1- Seja $V$ um espaço de dimensão $n$. Um conjunto de $n+1$ vetores de $V$ é sempre suficiente para gerar $V$, mas pode não ser base.

<u>Falso</u>. Contra-exemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}_{n+1=3 \text{ vetores}} \text{ não geram } \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{dimensão}=2}:$$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mas $\nexists\ c_1, c_2, c_3$ tal que

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1 + 2c_2 + 3c_3\\ c_1 + 2c_2 + 3c_3\end{pmatrix}$$

Se houvesse, teríamos:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 0 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \end{aligned} \Rightarrow 1 = 0 \text{ : absurdo.}$$

$\boxed{F_4}$

$w \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$

2- Considere um vetor $w$ pertencente ao espaço gerado pelos vetores $v_1$ e $v_2$. Então qualquer múltiplo de $w$ pode ser escrito como combinação linear de $v_1$ e $v_2$.

Verdadeiro:

$w \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ $\therefore$ $w$ pode ser escrito como combinação linear de $v_1, v_2$

$\therefore \exists c_1, c_2 \mid w = c_1 v_1 + c_2 v_2$

Um múltiplo de $w$ é um vetor $\alpha w$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos então escrever $\alpha w$ como C.L. de $v_1, v_2$:

$$\alpha w = \alpha (c_1 v_1 + c_2 v_2)$$
$$= (\alpha c_1) v_1 + (\alpha c_2) v_2$$

$\boxed{c.q.d.}$

3- Seja um vetor $w$ qualquer em um espaço euclidiano. A distância desse vetor até a origem é necessariamente maior que a norma do vetor unitário associado a $w$.

Falso. Contra-exemplo:

$$w = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

Distância de $w$ até a origem

= norma de $w$: $\|w\|$:

$$\|w\| = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10} < 1$$

E por definição a norma do vetor unitário é igual a 1.

4- Se $v_1, v_2, v3$ geram um espaço ~~vetorial~~ euclidiano $V$ mas não são LI, então a dimensão de $V$ é igual a 2.

**Falso.** Contra-exemplo:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} :$$ não são LI,

mas geram (sub) espaço de dimensão 1:

a reta, pois toda C.L. desses vetores

tem as duas coordenadas iguais!

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 + 2c_2 + 3c_3\\ c_1 + 2c_2 + 3c_3\end{pmatrix}$$

Logo, geram a reta de 45°.

5- Considere uma matriz com duas linhas e $n$ colunas. Se o posto dessa matriz é igual a 1, então o produto interno entre as linhas é necessariamente diferente de zero.

Verdadeiro.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Posto $= 1 \Rightarrow$ Ao escalonar, obtemos uma linha de zeros: a segunda linha é múltiplo da primeira.

Logo, $\forall b_i, \exists \gamma \neq 0 : b_i = \gamma a_i$

Produto interno $= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$

$$a_1 \cdot \gamma a_1 + \cdots + a_n \cdot \gamma a_n = \gamma(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

$$= \gamma \cdot \|a\| > 0$$

($\|a\|$ deve ser maior que zero, ou a matriz teria posto zero.)

6- Considere uma matriz com $n$ linhas e $m$ colunas. Se $n > m$, então as linhas dessa matriz não formam uma base para $\mathbb{R}^m$.

Verdadeiro.

As linhas são os vetores

$n > m \Rightarrow$

número de vetores > dimensão do espaço

$\Rightarrow$ vetores são L.I.

$\Rightarrow$ não formam base.

7- Sejam $x$ e $y$ vetores em $\mathbb{R}^n$ tal que $x = 2y$. A norma de $x$ é o dobro da norma de $y$.

Verdadeiro.

$x = 2y \Rightarrow \|x\| = \|2y\| = |2| \cdot \|y\| = 2 \cdot \|y\|$

Teorema visto em aula:

$\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$\|rx\| = |r| \cdot \|x\|.$

8- Considere três vetores $u, v, w$ tal que $u = v + w$. Se um vetor $a$ pode ser escrito como combinação linear de $u, v, w$, então também pode ser escrito como combinação linear de $u, v$.

Verdadeiro.

$$a = c_1 u + c_2 v + c_3 w$$

$$= c_1 u + c_2 v + c_3 \cdot \underbrace{(u - v)}_{= w}$$

$$= \underbrace{(c_1 + c_3) u + (c_2 - c_3) v}_{\text{comb. linear de } u \text{ e } v.}$$

9- Considere uma matriz quadrada diagonal de ordem $n$ em que o primeiro elemento da diagonal é 1, o segundo é 2, e assim por diante. O determinante da inversa dessa matriz é $\frac{1}{n!}$.

<u>Verdadeiro</u>.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$ : matriz diagonal

$\Rightarrow$ $\det(A)$ = produto dos elementos da diagonal principal.

$$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Além disso, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{n!}$

teorema visto em aula

$n$:

10- Considere uma matriz $A$ qualquer e sua transposta $A^T$. A matriz $M = A + A^T$ é necessariamente simétrica.

Verdadeiro:

Um elemento genérico de $M$ é:

$$M_{ij} = a_{ij} + a^T_{ij}$$

Mas por definição de transposta,

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

Logo, $M_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$

Analogamente, $M_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$

$\Rightarrow M_{ij} = M_{ji} \quad \forall i, j$: $M$ é simétrica.

11- Se todos os elementos de uma matriz $A$ são estritamente negativos, então seu determinante é menor que zero.

Falso. Contra-exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

12- Toda matriz quadrada com determinante diferente de zero admite inversa.

Verdadeiro. Teorema visto em aula:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{existe } A^{-1}.$$

13- Considere um sistema linear com matriz de coeficientes $A_{m,n}$, para $m > n$, e suponha que o posto de $A$ seja igual a $n + 1$. Esse sistema linear admite exatamente duas soluções.

Verdadeiro por vacuidade.

Se $m > n$, então posto $\leq n$.

Não existe matriz $A_{m,n}$ com $m > n$ e posto $= n+1$.