1- Seja P a matriz de projeção de um elemento qualquer do espaço vetorial E no subespaço vetorial $V \subset E$. Se $x \in V$, então $Px = x$.

<u>Verdadeiro</u>: Px é o elemento de V à menor distância de x. Se $x \in V$, o elemento à menor distância é ele próprio: $Px = x$.

De outra forma: se $x \in V$, x é projeção em V de algum elemento $y \in E$: $Py = x$.

Logo, $P(Py) = Px \Rightarrow P^2 y = Px \Rightarrow Py = Px$, pois P é idempotente ($P^2 = P$). Como $Py = x$, segue

$x = Px$.

2- Considere uma matriz quadrada com número par de linhas. Se essa matriz é negativa definida, então o determinante é estritamente negativo.

Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$: número par de linhas

Menor Principal Líder

$MPL_1 = -1 < 0$

$Det = MPL_2 = (-1)\cdot(-1) - 0\cdot 0 = 1 > 0$

Mas $Det = MPL_2 > 0$

3- Considere uma transformação linear representada por uma matriz quadrada em que o traço é igual a zero. Essa transformação é necessariamente injetiva.

Falso. Contra-exemplo:

$x \Rightarrow Ax$, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$Tr(A) = 1 - 1 = 0$, mas $det(A) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ existe $\Rightarrow$ A representa transf. linear bijetiva e, em part., injetiva.

4- Considere uma matriz diagonal de ordem 2 em que a soma dos autovalores é igual a 2 e o menor principal líder de ordem 1 é igual a 1. Essa matriz é necessariamente a identidade.

Verdadeiro.

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$: Matriz Diagonal, ordem 2.

Traço $= 2 \Rightarrow a + b = 2$

$MPL_1 = 1 \Rightarrow a = 1$

Logo, $b = 2 - a = 2 - 1 = 1$:

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: identidade.

5- Considere uma transformação linear representada por uma matriz quadrada em que o traço é igual ao determinante. Essa transformação é necessariamente bijetiva.

<u>Falso</u>. Contra-exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \quad \begin{array}{l} \text{Traço} = 0 \\ \text{Det} = 0 \end{array}$$

Det $= 0 \therefore$ não é bijetiva

(não admite inversa)

6- Considere uma matriz quadrada diagonal de ordem n em que o primeiro elemento da diagonal é 1, o segundo é 2, e assim por diante. Os autovetores dessa matriz formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

Verdadeiro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} : \text{diagonal}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2, \ldots, \lambda_n = n$

(ao subtrair λ_i de todos os elementos da diagonal principal, a linha i passa a ter apenas zeros, e portanto o posto é $n-1 < n \Rightarrow \det = 0$, matriz singular).

Autovetores associados a $\lambda_i = i$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 2-i & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \; i-i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & n-i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & & & & \\ & 2-i & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{pmatrix}$$

Linha de 0's

Então:

$$\begin{pmatrix} 1-i & & & & \\ & 2-i & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-i)}_{\neq 0} x_1 + \underbrace{(2-i)}_{\neq 0} x_2 + \cdots +$$

$$0 \cdot x_i + \cdots \underbrace{(n-i)}_{\neq 0} x_n = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2, \ldots, \underbrace{x_{i-1}, x_{i+1}}_{\text{atenção}}, \ldots, x_n = 0$$

x_i livre.

Logo, o autovalor $\lambda_i = i$ tem autovetor associado: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i,$

linha i

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Os autovetores são $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} : \det = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ formam base p/ $\mathbb{R}^n$.

7- Considere um conjunto em que cada elemento é uma matriz positiva definida de ordem 2. Esse conjunto é um subespaço vetorial.

Falso: não é fechado p/ mult. por escalar:

$$\underbrace{(-1)}_{\text{escalar}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{P.D. ordem } 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{negativa definida ordem } 2}$$

8- Seja $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função que associa a cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor $f(x)$ em que a primeira coordenada é igual a 1, e todas as demais coordenadas são iguais às de x. Então f é uma transformação linear.

Falso, pois não passa pela origem:

$$T(0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0) \neq (0, \dots, 0)$$

Lembrando: uma T.L. leva a origem na origem: $T(0) = 0$.

9- Considere uma matriz com três linhas e cinco colunas. A dimensão do espaço-nulo é necessariamente igual a 2.

Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto = 1

#colunas: 5

Pelo teorema fundamental da Álgebra Linear:

1 + Dimensão (E.N.) = 5

$\Rightarrow$ Dimensão (E.N) = 4 $\neq$ 2.

10- Se um sistema de equações de diferença pode ser representado por uma matriz singular, então esse sistema é estável.

Falso. Contra - exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{array}{l} x_{t+1} = 2x_t \\ y_{t+1} = 2x_t \end{array}$$

Auto-valores : $\lambda_1 = 2 > 1$, $\lambda_2 = 0$.

$\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ sistema não é estável.

11. O conjunto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0$ e $y \geq 0$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ porque não é fechado para soma de vetores.

Falso. É fechado para soma de vetores:

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x, y \geq 0$

$(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $x', y' \geq 0$

$\Rightarrow (x, y) + (x', y') =$

$(x + x', y + y') \in \mathbb{R}^2$, $x + x' \geq 0$, $y + y' \geq 0$.

12. Considere uma matriz cujo posto é igual ao número de linhas. As linhas dessa matriz formam uma base para o espaço-linha.

Verdadeiro. Por definição, as linhas da matriz geram o espaço-linha. Como o posto é igual ao número de linhas, as linhas são L.I. Logo, formam base. $\square$

13. Se uma matriz admite inversa, então o espaço-nulo associado a ela é apenas a origem do domínio.

Verdadeiro. $x \in$ Espaço-Nulo

$\Rightarrow \quad Ax = 0$

Como A^{-1} existe:

$$A^{-1} \cdot (Ax) = A^{-1} \cdot 0$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot x = 0$$

$$Ix = 0$$

$$x = 0$$

$\boxed{\text{fy}}$

do domínio.

14. Suponha que todos os autovalores de uma matriz diagonal A sejam estritamente positivos. A transformação linear $T(x) = Ax$ assume valores também estritamente positivos para todo x.

Falso. Contra-exemplo:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: matriz diagonal com autovalores > 0

= elementos da diagonal principal em uma matriz diagonal.

Mas se $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

//