GABARITO - LISTA 6 - ÁLGEBRA LINEAR

Prof. Pedro Hemsley - IE-UFRJ - 2019.2

1. Podemos usar a representação simétrica para $y = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ii) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

iii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, iv) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

v) $\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$

---

② Usamos a mesma decomposição do exercício anterior.

(i) $y = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

(ii) $y = -3x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

(iii) $y = -3x_1^2 + 8x_1x_2 - 6x_2^2$

(iv) $y = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$

(v) $y = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 5x_2x_3$

(vi) $y = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2$

(vii) $y = -2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$

5

A: $\det\begin{pmatrix} 3-r & 0 \\ 4 & 5-r \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3-r)(5-r)=0$

$\Rightarrow \underline{r_1 = 3}, \ \underline{r_2=5}$ (matriz triangular)

$r_1=3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $4x+2y=0 \Rightarrow$ $y=-2x \Rightarrow$ $\underline{(1,-2)}$: autovetor

$r_2=5$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-2x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow (0,1)$ é autovetor.

B: $\det\begin{pmatrix} -1-r & 3 \\ -2 & 4-r \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -(1+r)(4-r)+6=0$

$\Rightarrow r_1=1, \ r_2=2$

$\underline{r_1=1}$: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-2x+3y=0 \Rightarrow 3y=2x$

$\Rightarrow y = 2/3\, x$

$\Rightarrow (1, 2/3)$ é autovetor

$\underline{r_2=2}$: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-3x+3y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow$ $(1,1)$ é autovetor.

C: $\det\begin{pmatrix} 0-r & -2 \\ 1 & -3-r \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r(3+r)+2=0$

$\Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = -1$

De forma análoga aos casos anteriores, obtemos os autovetores $v_1 = (1,1)$

$v_2 = (2,1)$

D: pode ignorar.

---

6 Traço = soma dos autovalores

Determinante = produto dos autovalores

$Tr(A) = 3+5 = 8$

$Det(A) = 3.5 = 15$

$Tr(B) = 1+2 = 3$

$Det(B) = 1.2 = 2$

$Tr(C) = -2-1 = -3$

$Det(C) = (-2)(-1) = 2$

---

(7) Solução de $x_{n+1} = a \cdot x_n$, x_0 dado:

$x_n = a^n \cdot x_0$ (visto em aula).

Logo, $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x_0$: estável, pois $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Se $x_n = 2^n \cdot x_0$, deixa de ser estável, pois $|2| > 1$.

---

(8) Solução geral:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 r_1^n v_1 + c_2 r_2^n v_2,$$

r_1, r_2: autovalores

v_1, v_2: autovetores

(A): $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot 5^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Condição inicial: $n = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \underbrace{3^0}_{=1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \underbrace{5^0}_{=1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ 1 = c_1 \cdot (-2) + c_2 \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 3$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot 5^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Análogo p/ as demais matrizes. Os sistemas não são estáveis pois sempre há ao menos um autovalor maior que um em módulo.

(9) $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$

$\boxed{r_1 = 1}$: matriz de Markov sempre tem um autovalor igual a um.

Logo, $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$: propriedade de autovalores

$1 + r_2 = 0.7 + 0.5$

$\boxed{r_2 = 0{,}2}$

Autovetores:

$\underline{r_1 = 1}$: $\begin{pmatrix} 0.7-1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.3 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 0.3v = 0.5w \Rightarrow 3v = 5w \Rightarrow w = \frac{3}{5}v$

$\Rightarrow \left(1, \frac{3}{5}\right)$ é autovetor

$\underline{r_2 = 0{,}2}$: $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v + w = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(1,-1)}_{\text{autovetor.}}$

<u>Solução Geral</u>:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot 1^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \underbrace{c_2 \cdot 0.2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\to 0 \text{ pois } |0.2|<1.}$$

$$\to c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{3}{5} c_1 \end{pmatrix}$$

Mas $c_1 + \frac{3}{5} c_1 = 1 = c_1 \cdot \frac{8}{5} = 1$

$\Rightarrow c_1 = 5/8 \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ 3/5\, c_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}}_{\text{distribuição de longo prazo.}}$

Análogo p/ B.