GABARITO – LISTA 7 – ÁLGEBRA LINEAR

Prof. Pedro Hemsley – IE-UFRJ – 2019.2

(1)

(i) É sub-espaço vetorial: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$\alpha(0,y_1)+\beta(0,y_2) = (0, \alpha y_1 + \beta y_2)$: pertence ao conjunto.

(ii) Não é subEV: não contém a origem $(0,0)$.

(iii) É subEV:

$y = \frac{3}{4}x$: reta que passa pela origem.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\left(x, \frac{3}{4}x\right)+\beta\left(x', \frac{3}{4}x'\right) =$

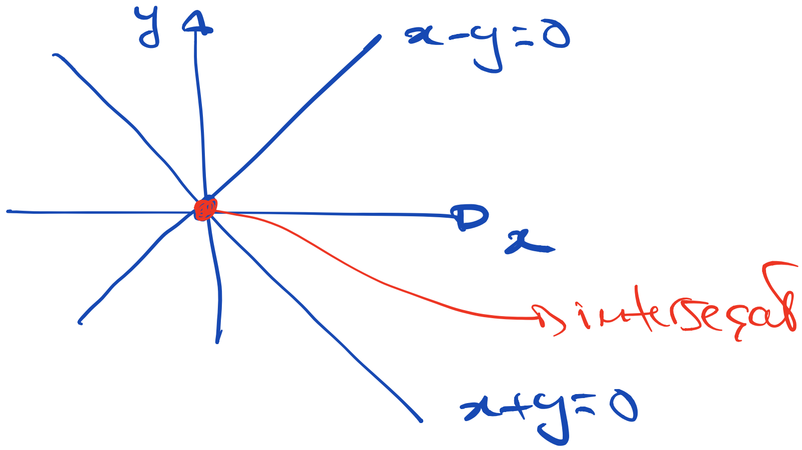
$\left(\alpha x+\beta x', \frac{3}{4}(\alpha x+\beta x')\right)$: pertence ao conjunto.

(iv) Não é subEV:

$\underbrace{(1,-1)+(1,1)}_{\text{soma de elementos no conjunto}} = (2,0) \notin$ ao conjunto.

(v) Não é subEV: não contém a origem.

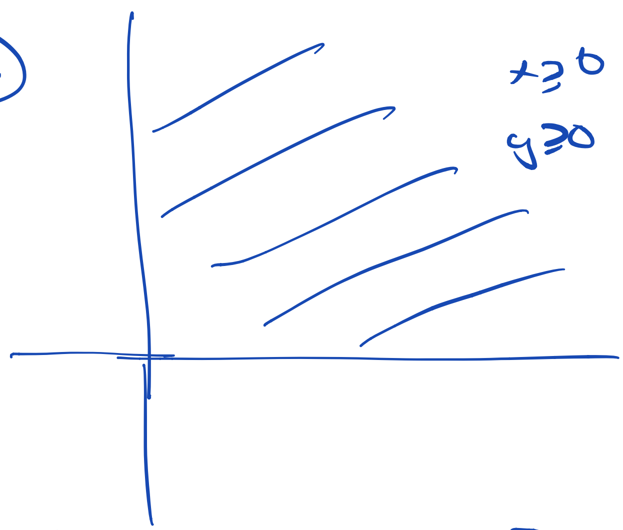
(vi)



ou seja $\{(x,y) : x+y=0,\ x-y=0\} = \{(0,0)\}$:

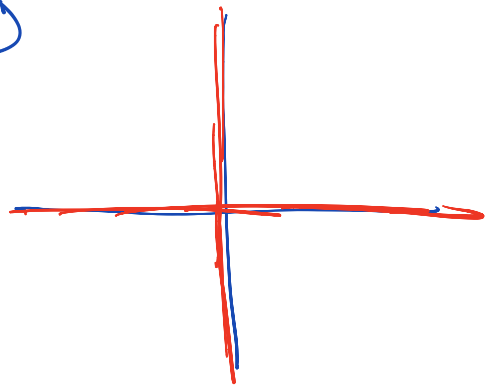
subespaço vetorial trivial: contém apenas a origem.

(vii)



Não é subEV: não é fechado para multiplicação por escalar: se multiplicar por (-1), saímos do conjunto.

vi:



União dos eixos: não é subEV.:

$\underbrace{(x,0)+(0,y)}_{\text{soma de elementos no conj.}}=(x,y) \notin$ ao conj se $x\neq 0, y\neq 0$.

2

A: $E.L.(A) = S\{(2,-1),(4,-2)\} = S\{(2,-1)\}$

$E.C.(A) = S\{(2,4)\}$, pois apenas a 1ª coluna possui pivô na forma escalonada.

(posto(A)=1).

$$E.N.(A) = \left\{ (x,y) : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\{ (x,y) : 2x - y = 0 \}$$

B:

$$E.L.(B) = \mathcal{L}\{[(2,-1,3),(4,-2,5)]\}$$

Forma Escalonada (necessária p/ obter espaço-coluna):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

colunas com pivô na forma escalonada: 1ª e 3ª;

Logo, $E.C.(B) = \{[(2,4),(3,5)]\}$

1ª coluna   3ª coluna.

$$E.N.(B) = \left\{ (x,y,z) : B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \{(x,y,z) : \underbrace{2x - y + 3z = 0,\ 4x - 2y + 5z = 0}_{\text{sistema linear}}\}$$

$$= \{(x, y, 0) : 2x - y = 0\}$$

pois z é necessariamente igual a zero (veja forma escalonada, acima).

(c)

$E.C.(C) = \mathcal{S}\{(2,1), (4,-2)\}$, pois o posto é igual a 2.

$E.C.(C) = \mathcal{S}\{(2,4), (1,-2)\}$, pois posto $= 2$: todas as colunas têm pivô.

$$E.N.(C) = \{(x,y) : C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(0,0)\}, \text{ pois}$$

$$a \quad \det(C) \neq 0 \Rightarrow \exists\, C^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

③ $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz da Transformação}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2z \end{pmatrix} = f(x,y,z)$$

---

④ $$(f+g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz da Transformação}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

---

⑤

(i) Para mostrar que $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$: tome $\alpha = 1$.

(ii) Para mostrar que $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v_1 \in V$: tome $v_2 = 0$ (origem).

---

(6)

(a) $E.N.(A) = \left\{ (x,y) : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$:

$= \{ (x,y) : 3x - 2y = 0 \}$ posto(A)=1.

$= \{ (x,y) : y = \frac{3}{2} \cdot x \}$

$=$ múltiplos de $(1, \frac{3}{2})$, ou $(2,3)$

$= \mathcal{L}\{(2,3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 2y = 9$

$\Rightarrow 3x = 2y + 9 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3} \cdot y + 3}$

Logo, $y = 0 \Rightarrow x = 3$: $(3,0)$ é solução particular.

Podemos escrever:

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$, ou

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

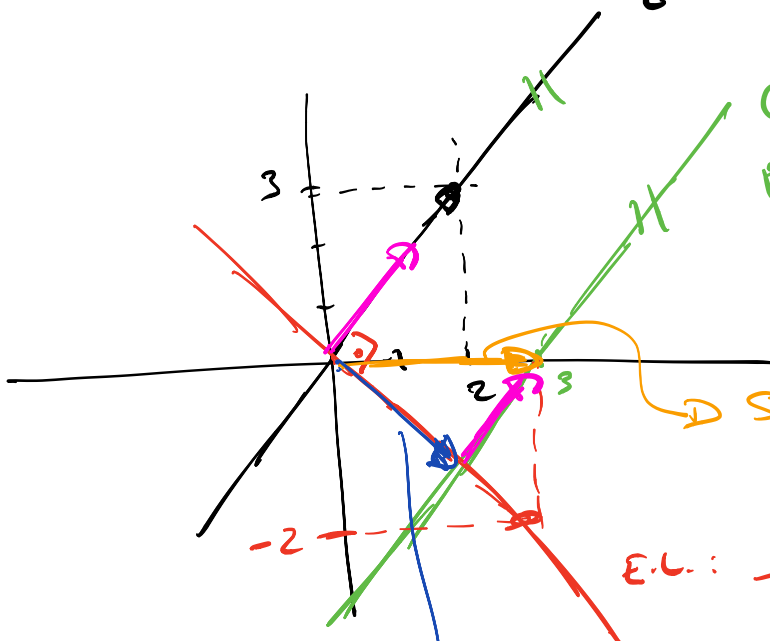
elemento genérico do espaço-nulo

solução particular

c E.L.(A) = $\mathcal{L}\{(3,-2)\}$

E.N.(A): múltiplos de (2,3)

d



Conjunto-Solução: passa pela sol. part. (3,0) e é paralelo ao E.N.

Sol. Part. (3,0)

E.L.: ⊥ ao E.C.

e Sol. mais próxima à origem: está no espaço-linha.

(f) Como esse vetor está no E.L,
pode ser escrito como $c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

para algum $c \in \mathbb{R}$.

Além disso, a diferença $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, entre a sol. part. e essa solução, indicada em rosa no gráfico acima, pertence ao espaço-nulo (lembrando: um vetor pode ser representado a partir de qualquer ponto).

Como o E.N. é perpendicular ao E.L., segue que o produto interno é igual a zero:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 - 3c \\ 2c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$9 - 9c - 4c = 0 \Rightarrow 13c = 9 \Rightarrow \boxed{c = 9/13}$$

$\Rightarrow$ Solução mais próxima à origem

$$= c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{9}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/13 \\ -18/13 \end{pmatrix}$$

//