gamma^\beta [u]_\beta = P^{-1} x = P^T x, \quad B = P D P^T$$

e

$$Q(u) = x^T B x = x^T (P D P^T) x = (P^T x)^T D (P^T x) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

□

7.1 Formas Quadráticas em \mathbb{R}^n .

Fixemos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$, munido do produto interno Euclideano e da base canônica $\alpha = \{e^1, \dots, e^n\}$ em que $e^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e^n = (0, \dots, 0, 1)$, que é uma base ortonormal. Uma função $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $Q(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, onde b_{ij} são reais fixados e os índices i e j percorrem os números $1, 2, \dots, n$, é, então, uma Forma Quadrática desde que $b_{ij} = b_{ji}$, $\forall i, j$. Obviamente, definindo $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ e identificando $x = [x]_\alpha$ (vetor coluna) obtemos

$$Q(x) = x^T B x = \langle x, B x \rangle = \langle B x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

pois B é simétrica (representando um operador autoadjunto).

7.1.1 Classificação

Definição 7.8. A forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita não negativa definida quando $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Se ainda, $Q(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, diz-se que é positiva definida. De forma análoga, trocando as desigualdades, define-se não positiva e negativa definida respectivamente. Se existirem $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $Q(x) < 0$ e $Q(y) > 0$ então a forma quadrática é dita indefinida.

Observe que fixada uma matriz quadrada A , ordem n , de números reais e simétrica temos uma forma quadrática associada: $\langle Ax, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ (identificados com vetores colunas). Assim, classifica-se uma matriz simétrica em semidefinida positiva, definida positiva, semidefinida negativa, definida negativa ou indefinida quando a forma quadrática associada for não negativa definida, negativa definida, não positiva definida, negativa definida ou indefinida respectivamente.

Exemplo 7.9. Classifique a forma quadrática $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Logo, Q é não-negativa definida. Note ainda que $Q(x) = 0$ se e somente se $(x_1 - 2x_2) = 0 = x_2 \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 \Leftrightarrow x = (0, 0)$. Então, Q é positiva definida. Observe agora que

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

Ou seja, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa Q na base canônica de \mathbb{R}^2 . Assim, A é definida positiva.

Teorema 7.10. *Sejam A , a matriz simétrica que representa a forma quadrática Q e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, os autovalores de A . Então Q (e A) é*

1. não-negativa definida se e somente se $\lambda_i \geq 0 \forall i$;
2. positiva definida se e somente se $\lambda_i > 0 \forall i$;
3. não-positiva definida se e somente se $\lambda_i \leq 0 \forall i$;
4. negativa definida se e somente se $\lambda_i < 0 \forall i$;
5. indefinida se e somente se existem i e j tais que $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$.

Demonstração. Aplique o Teorema dos eixos principais para escrever

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

em que $y = [x]_\gamma$ e γ é a base ortonormal de autovetores de A

□

Exemplo 7.11. Voltando ao exemplo acima em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, calculemos seus autovalores:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1 \\ \implies p_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2} \\ \implies \lambda_1, \lambda_2 &> 0. \end{aligned}$$

Confirmando que A é definida positiva.

7.1.2 Menores principais de uma matriz

Definição 7.12 (Menores principais -[4] 16.2). Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ a $k \times k$ submatriz quadrada obtida de A eliminando $n - k$ linhas de A e as mesmas $n - k$ colunas de A é chamada de submatriz principal de ordem k e seu determinante, menor principal de ordem k . Quando as linhas (e colunas) eliminadas são exatamente as $n - k$ últimas a submatriz é chamada de *submatriz principal líder de ordem k* e seu determinante é chamado *menor principal líder de ordem k* e denotado Δ_k .

Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Possui uma única submatriz principal de ordem 3, a própria A ; que é também a submatriz líder de ordem 3. Neste caso o menor principal líder de ordem 3 é o próprio determinante de A : $\Delta_3 = \det(A)$. De ordem 2 há três submatrizes principais A_{11} , A_{22} e A_{33} que são as obtidas de A eliminando a linha e coluna 1, 2 e 3 respectivamente. Consequentemente há três menores principais de ordem dois; porém, só um deles é líder: $\Delta_2 = \det(A_{33}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Também há três submatrizes principais de ordem 1, relativas aos elementos da diagonal e apenas uma submatriz principal líder de ordem um: $[a_{11}]$. Neste caso o menor principal líder de ordem um é $\Delta_1 = a_{11}$.

Teorema 7.13. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz simétrica e Δ_k seu menor principal líder de ordem k , $k = 1, \dots, n$. Então,*

- A é definida positiva se e somente se $\Delta_k > 0, \forall k$.*
- A é definida negativa se e somente se $(-1)^k \Delta_k > 0, \forall k$ (i.e., pares positivos e ímpares negativos).*

c) Se existe $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\Delta_{k_0} \neq 0$, mas não encaixa em nenhum dos dois padrões de sinais anteriores a) ou b) então A é indefinida.

Exemplo 7.14. Voltemos mais uma vez ao exemplo acima em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, e calculemos seus menores principais líderes:

$$\Delta_1 = 1 > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$$

re-confirmando que A é definida positiva.

Note que se algum $\Delta_k = 0$ então a matriz não pode ser (positiva ou negativa) definida, mas ainda poderia ser semidefinida. Neste caso os menores principais não líderes completam a análise.

Teorema 7.15. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz simétrica. Então,*

- d) *A é semidefinida positiva se e somente se todos os menores principais (líderes ou não) são não negativos (≥ 0).*
- e) *A é semidefinida negativa se e somente se todo menor principal (líder ou não) de ordem par é não negativo (≥ 0) e todo menor principal (líder ou não) de ordem ímpar é não positivo (≤ 0).*

Exemplo 7.16 (Variância). Considere a possibilidade de investir em três títulos (ações): X_1, X_2, X_3 . Seja σ_i^2 a variância do retorno, e x_i o peso no portfólio (ou cesta) do título X_i , $i = 1, 2, 3$. De modo que $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, e $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Suponha ainda que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ representa a covariância do retorno entre X_i e X_j , $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Então a variância do portfólio com x_1 de X_1 , x_2 de X_2 e x_3 de X_3 , $v(x) = \sigma_p^2$, admite representação na forma

$$v(x) = x^T A x, \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^T = (x_1, x_2, x_3).$$

Então, v é uma forma quadrática.

Exemplo 7.17 (Diferencial de segunda ordem e Hessiana). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2(U)$ no aberto U de \mathbb{R}^n e a , um elemento de U . A Matriz Hessiana de f no ponto a , $Hf(a)$ ou também $\nabla^2 f(a)$, é a matriz quadrada, de ordem n , que possui na linha i , coluna j , a derivada parcial de segunda ordem de f , primeiro na variável i e depois na variável j :

$$Hf(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right].$$

Pelo Teorema de Schwartz, $A = Hf(a)$ é uma matriz simétrica e, assim, representa a forma quadrática:

$$Q(v) = \langle Av, v \rangle = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) v_i v_j$$

que é o diferencial de segunda ordem de f no ponto a . Mais ainda, a Fórmula de Taylor de segunda ordem, com resto infinitesimal, em torno de a diz que

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \frac{1}{2}Q(v) + r(v), \quad \text{com} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0.$$

Logo, se a for um ponto crítico ($\nabla f(a) = 0$) e v estiver numa bola de centro a e raio pequeno o suficiente então

$$f(a+v) - f(a) \approx \frac{1}{2}Q(v)$$

e conhecer o sinal da forma quadrática Q permite identificar se o ponto crítico é ou não um extremo local de f : se Q for definida positiva, a é minimizador local; se for definida negativa é maximizador local e se for indefinida é um ponto de sela.

7.2 Exercícios: Formas Quadráticas.

Q 7.1. Escreva a matriz que representa, na base canônica, cada uma das seguintes formas bilineares

- $x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 - 5x_2y_3,$
- $2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_1y_3 - 2x_2y_2 + 7x_3y_1 + 4x_3y_3,$
- $x_1y_1 - 5x_2y_3 + 2x_3y_3.$

Alguma delas é simétrica?

Q 7.2. Uma forma bilinear é dita anti-simétrica se $b(u, v) = -b(v, u), \forall u, v \in V$

- Cheque se alguma das formas bilineares da questão acima é anti-simétrica.
- Mostre que a única forma bilinear simétrica e anti-simétrica simultaneamente é a nula, i.e., $b(u, v) = 0, \forall u, v \in V.$
- Sejam B_s e B_a os conjuntos das formas simétricas e anti-simétricas respectivamente. Prove que eles são subespaços vetoriais do conjunto de todas as formas bilineares $B.$
- Prove que $B = B_s \oplus B_a.$

Q 7.3. Escreva a matriz simétrica que representa na base canônica cada uma das seguintes formas quadráticas. Verifique que podem ser escritas como produtos matriciais $x^T Ax:$

- $x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2,$
- $2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3,$
- $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3 - 3x_3x_1.$

Identifique, em cada caso, uma base ortonormal de autovetores na qual possam ser escritas na forma

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Classifique-as (em positivas/não-negativas/negativas/não-positivas/indefinidas).

Q 7.4. Determine e classifique a forma quadrática associada a matriz Hessiana de f no ponto dado:

- $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$ no ponto $(x_0, y_0) = (0, 0).$
- $f(x, y) = x^2y^3 + x^2 - y^2,$ no ponto $(x_0, y_0) = (0, 0).$

7.2.1 Questões da ANPEC

Resolva as seguintes questões/ano da ANPEC: Q15/1994, 8-(1-2) e 9-(0,3)/2005, 2-(0-3)/2006, 2-(2,3,4)/2007, Q9-(1)/2011.

7.3 Gabarito: Formas Quadráticas.

Q 7.1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, respectivamente. Nenhuma delas é simétrica?

Q 7.2. a) Nenhuma. b) $b(u, v) = b(v, u) = -b(u, v)$ sse $b(u, v) = 0$. c) A soma e a multiplicação por escalar de formas bilineares ainda é bilinear e não alteram a (anti)simetria. d) $B_s \cap B_a = \{0\}$ (vide item b)) e qualquer forma bilinear b é soma de uma simétrica com uma antissimétrica:

$$b(u, v) = \underbrace{\frac{1}{2}[b(u, v) + b(v, u)]}_{b_s(u, v)} + \underbrace{\frac{1}{2}[b(u, v) - b(v, u)]}_{b_a(u, v)}.$$

Q 7.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 2 & 2 \\ -3/2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, respectivamente. Calcule então seus autovalores.

Q 7.4. 1): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que é definida positiva. 2): $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, que é indefinida.

7.3.1 Questões da ANPEC

ANPEC (1994 Q15). Ache a raiz característica de maior valor positivo da matriz simétrica proveniente da forma quadrática,

$$-x_1^2 + 6x_2x_3 + x_2^2 + 9x_3^2.$$

Solução. Fixando a base canônica de \mathbb{R}^3 , a matriz que representa dita forma quadrática $Q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i>j} b_{ij}x_ix_j$ é

$$B = [b_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 p_B(\lambda) &= \text{Det}(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & 3 & 9 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1 - \lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 9 - \lambda \end{vmatrix} + 0\Delta_{21} + 0\Delta_{31} \\
 &= -(\lambda + 1)[(1 - \lambda)(9 - \lambda) - 9] = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 10\lambda) \\
 &= -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 10) \\
 &= 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 10.
 \end{aligned}$$

Assim, a maior raiz característica é 10.

ANPEC (2005 Q8-(1,2)). Avalie as afirmativas:

V (1) Se uma matriz simétrica $n \times n$ A é idempotente, então para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $v'Av \geq 0$.

Solução. Sendo idempotente seus autovalores são 0 ou 1 (vide questão 5.27), ou seja, os autovalores são não negativos e, conseqüentemente, a forma quadrática associada é não-negativa definida.

F (2) Se uma matriz $n \times n$ A é idempotente, então $\text{tr}(A) \geq n$.

Solução. Considere por exemplo a matriz nula de ordem dois: $O^2 = O$ e $\text{tr}(O) = 0 \not\geq 2$.

Ou também, o exemplo menos trivial $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; que é idempotente mas seu traço é 1, que não é maior ou igual a sua ordem 2.

ANPEC (2005 Q9-(0,3)). Avalie as afirmativas:

F (0) A soma dos quadrados dos autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ é -6 .

Solução. $p_A(x) = x^2 + 9$ não possui raízes reais. Aceitando os corpo dos complexos para o cálculo dos autovalores obtemos $\lambda = \pm 3i$ onde i é o número complexo tal que $i^2 = -1$. Então

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (-3i)^2 + (3i)^2 = 9i^2 + 9i^2 = 18i^2 = -18.$$

V (3) Dada uma matriz $n \times n$ simétrica A , se para todo $v \in \mathbb{R}^n$, não nulo, com n ímpar, $v'Av < 0$, então o determinante de A é negativo.

Solução. Como a forma quadrática associada é negativa definida podemos concluir que todos os autovalores são negativos. Como o determinante é o produto deles (incluindo os repetidos) em quantidade ímpar, o resultado é negativo.

ANPEC (2006 Q2-(0-3)). Avalie as opções

F (0) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que para todo $u, u \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $uAv = -vAu$. Então os autovalores de A são todos negativos.

Solução. Seja λ autovalor e $v = u$, autovetor unitário associado a λ . Então,

$$\lambda = \lambda \langle u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = uAu = -uAu = -\langle u, \lambda u \rangle = -\lambda \langle u, u \rangle = -\lambda \Rightarrow \lambda = 0.$$

V (1) Seja A uma matriz $n \times n$ tal que para todo $u, u \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $uAv = -vAu$. Então todo vetor v é ortogonal à sua imagem por A .

Solução. Note que

$$\langle v, Av \rangle = -\langle v, Av \rangle \Rightarrow 2\langle v, Av \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, Av \rangle = 0 \Rightarrow Av \perp v.$$

V (2) Toda matriz quadrada positiva semi-definida de posto 1 é simétrica.

Solução. Se representa uma forma quadrática (classificável como tal) é simétrica (por definição de F.Q.).

F (3) Toda matriz quadrada simétrica de posto 1 é positiva semi-definida.

Solução. Considere, por exemplo $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

V (4) Seja A uma matriz invertível e A^{-1} sua inversa, então $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$.

Solução. De fato, $A^{-1}A = I$, o determinante do produto é o produto dos determinantes e o determinante da identidade é igual a um.

ANPEC (2007 Q2-(2,3,4)). Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

em que a, b, c são constantes. Julgue os itens abaixo:

F (2) Se a, b, c são constantes negativas, a matriz $A'A$ é definida negativa.

Solução (Solução 1). A matriz simétrica $A^T A$ é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & a^2 + 4 & ab + 2c \\ b & ab + 2c & b^2 + c^2 + 9 \end{bmatrix}$$

que possui os menores principais $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, $\Delta_3 = \det^2(A) = 36 > 0$. Logo, dita matriz é definida positiva.

Solução (Solução 2). Note que A é uma matriz não singular e suponha que λ é autovalor de $A^T A$. Seja v uma vetor unitário tal que $A^T A v = \lambda v$. Então

$$v^T A^T A v = \lambda v^T v \Leftrightarrow [Av]^T Av = \lambda \Leftrightarrow \langle Av, Av \rangle = \lambda.$$

Seja $w = Av$, então $w \neq 0$ pois A é não singular (note que caso contrário o núcleo de A seria não trivial e zero seria autovalor de A resultando em determinante de A igual a zero) e

$$\lambda = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 > 0,$$

ou seja, todo autovalor da matriz simétrica $A^T A$ é positivo demonstrando que é uma matriz definida positiva desde que A não seja singular.

V (3) A matriz $A'A$ e simétrica.

Solução. Note que qualquer que seja a matriz quadrada A verifica-se

$$[A^T A]^T = A^T [A^T]^T = A^T A.$$

V (4) Se $a = b = c = 0$, a matriz $A'A$ é definida positiva.

Solução. Vide a resolução do item (1) ou observe que neste caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = A^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

que possui os autovalores 1, 4 e 9, todos positivos, mostrando que $A^T A$ é definida positiva.

ANPEC (2011-Q9-(1)). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Julgue as afirmativas:

F (1) Se $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{bmatrix}$ é a matriz hessiana de f e $(0, 0)$ é um ponto crítico de f , podemos afirmar que $(0, 0)$ é ponto de mínimo de f .

Solução. Nesse caso $H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é indefinida (note que $\Delta_2 = -1 < 0$). Em particular não verifica a condição necessária de segunda ordem para mínimo.

Referências Bibliográficas

- [1] BOLDRINI, J. *Álgebra Linear*, terceira ed. HARBRA, 1980.
- [2] BOYCE, W.E. E DIPRIMA, R. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 2006.
- [3] LAGES LIMA, E. *Curso de Análise. V2*, terceira ed. IMPA, 1989.
- [4] SIMON, C., AND BLUME, L. *Mathematics for Economists*. Norton, 1994.